y растянута в 4 раза). Видно, что последние более вытянуты в направлении основного потока и прижаты к пластине (из-за конвективного переноса вихря), чем соответствующие линии при $\mathrm{Re} = 230{,}94$ (фиг. 4).

Приведем в заключение некоторые размерные величины, соответствующие рассматриваемому движению пластины с $\mathrm{Re}^* = 3 \cdot 10^3$ в электролите с $\sigma = 10^{12}$ $1/c$. Пусть $2a = 10^2$см. Тогда из (2.6) при $\delta = 0{,}4$ следует $\omega = 9 \cdot 10^4$ $1/c$, из (4.4) и $v_0/u_0 = 0{,}39$ следует $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-1}$ см/с; из (4.3), (2.5) определяется амплитуда максимальной напряженности магнитного поля $H_0 = 2\pi I_0/c \simeq 2{,}7$Гс.

Поступила 30 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кирко И. М.** Жидкий металл в магнитном поле. М.—Л., Энергия, 1964.
2. **Phillips O. M.** The prospects for magnetohydrodynamic ship propulsion.— J. ship research, 1962, vol. 5, N 4.
3. **Васильев Л. Г., Хожаинов А. И.** Магнитная гидродинамика в судовой технике. Л., Судостроение, 1967.
4. **Меркулов В. И.** Движение сферы в проводящей жидкости под действием скрещенных электрического и магнитного полей.— Магнитн. гидродинамика, 1973, № 1.
5. **Sneyd A.** Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, p. 4.
6. **Джакупов К. Б.** О некоторых разностных схемах для уравнений Навье — Стокса.— ЧММСС, 1971, т. 2, № 1.
7. **Кускова Т. В.** Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 7. М., изд. Моск. ун-та, 1967.
8. **Меркулов В. И., Панчук В. И., Ткаченко В. Ф.** Решение уравнений движения электропроводящей жидкости в продольном бегущем магнитном поле.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, Наука, 1969.
9. **Цянь Сюэ-сэнь.** Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го.— В кн.: Проблемы механики. М., ИЛ, 1959.
10. **Janour Z.** Resistance of a plate in a parallel flow at low Reynolds number. NACA TM N 1316, 1951.

УДК 532.526.2.53

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ

В. И. Вишняков, А. П. Шахорин

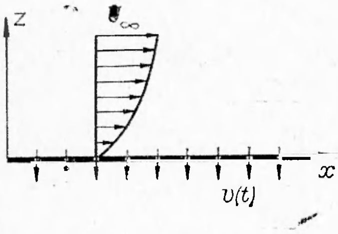
(*Москва*)

Рассмотрена задача о нестационарном обтекании плоской проницаемой пластины неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом. В отличие от [1], где рассмотрена аналогичная постановка задачи для псевдопластической жидкости, в данной работе приведено решение для случая дилатантной жидкости.

Для неньютоновских жидкостей со степенным реологическим законом связь между напряжением сдвига τ и градиентом скорости $\partial u/\partial z$ в случае плоских движений имеет вид [2]

$$\tau = k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (n > 0),$$

где k и n — реологические константы среды; причем случай $n = 1$ соот-



Фиг. 1

ветствует ньютоновской жидкости, $n < 1$ — псевдопластической, $n > 1$ — дилатантной жидкости.

В работе [1] рассмотрено решение задачи об обтекании неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом плоской бесконечной пластины при наличии однородного отсоса жидкости, зависящего от времени по определенному закону. Решение указанной задачи получено для случаев псевдопластической ($n < 1$) и ньютоновской ($n = 1$) жидкостей. Ниже приведено решение задачи в аналогичной постановке без ограничения на возможные значения $n > 0$.

Рассмотрим нестационарное обтекание однородным потоком плоской поверхности $z = 0$ степенной жидкостью (фиг. 1), через которую осуществляется поперечное движение жидкости со скоростью

$$v(t) = \frac{\beta}{n+1}\left(\frac{U_\infty^{1-n}}{na}\right)^{-\frac{1}{n+1}}(t+t_0)^{-\frac{n}{n+1}}, \tag{1}$$

где $\beta = \text{const}$ — скорость набегающего потока; t — время; t_0 — начальный момент времени; $a = k/\rho$.

В приближении теории пограничного слоя уравнение безградиентного движения степенной жидкости запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t)\frac{\partial u}{\partial z} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^n. \tag{2}$$

Вопрос о существовании и общем характере поведения решения уравнения типа (2) подробно освещен в работах [3—4].

Получить точное аналитическое решение уравнения (2), соответствующее произвольному закону движения жидкости $v(t)$, не удается. Однако для выражения (1) существует точное автомодельное решение.

Граничные условия в рассматриваемом случае следующие:

$$u(0) = 0,\ u(\infty) = U_\infty. \tag{3}$$

Автомодельная переменная η и скорость u представляются в форме

$$\eta = \left(\frac{U_\infty^{1-n}}{na}\right)^{\frac{1}{n+1}}(t+t_0)^{-\frac{1}{n+1}}z, \quad u = U_\infty f(\eta). \tag{4}$$

С использованием зависимости (1), (4) решение системы (2), (3) можно свести к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{n-1}{n+1}(\beta - \eta) = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{df}{d\eta}\right)^{n-1} \tag{5}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0,\ f(\infty) = 1. \tag{6}$$

Проинтегрировав (5) два раза, получим

$$f(\eta) = \left[\frac{n-1}{2(n+1)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\int_0^\eta (2\beta\eta - \eta^2 + \text{const})^{\frac{1}{n-1}}\,d\eta. \tag{7}$$

Решение уравнения (5) оказывается существенно различным в случаях $n < 1$ и $n > 1$, поэтому рассмотрим эти случаи отдельно.

Для $n < 1$ выражение (7) удобно представить в виде

$$f(\eta) = \left[\frac{1-n}{2(1+n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \int_0^\eta [(\eta-\beta)^2 + A^2]^{\frac{1}{n-1}} d\eta,$$

где A — постоянная, подлежащая определению.

Введем новую переменную $\xi = \eta - \beta$ и, используя граничные условия (6), получим

$$\int_{-\beta}^{\infty} (\xi^2 + A^2)^{\frac{1}{n-1}} d\xi = \left[\frac{2(1+n)}{1-n}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{8}$$

Взяв интеграл в левой части (8), получим трансцендентное уравнение для определения постоянной A

$$\frac{1}{2} A^{\frac{n+1}{n-1}} B\left[\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2(1-n)}\right] + \frac{1}{2} A^{\frac{2}{n-1}} \beta B\left(1, \frac{1}{2}\right) F\left(-\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\beta^2}{A^2}\right) =$$
$$= \left[\frac{2(1+n)}{1-n}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

где $B(p, q)$— бета-функция; $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$— гипергеометрическая функция.

Для случая $n > 1$ имеем

$$f(\eta) = \left[\frac{(n-1)}{2(n+1)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \int_0^\eta [C^2 - (\eta-\beta)^2]^{\frac{1}{n-1}} d\eta, \tag{9}$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

Исследование (9) показывает, что существует такое предельное значение $\eta = \eta_f$, что для всех $\eta > \eta_f$ $f(\eta) = 1$, т. е. сдвиговые возмущения для случая $n > 1$ локализуются на конечном расстоянии от поверхности пластины.

Для дальнейшего решения введем новую переменную

$$(y-\beta)^2 = C^2,$$

тогда получим два дополнительных условия:

$$f(\eta) = 1, \; df/d\eta|_{\eta=y} = 0. \tag{10}$$

С учетом (10) будем иметь

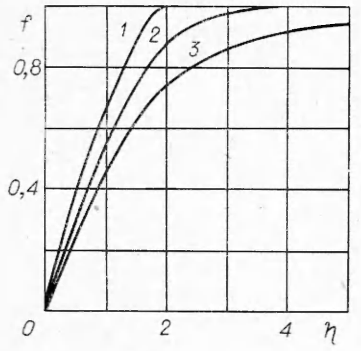
$$\int_0^y [(y-\beta)^2 - (\eta-\beta)^2]^{\frac{1}{n-1}} d\eta = \left[\frac{2(n+1)}{n-1}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{11}$$

Вводя переменные $\theta = \eta - \beta$ и $v = z - \beta$ и взяв интеграл в (11), найдем уравнение для определения C

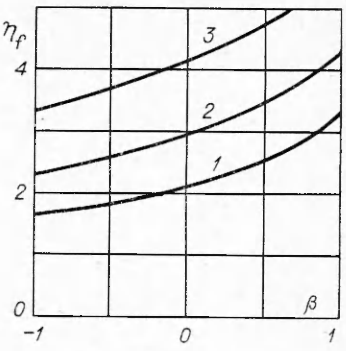
$$y^{\frac{n+1}{n-1}} \left[\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}\right) + 2^{\frac{n+1}{n-1}} \left\{B_{\frac{y+\beta}{y}}\left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}\right) - B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}\right)\right\}\right] =$$
$$= \left[\frac{2(n+1)}{n-1}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

где $B_p(p, q)$— неполная бета-функция.

Результаты расчетов по полученным формулам представлены на фиг. 2, 3. На фиг. 2 приведены безразмерные профили скорости для раз-



Фиг. 2



Фиг. 3

личных значений n и параметра вдува (отсоса) β(*1* — $n = 2$; *2* — 1,25; *3* — 0,5). На фиг. 3 показана зависимость положения фронта сдвиговых возмущений от параметра вдува (отсоса) β для различных значений реологической константы n(*1* — $n = 2$; *2* — 1,25; *3* — 1,15).

Авторы выражают благодарность К. Б. Павлову за обсуждение результатов работы.

Поступила 19 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шульман З. П., Берковский Б. М.** Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, Наука и техника, 1966.
2. **Уилкинсон К.** Неньютоновские жидкости. М., Мир, 1964.
3. **Олейник О. А.** О системе уравнений теории пограничного слоя.— ЖВММФ, 1963. № 3.
4. **Суслов А. И.** О системе уравнений пограничного слоя с поверхностью разрыва.— УМН, 1974, т. 29, вып. 3.

УДК 532.135

ВЯЗКОСТНЫЙ ВЗРЫВ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Б. Алексапольский, В. И. Найденов

(*Москва*)

Гидродинамический тепловой взрыв при напорном движении несжимаемой жидкости по трубам теоретически предсказан в [1—3].

В данной работе предложена гидравлическая теория вязкостного взрыва, причиной которого является нелинейная зависимость вязкости от температуры.

Рассмотрим ламинарное движение несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса R и длины L. Давление на входе в трубу равно p_1, на выходе p_2. Температура жидкости в начальном сечении равна T_0, на стенках трубы задан стационарный тепловой поток $\lambda \partial T/\partial r = q_c < 0$ (тепло отводится от жидкости). Физические величины λ, ρ, C_p в рассматриваемом интервале температур будем считать постоянными.