

УДК 532.529.2; 532.546

Свободноконвективное МГД-течение через пористую среду, насыщенную жидким галлием, в квадратной полости

Т. Джавед, М.А. Сиддики, З. Мехмуд

Международный исламский университет, Исламабад, Пакистан

Email: arshi_500@hotmail.com

Проведено численное моделирование свободноконвективного течения через квадратную камеру, заполненную пористой средой, насыщенной жидким галлием, при наличии однородного вертикального/горизонтального магнитного поля. Нижняя стенка камеры полагается нагретой равномерно, верхняя — теплоизолированной, левая — нагревается линейно, а правая — нагревается линейно или полагается холодной. Для решения уравнений Навье–Стокса, описывающих течения несжимаемой жидкости, используется метод конечных элементов взвешенных невязок Галеркина, при этом для исключения давления применяется метод штрафных функций. Численные результаты, полученные на сетке для широкого диапазона физических параметров течения, отображены в табличной форме. Для проверки точности результатов вычислений проводится их сравнение с результатами предыдущих исследований. Установлено, что интенсивность циркуляции вдоль линий тока значительно увеличивается с ростом числа Дарси, в то время как присутствие вертикального магнитного поля вместо горизонтального приводит к более медленному увеличению интенсивности циркуляции вдоль линий тока. В случае линейно нагретой правой стенки среднее число Нуссельта является возрастающей функцией числа Дарси. Показано, что наличие вертикального магнитного поля приводит к более высоким значениям среднего числа Нуссельта вдоль нижней и боковых стенок полости по сравнению с горизонтальным магнитным полем. В случае холодной правой стенки присутствие горизонтального магнитного поля приводит к более высоким значениям среднего числа Нуссельта по сравнению с вертикальным полем, а среднее число Нуссельта уменьшается по мере продвижения вдоль нижней и правой стенок и увеличивается вдоль левой стенки с увеличением расстояния.

Ключевые слова: свободная конвекция, квадратная полость, пористые среды, магнитное поле, численное моделирование.

Введение

Задачи переноса тепла в результате свободной конвекции в замкнутой полости привлекают внимание многих исследователей в связи с возможностью их широкого применения в промышленных, геофизических и инженерных приложениях. Решение подобных задач необходимо для контроля над радиоактивными отходами, расчета охлаждения электронных устройств, работы и конструирования сердечников ядерного реактора, в процессах сушки, химических реакторах, при подземном распространении загрязнений, отоплении и охлаждении зданий, в печах и теплообменных аппаратах; кроме того, к области применения свободноконвективных течений относится очистка жидкостей от твердых примесей через пористые среды. Исследования конвективного теплообмена в пористой среде представлены в работах [1–3].

Однородное магнитное поле, приложенное извне, широко используется, например, для контроля над расплавленным потоком при кристаллическом росте полупроводников и во многих других научных приложениях, таких как приборы для очистки воды, при обработке для предотвращения коррозии, в процессах производства материалов, при магнитном охлаждении, в магнитных охладителях и микроэлектронных приборах передачи тепла. Изучение теплового потока в проводящих жидких металлах в приближении магнитной гидродинамики (МГД) привлекает внимание исследователей различными научными приложениями, включающими процессы роста кристаллов. Хорошим примером является галлий (металл, который существует в жидком состоянии при комнатной температуре $29,8\text{ }^{\circ}\text{C}$) в силу его физических свойств: низкой температуры плавления, близкой к температуре окружающей среды, низкой вязкости, сильной зависимости поверхностного натяжения от температуры, высокой теплопроводности. Изучение свободной конвекции в металлах представляет интерес в практическом отношении для решения задачи роста кристаллов, поскольку области неустойчивости в расплавленном состоянии могут быть локализованы в твердой фазе. Некоторые простые задачи могут быть решены аналитически, однако большинство задач, представляющих практический интерес, требуют численных решений, например, как в случае жидкого галлия, когда появляется дополнительная трудность при работе со сложным для исследования материалом.

Авторы работы [4] изучали теплообмен посредством естественной конвекции в жидком галлии с одной горячей и другой холодной гранями и сравнивали численные и экспериментальные результаты. Они отметили хорошее согласование результатов для низких чисел Грасгофа (Gr) и систематические отклонения для больших чисел Gr . В работе [5] был проанализирован процесс плавления галлия внутри закрытой камеры при подаче тепла через одну из стенок. Здесь для численного моделирования использовалось программное обеспечение COMSOL multiphysics и полученные результаты были подтверждены экспериментальными данными. Также было обнаружено, что результаты численных расчетов, проведенных в трехмерной постановке, и экспериментальные данные хорошо согласуются друг с другом, что указывает на значительное влияние границ. В работе [6] был выполнен анализ естественной конвекции в слое жидкого галлия, текущего между горизонтальными плоскими медными пластинами — нагреваемой нижней и холодной верхней. В работе [7] исследовалась свободная конвекция в потоке электропроводящего жидкого металла, заполняющего линейно нагретую полость квадратной формы. Рассматривался случай равномерного нагрева вдоль нижней стенки и верхней, которая считалась изолированной; боковые стенки нагревались линейно. Магнитное поле прикладывалось под углами $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$. В работе [8] экспериментально и численно изучался смешанный конвективный тепловой поток внутри прямоугольной камеры, заполненной жидким галлием. Исследование проводилось для случая горячих нижней и верхней стенок. При этом верхняя граница рассматривалась в движении с постоянной скоростью. Наблюдались значительные влияния движущейся стенки на структуру потока и тепла. В работе [9] изучалась естественная конвекция в треугольной камере, заполненной пористой средой, в присутствии магнитного поля, когда ее боковые стенки нагреваются равномерно и неравномерно. Для решения основных уравнений течения применялся метод конечных элементов; результаты были представлены для разных диапазонов физических параметров потока, таких как числа Рэлея, Прандтля и Гартмана. В работе [10] был выполнен анализ влияния МГД на нестационарное свободноконвективное течение в квадратной полости, заполненной пористой средой с постоянным тепловыделением. Авторы [11] изучали термомагнитную конвекцию воздуха в условиях магнитного квадрупольного поля внутри квадратной пористой камеры с использованием модели локального теплового неравновесного состояния (LTNE). По их наблюдениям неравновесное воздействие на температуру жидкой и твердой фаз систематически уменьшается с увеличением значения числа Гартмана.

Помимо прочих приложений галлий используется в полупроводниковой индустрии, поскольку интересен многими свойствами, отличающими его от других металлов, например, жидким состоянием при комнатной температуре (точка плавления галлия — 29,78 °С). Он сохраняет жидкую форму в большом диапазоне температур (температура кипения галлия — 2403 °С) и поэтому может использоваться для высокотемпературных термометров, высокотемпературных смазок и манометров. В отличие от большинства других металлов, галлий при замерзании расширяется и, следовательно, не может храниться в твердых контейнерах. Известно, что галлий — парамагнетик и хороший проводник тепла и электричества. Свободно-конвективное течение через пористую среду при наличии магнитного поля широко используется, например, для очистки отходов нефти и в гидрологии. При моделировании течения на уровне сплошной среды часто требуется значение некоторых макрохарактеристик, таких как относительная проницаемость и т.д. Получение этих характеристик, как правило, является трудной задачей. Можно провести некоторые эксперименты с образцами, однако в них воспроизводится лишь одна группа условий, так как размер реального течения обычно больше используемого в экспериментах. Следовательно, такие эксперименты, как правило, не могут охватить требуемый диапазон параметров. Таким образом, необходима разработка физико-математических моделей, которые могут дать реальное представление о течении, построенных на экспериментальных данных. Проведенные многочисленные исследования и особые свойства галлия указывают на то, что передача тепла путем естественной конвекции в жидком галлии представляет интерес для исследований.

Целью представленной работы является изучение влияния магнитных полей разного направления на свободную конвекцию в изотропной пористой среде, насыщенной жидким галлием в квадратной полости, вдоль линейно нагретой левой стенки и с равномерно нагретой горизонтальной нижней стенкой, при этом верхняя стенка камеры считается изолированной, а правая — линейно нагревается или остается холодной. В работе [7] изучались подобные явления, но в настоящем исследовании авторы рассматривают пористую среду внутри полости и фокусируют внимание на влиянии пористости на структуру течения и теплоперенос, что не учитывалось в работе [7]. Для решения основных уравнений энергии и импульса в безразмерной форме сначала использовался метод штрафных функций для исключения давления, а затем применялся метод взвешенных невязок Галеркина для численного моделирования уравнений приведенного потока. Результаты расчетов проиллюстрированы линиями тока и изотерм. Подробно изучены числа Нуссельта и средние числа Нуссельта.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим ламинарное гидромагнитное свободноконвективное течение в химически инертной пористой среде, насыщенной жидким галлием, внутри квадратной полости при наличии однородного магнитного поля (см. рис. 1) и параметрах течения, приведенных в табл. 1. Высоту и ширину квадратной камеры обозначим как L . Её длина должна быть достаточно большой, чтобы исследование можно было считать двумерным в декартовой системе координат. Предполагается, что течение стационарно,

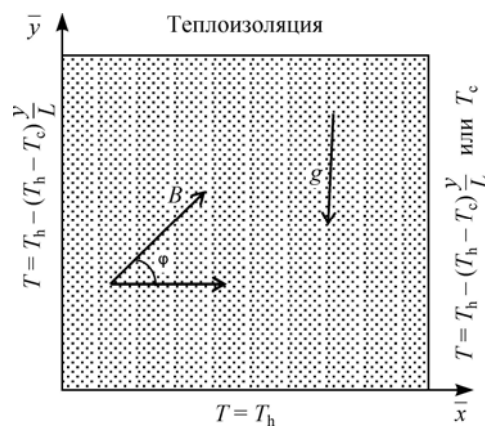


Рис. 1. Графическое представление физической системы.

Таблица 1
 Параметры галлия для задачи плавления [14]

Параметры	Галлий	Ед. измерения
Плотность (ρ)	$6,093 \cdot 10^3$	кг/м ³
Динамическая вязкость (μ)	$1,81 \cdot 10^{-3}$	Па·с
Козф. объемного расширения (β)	$1,20 \cdot 10^{-4}$	К ⁻¹
Кинематическая вязкость (ν)	$3,126 \cdot 10^{-7}$	м ² /с
Электропроводность (σ)	$3,87 \cdot 10^6$	Ом ⁻¹ ·м ⁻¹
Число Рэлея (Ra)	10^5	—
Число Прандтля (Pr)	0,025	—

жидкость является ньютоновской, вязкой, несжимаемой и электропроводящей. Плотность жидкости считается функцией температуры, а изменение плотности обуславливает появление члена гидродинамической силы в уравнении импульса в приближении Буссинеска [12]. Также предполагается, что температуры твердой и жидкой фаз в пористой области равны, поэтому справедливо локальное термодинамическое равновесие [2]. Постоянное магнитное поле B_0 внутри полости направлено горизонтально ($\phi = 0$) или вертикально ($\phi = \pi/2$). Индуцированным магнитным полем пренебрегают вследствие его малости по сравнению с B_0 в приближении низких магнитных чисел Рейнольдса [13], кроме того, пренебрегают влияниями вязкости, радиации и джоулева тепла и эффектом Холла.

В свете вышеизложенных предположений определяющие уравнения, выражающие закон сохранения массы, импульса и энергии, могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\nu}{K} \bar{u} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (\bar{v} \sin \phi \cos \phi - \bar{u} \sin^2 \phi), \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\nu}{K} \bar{v} + g\beta(T - T_c) + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (\bar{u} \sin \phi \cos \phi - \bar{v} \cos^2 \phi), \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right). \quad (4)$$

С учетом граничных условий получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{v}(\bar{x}, 0) = \bar{u}(\bar{x}, L) = \bar{v}(\bar{x}, L) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, L) = 0, \quad T(\bar{x}, 0) = T_h \quad \text{где } 0 \leq \bar{x} \leq L, \\ \bar{u}(0, \bar{y}) = \bar{v}(0, \bar{y}) = \bar{u}(L, \bar{y}) = \bar{v}(L, \bar{y}) = 0, \quad T(0, \bar{y}) = T_h - (T_h - T_c) \frac{\bar{y}}{L}, \\ T(L, \bar{y}) = T_h - (T_h - T_c) \frac{\bar{y}}{L} \quad \text{или } T_c, \quad \text{где } 0 \leq \bar{y} \leq L, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь \bar{x} и \bar{y} — компоненты декартовой системы координат, \bar{u} и \bar{v} — компоненты скорости вдоль осей \bar{x} и \bar{y} , ϕ — угол наклона магнитного поля по отношению к положительной оси x , равный 0 или $\pi/2$, L — ширина и высота квадратной полости, T_c — температура холодной стенки, T_h — температура горячей стенки, а ν — кинематическая вязкость.

Безразмерные переменные представлены следующим образом:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad u = \frac{\bar{u}L}{\alpha}, \quad v = \frac{\bar{v}L}{\alpha}, \quad p = \frac{\bar{p}L^2}{\rho\alpha^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (6)$$

$$\text{Da} = \frac{K}{L^2}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta L^3 (T_h - T_c) \text{Pr}}{\nu^2}, \quad \text{Ha}^2 = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\mu}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}.$$

После подстановки уравнения (6) в (1)–(4) получим следующие безразмерные уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} u + \text{Pr Ha}^2 (v \sin \phi \cos \phi - u \sin^2 \phi), \quad (8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} v + \text{RaPr}\theta + \text{Pr Ha}^2 (u \sin \phi \cos \phi - v \cos^2 \phi), \quad (9)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Граничные условия задачи в безразмерном виде запишутся как

$$u(x, 0) = v(x, 0) = u(x, 1) = v(x, 1) = \frac{\partial \theta}{\partial Y}(x, 1) = 0, \quad \theta(x, 0) = 1, \quad \text{где } 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = v(0, y) = u(1, y) = v(1, y) = 0, \quad \theta(0, y) = 1 - y, \quad (11)$$

$$\theta(1, y) = 1 - y \quad \text{или} \quad \theta(1, y) = 0, \quad \text{где } 0 \leq y \leq 1,$$

здесь Pr — число Прандтля, Ra — число Рэлея, Ha — число Хартмана, Da — число Дарси, u, v — безразмерные компоненты скорости, θ — безразмерная температура.

2. Метод решения

Поставленная задача решается методом конечных элементов с использованием метода штрафных функций для исключения давления в уравнениях (8) и (9). Для получения распределения давления [15] путем введения штрафного параметра γ используется уравнение неразрывности (7)

$$P = -\gamma(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y). \quad (12)$$

Для большого значения γ уравнение неразрывности выполняется автоматически. Как правило, выбирается значение $\gamma = 10^7$. Зависимость числа Нуссельта от величины γ показана в табл. 2. Подставив формулу (12) в уравнения (8) и (9), получим

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} u + \text{Pr Ha}^2 (v \sin \phi \cos \phi - u \sin^2 \phi), \quad (13)$$

Таблица 2
Средние числа Нуссельта вдоль нижней стенки для различных значений γ

γ	$\overline{\text{Nu}}_b$
10^4	-0,8963
10^5	-0,9189
10^6	-0,9212
10^7	-0,9215
10^8	-0,9215
10^9	-0,9215

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} v +$$

$$+ \text{RaPr}\theta + \text{Pr Ha}^2 \left(u \sin \phi \cos \phi - v \cos^2 \phi \right). \quad (14)$$

Рассматривая 6 узловых треугольных элементов и функции биквадратичной формы $\{\phi_k\}_{k=1}^N$, аппроксимируем компоненты скорости u , v и температуру θ следующим образом:

$$u \approx \sum_{k=1}^N U_k \phi_k(x, y), v \approx \sum_{k=1}^N V_k \phi_k(x, y), \theta \approx \sum_{k=1}^N \theta_k \phi_k(x, y). \quad (15)$$

После включения уравнения (15) в выражения (10), (13) и (14), применив метод конечных элементов взвешенных невязок Галеркина, получим следующие уравнения невязки для внутренней области Ω :

$$R_i^1 = \sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] \phi_i dx dy +$$

$$+ \gamma \left[\sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx dy + \sum_{k=1}^N V_k \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} dx dy \right] + \quad (16)$$

$$+ \text{Pr} \sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] dx dy + \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right] \phi_i dx dy -$$

$$- \text{Pr Ha}^2 \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right) \sin \phi \cos \phi - \left(\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right) \sin^2 \phi \right) \phi_i dx dy,$$

$$R_i^2 = \sum_{k=1}^N V_k \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] \phi_i dx dy +$$

$$+ \gamma \left[\sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx dy + \sum_{k=1}^N V_k \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} dx dy \right] - \text{Ra Pr} \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^N \theta_k \phi_k \right] \phi_i dx dy + \quad (17)$$

$$+ \text{Pr} \sum_{k=1}^N V_k \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] dx dy + \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right] \phi_i dx dy -$$

$$- \text{Pr Ha}^2 \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right) \sin \phi \cos \phi - \left(\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right) \cos^2 \phi \right) \phi_i dx dy,$$

$$R_i^3 = \sum_{k=1}^N \theta_k \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{k=1}^N U_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^N V_k \phi_k \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] \phi_i dx dy + \quad (18)$$

$$+ \sum_{k=1}^N \theta_k \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] dx dy.$$

Приведенная система нелинейных алгебраических уравнений (16)–(18) решается с помощью метода Ньютона–Рафсона. После оценки компонентов скорости U и V функция тока определяется с помощью следующего соотношения функции тока и компонентов скорости:

$$U = \partial \psi / \partial y \text{ и } V = -\partial \psi / \partial x, \quad (19)$$

которые можно свести к следующему уравнению второго порядка

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = \partial U / \partial y - \partial V / \partial x. \quad (20)$$

Так как поперечное течение отсутствует, то $\psi = 0$ вдоль всех границ, т.е. справедливы граничные условия прилипания. Функции тока также аппроксимируются базисными функциями $\{\phi\}_{k=1}^N$:

$$\psi \approx \sum_{k=1}^N \psi_k \phi_k(x, y), \quad (21)$$

и после повторного применения метода невязки Галеркина получим следующее уравнение невязки для функции тока:

$$R_i^s = \sum_{k=1}^N \psi_k \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right] dx dy + \sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial y} dx dy - \sum_{k=1}^N V_k \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx dy. \quad (22)$$

Коэффициент теплопередачи h , присутствующий в законе охлаждения Ньютона, может быть определен в безразмерном виде из локальных чисел Нуссельта Nu . Локальное (Nu) и среднее (\overline{Nu}) числа Нуссельта для нижних и боковых стенок определяются следующим образом:

$$Nu_b = -\sum_{i=1}^6 \theta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \quad Nu_l = -\sum_{i=1}^6 \theta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \quad Nu_r = \sum_{i=1}^6 \theta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x},$$

$$\overline{Nu}_b = \int_0^1 Nu_b dx, \quad \overline{Nu}_s = \int_0^1 Nu_s dy, \quad (23)$$

где индексы b , r и l соответствуют нижней, правой и левой стенкам соответственно.

3. Валидация численного метода

Для демонстрации сходимости численного решения обсуждаемой задачи в табл. 3 приведены значения среднего числа Нуссельта на нижней стенке, полученные в расчете на неоднородной сетке при разных уровнях ее плотности. Отметим, что с увеличением количества узлов сетки или, иначе говоря, уровня измельчения относительная погрешность решения уменьшается и достигает минимума в 1 % на четвертом уровне измельчения. Для исследования был выбран третий уровень уточнения — 2048 шестиузловых треугольных элементов.

После определения расчетной сетки полученные результаты дополнительно сравнивались с данными работы [7], как предельный случай для $Ra = 10^5$, $Pr = 0,025$, $Na = 50$ и горизонтального магнитного поля. Сравнение показало, что результаты настоящей работы являются точными и хорошо согласуются с данными [7] (см. рис. 2). На рисунке справа — результаты работы [7], слева — настоящий расчет.

4. Результаты и обсуждения

Обсудим результаты численного моделирования несжимаемого вязкого течения жидкого галлия в квадратной полости, заполненной химически инертной изотропной пористой средой (например, песчаником, пумитом, анодом на основе SnO_2), полученные для случая, когда правая стенка является холодной или линейно нагревается.

Таблица 3
Средние числа Нуссельта
вдоль нижней стенки
для сеток различной плотности

Уровни уточнения	Количество элементов	\overline{Nu}_b
Первый	128	-2,7126
Второй	512	-3,1566
Третий	2048	-3,1590
Четвертый	8192	-3,1920

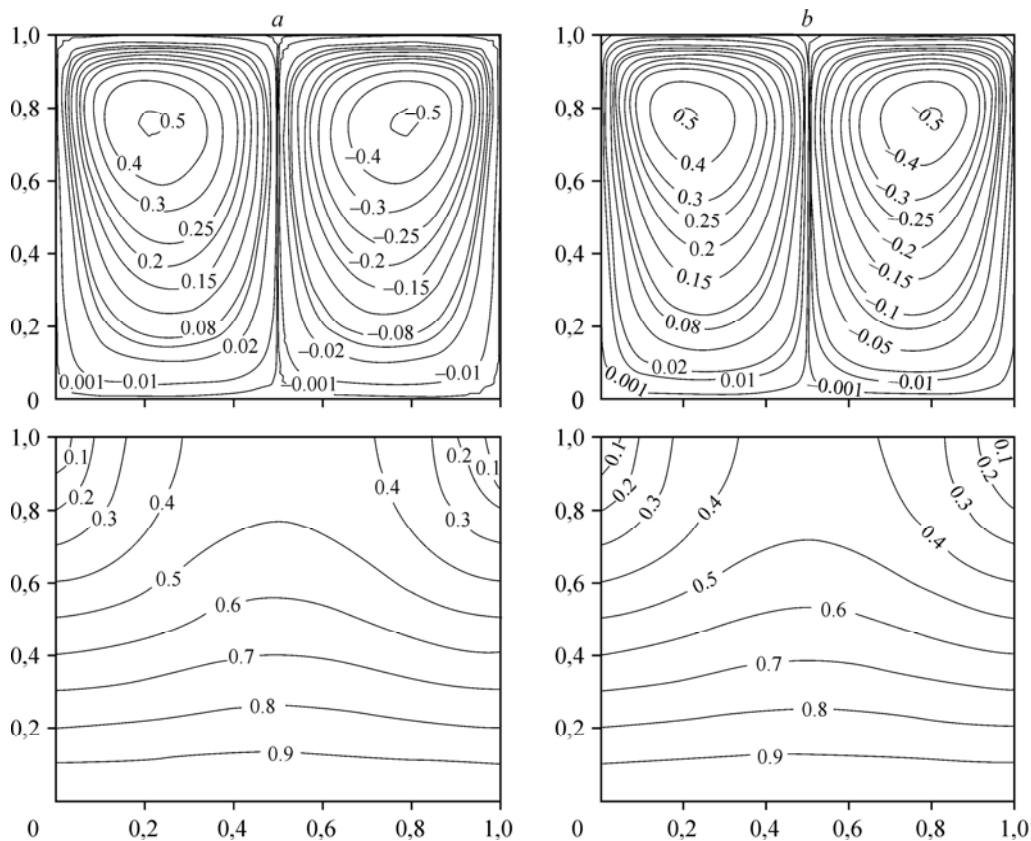


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов настоящей работы (а) и данных исследования [17] (b) при $Ra = 10^5$, $Na = 50$, $Pr = 0,025$, $\phi = 0$ и $\theta = 1 - Y$.

В представленном исследовании рассматривается диапазон числа Дарси, соответствующий песчанику, поскольку его физические параметры более совместимы с параметрами, определенными в настоящей задаче (см. работу [16]).

4.1. Холодная правая стенка

На рис. 3 изображены линии тока и изотермы для случая равномерно нагретой нижней стенки и линейно нагретой левой стенки (правая стенка остается холодной) под влиянием магнитного поля, прикладываемого в горизонтальном направлении ($\phi = 0$), когда число Дарси колеблется от 10^{-5} до 10^{-3} (значения для пористой среды, соответствующие песчанику (см. [16])). Другие параметры остаются фиксированными и составляют $Ra = 10^5$, $Pr = 0,025$ (галлий) и $Na = 30$ соответственно. Было замечено, что появляются две зоны циркуляции вдоль линий тока: с одной большой основной ячейкой циркуляции, направленной по часовой стрелке, охватывающей большую часть камеры, и другой, небольшой вторичной зоной циркуляции, направленной против часовой стрелки, появляющейся около верхнего левого угла квадратной полости. Жидкость поднимается вверх по левой стенке и спускается вдоль холодной правой, образуя первичную циркуляционную зону, а за счет теплового эффекта плавучести вблизи левого верхнего угла возникает вторичная циркуляционная зона. С другой стороны, контуры изотерм плавно изменяют поведение от левой линейно нагретой стенки до холодной правой, как показано на рис. 3а. Когда число Дарси возрастает до 10^{-4} , интенсивность циркуляции вторичной зоны увеличивается, и она вытягивается, тесня первичную зону циркуляции, и центр первичной зоны циркуляции смещается несколько вверх вдоль диагонали полости. Высота изотерм увеличивается, и они изгибаются к холодной правой стенке.

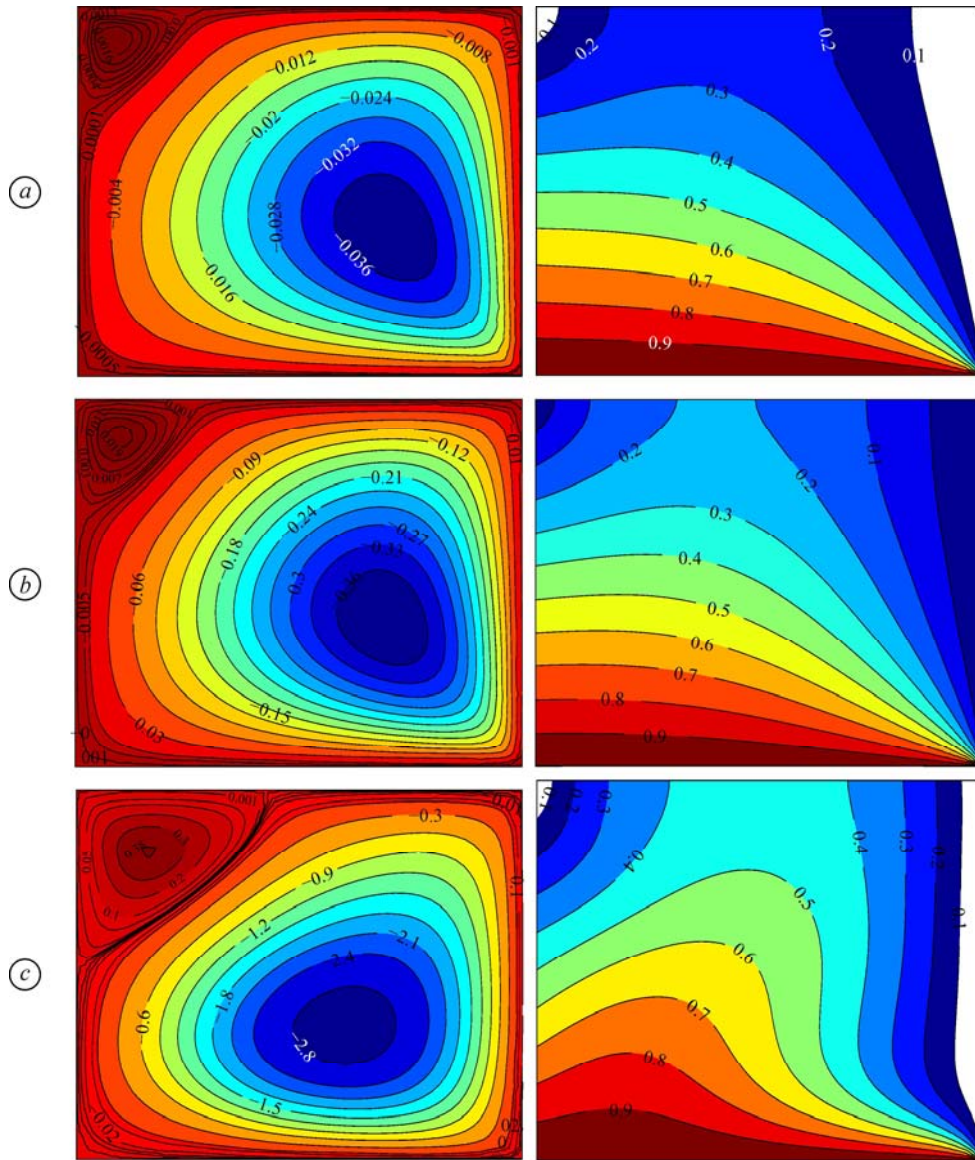


Рис. 3. Контуры изотерм и функций тока для равномерно нагретой нижней стенки.

$Ra = 10^5$, $Ha = 30$, $Pr = 0,025$ (галлий), $\phi = 0$; $Da = 10^{-5}$ (a), 10^{-4} (b) 10^{-3} (c).

Аналогичная тенденция наблюдается для изотерм и линий тока при увеличении числа Дарси до 10^{-3} . То есть, размер и интенсивность циркуляции вторичной зоны растет далее, а центр первичной области циркуляции почти совпадает с центром полости, двигаясь далее вдоль своей диагонали. Высота изотерм также увеличивается, и они изгибаются к правой холодной стенке вследствие того, что передача тепла максимальна около центра полости.

На рис. 4 показаны контуры изотерм и линий тока для тех же значений параметров потока, что и на рис. 3, но направление магнитного поля в этом случае полагается вертикальным. Отметим, что такое направление магнитного поля приводит к снижению температурного градиента в полости, где контуры изотерм, по-видимому, имеют излом в направлении боковых стенок полости для $\theta < 0,3$. Аналогично снижается интенсивность циркуляции вдоль контуров линий тока за счет появления вертикального магнитного поля. Как и в предыдущем случае, здесь также образуются большая первичная

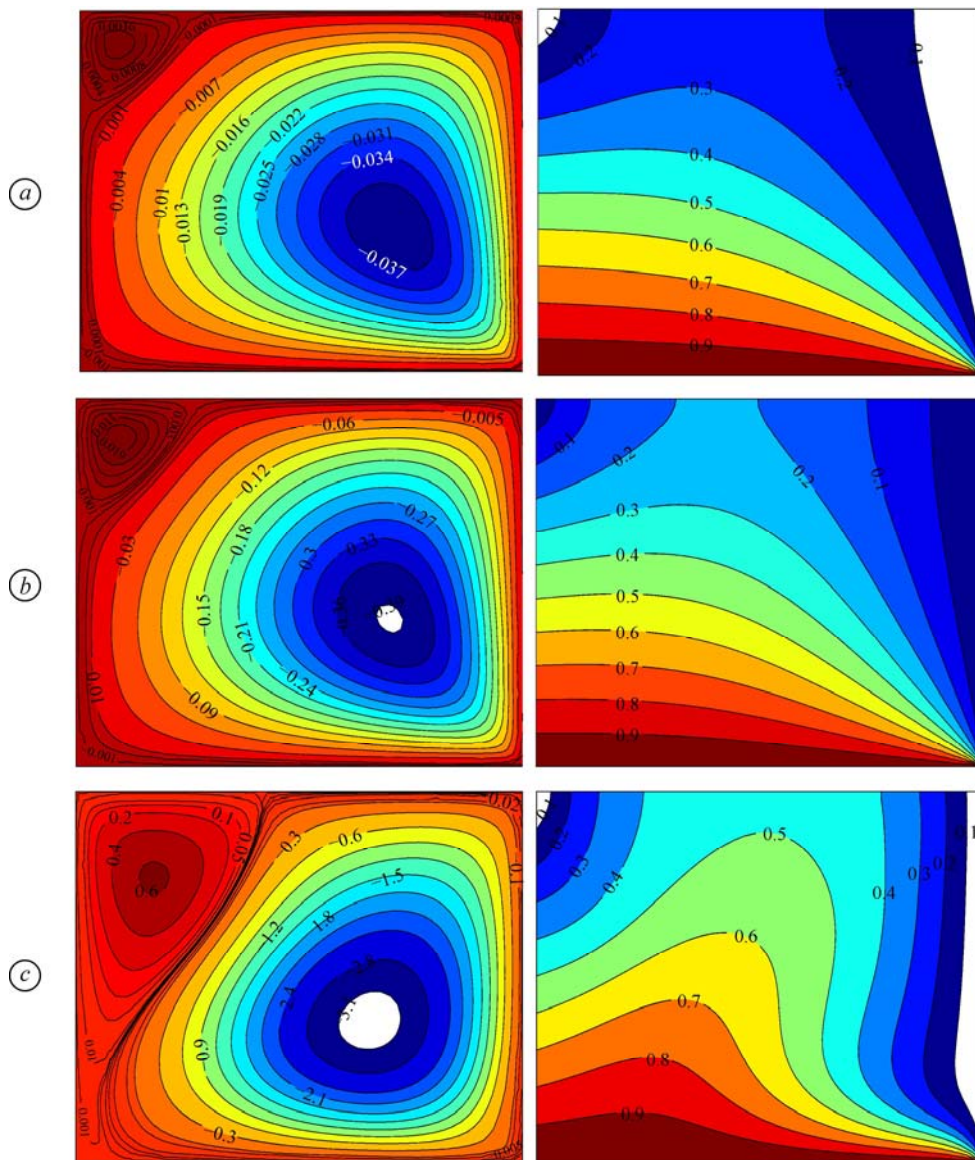


Рис. 4. Контурные изотермы и функции тока для равномерно нагретой нижней стенки. $Ra = 10^5$, $Ha = 30$, $Pr = 0,025$ (галлий), $\phi = \pi/2$; $Da = 10^{-5}$ (a), 10^{-4} (b) 10^{-3} (c).

циркуляционная зона и малая вторичная в верхнем левом углу. С ростом числа Дарси до 10^{-4} увеличивается интенсивность циркуляции и высота изотерм, но скорость этого увеличения значительно меньше, чем для горизонтального магнитного поля ($\phi = 0$) (рис. 3b). В отличие от предыдущего случая, в случае вертикального магнитного поля ($\phi = \pi/2$), увеличение числа Дарси свыше 10^{-4} приводит к резкому возрастанию интенсивности в первичных и вторичных зонах циркуляции, при этом вторичная циркуляционная зона растягивается в сторону равномерно нагретой нижней стенки. Неравномерность изотерм в этом случае также оказывается значительной, как показано (см. рис. 4c).

4.2 Линейно нагретая правая стенка

На рис. 5 и 6 представлены результаты численного моделирования для случая, когда обе боковые стенки нагреты линейно и нижняя стенка нагрета равномерно, а верхняя стенка

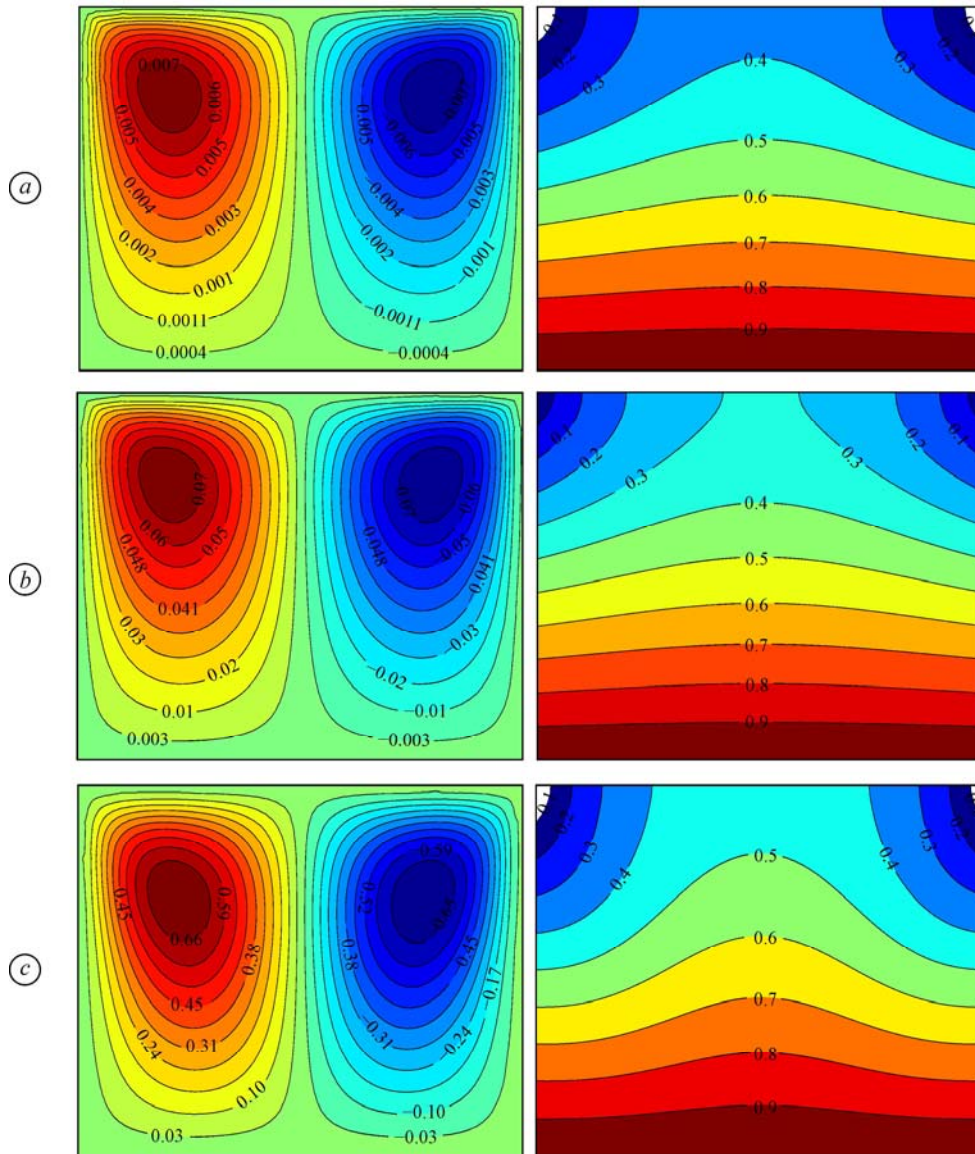


Рис. 5. Контуры изотерм и функций тока для линейно нагретой нижней стенки.

$Ra = 10^5$, $Ha = 30$, $Pr = 0,025$ (галлий), $\phi = 0$; $Da = 10^{-5}$ (a), 10^{-4} (b), 10^{-3} (c).

идеально изолирована. Используемые параметры имеют значения: $Ra = 10^5$, $Pr = 0,025$ (галлий), $Ha = 30$, $Da = 10^{-5}$, 10^{-4} , 10^{-3} ; направление магнитного поля соответствует $\phi = 0$, $\pi/2$. Рисунок 5 состоит из контуров изотерм и линий тока для случая горизонтального магнитного поля, т.е. ($\phi = 0$). Поскольку две стенки квадратной камеры линейно нагреваются, образуются две концентрических области циркуляции: слева — по часовой стрелке и справа — против часовой стрелки. Жидкость движется вверх вдоль стенок, а затем спускается по центру полости, образуя две зоны циркуляции (рис. 5a). В отличие от случая, когда правая стенка остается холодной, при ее линейном нагреве температура в полости имеет сравнительно высокое значение за счет аналогичного температурного профиля вдоль двух границ. Изотермы располагаются симметрично относительно вертикальной линии, проходящей через центр полости. Изотермы для $\theta < 0,4$ имеют излом в сторону

боковых стенок, а изотермы для $\theta > 0,7$ представляют собой почти прямые горизонтальные линии. Увеличение значения числа Дарси до 10^{-4} усиливает интенсивность циркуляции вдоль линий тока как по часовой стрелке, так и против нее, в то время как высота изотерм увеличивается вблизи центра горизонтальных стенок полости, придавая им форму волны для $\theta < 0,4$. Дальнейшее увеличение числа Дарси приводит к росту интенсивности циркуляции вдоль линий тока, увеличению высоты изотерм и количества контуров изотерм с изломом.

На рис. 6 показаны результаты численного моделирования для тех же значений параметров потока, что и на рис. 5, но при наличии влияния вертикального магнитного поля. Картина, получаемая при изменении направления магнитного поля, очень похожа на картину, полученную для случая холодной правой стенки, т.е. интенсивность циркуляции и температурный градиент для вертикального магнитного поля довольно высоки.

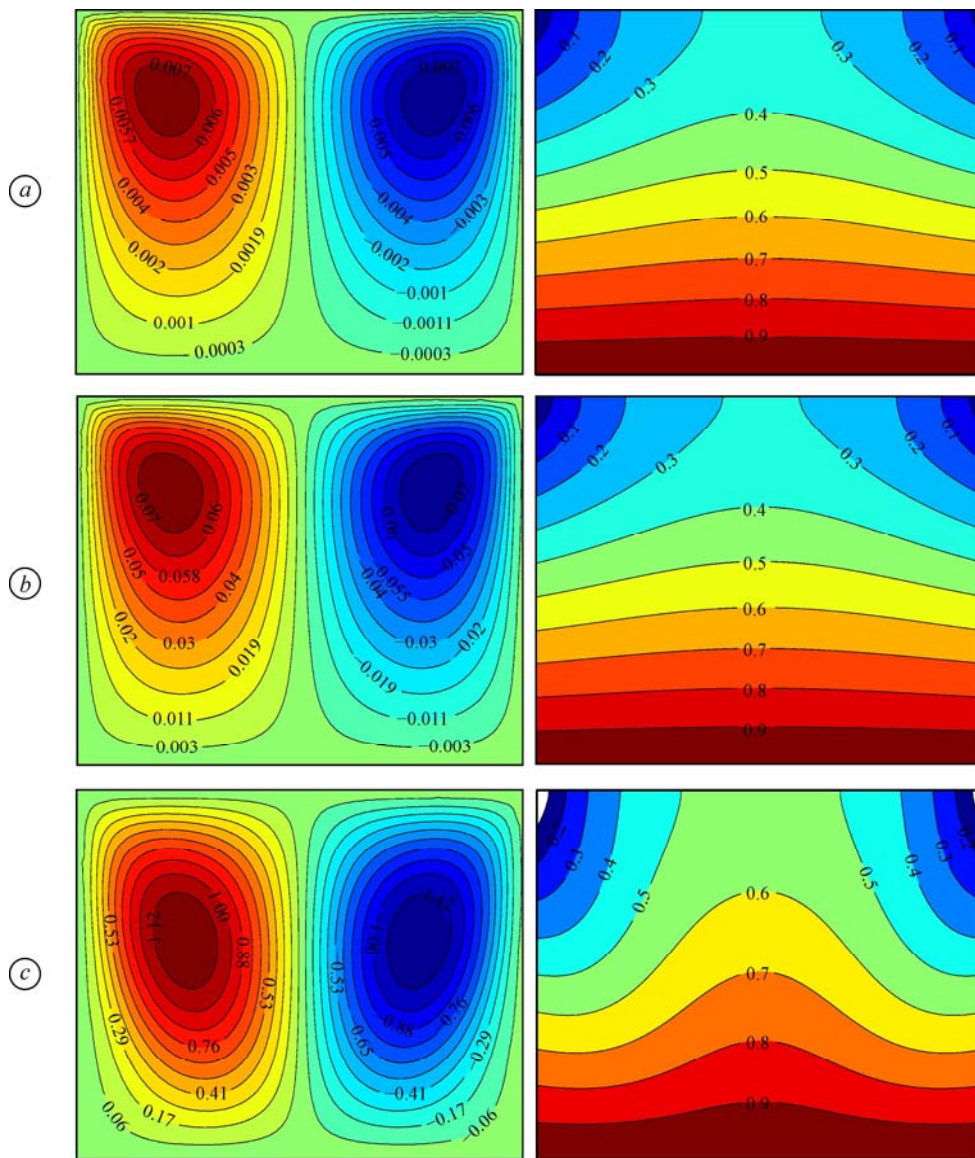


Рис. 6. Контурные изотермы и функции тока для линейно нагретой нижней стенки.

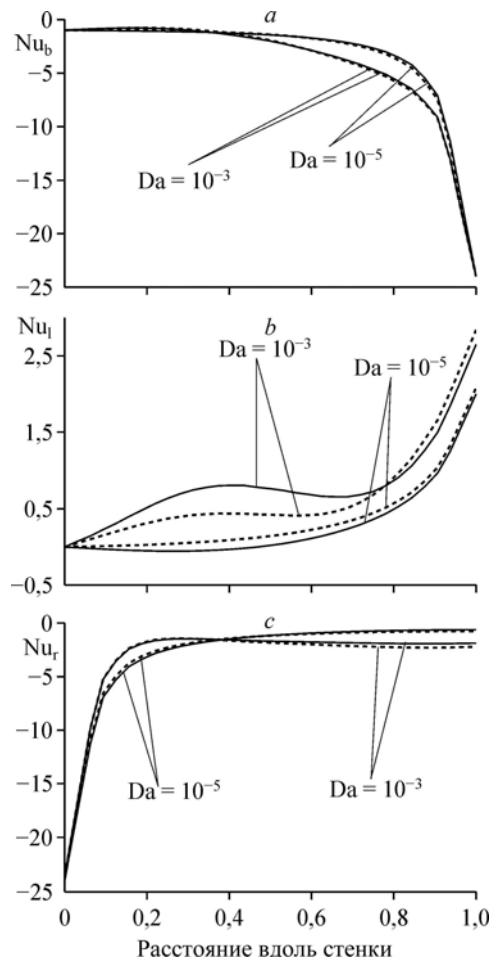
$Ra = 10^5$, $Ha = 30$, $Pr = 0,025$ (галлий), $\phi = \pi/2$; $Da = 10^{-5}$ (a), 10^{-4} (b), 10^{-3} (c).

Рис. 7. Число Нуссельта для линейно нагретой левой и равномерно нагретой нижней стенок и холодной правой стенки.

a — нижняя стенка, b — левая стенка, c — правая стенка.

Дальнейшее увеличение числа Дарси до 10^{-4} приводит к росту интенсивности циркуляции вдоль линий тока и высоты изотерм, но с меньшей скоростью (см. рис. 6*b*). Однако увеличение числа Дарси до 10^{-3} приводит к резкому увеличению интенсивности циркуляции вдоль линий тока и высоты изотерм.

На рис. 7 проиллюстрирована величина теплопередачи (локального числа Нуссельта) для случая холодной правой стенки, где верхняя стенка изолирована, нижняя — нагревается равномерно, а левая стена нагревается линейно. Кривые для числа Нуссельта построены в зависимости от расстояния вдоль стенки при наличии горизонтального (сплошная линия) и вертикального (штриховая линия) магнитных полей при $Ra = 10^5$, $Pr = 0,025$, $Na = 30$ и $Da = 10^{-5}, 10^{-3}$. Вдоль нижней стенки, как показано на рис. 7*a*, числа Дарси не оказывают существенного влияния при $X < 0,4$ и $X > 0,9$ и кривые почти совпадают для этих расстояний, в то время как между значениями 0,4 и 0,9 для малого числа Дарси наблюдается более высокая скорость переноса. Кроме того, кривые для горизонтального и вертикального магнитных полей также почти совпадают, демонстрируя незначительное влияние направления магнитного поля на скорость передачи тепла. Вдоль холодной правой стенки (рис. 7*c*) локальное число Нуссельта сначала резко возрастает при расстоянии до $Y = 0,15$, а затем темп роста немного замедляется вплоть до $Y = 0,25$. Далее кривые расположены почти горизонтально, и коэффициент теплопередачи является постоянным, в то время как при $0,15 < Y < 0,4$ более высокое число Дарси приводит к увеличению интенсивности теплоотдачи, а при $Y > 0,4$ для больших значений числа Дарси наблюдается меньший коэффициент теплопередачи. Вдоль правой холодной стенки не наблюдается существенного влияния направления магнитного поля. С другой стороны, вдоль линейно нагретой левой стенки, как показано на рис. 7*b*, вертикальное магнитное поле ($\phi = \pi/2$) дает более высокий коэффициент теплопередачи по сравнению с горизонтальным магнитным полем ($\phi = 0$) для $Da = 10^{-5}$. При $Da = 10^{-3}$ горизонтальное магнитное поле обеспечивает высокий коэффициент теплопередачи до $Y = 0,8$, после чего ситуация меняется на противоположную. Локальное число Нуссельта растет с увеличением вертикального расстояния Y до $Y = 0,8$, но с более медленной скоростью, а далее наблюдается сравнительно резкое его возрастание. Дальнейшее увеличение числа Дарси, как видно на рисунке, приводит к росту скорости теплопереноса вдоль левой стенки.



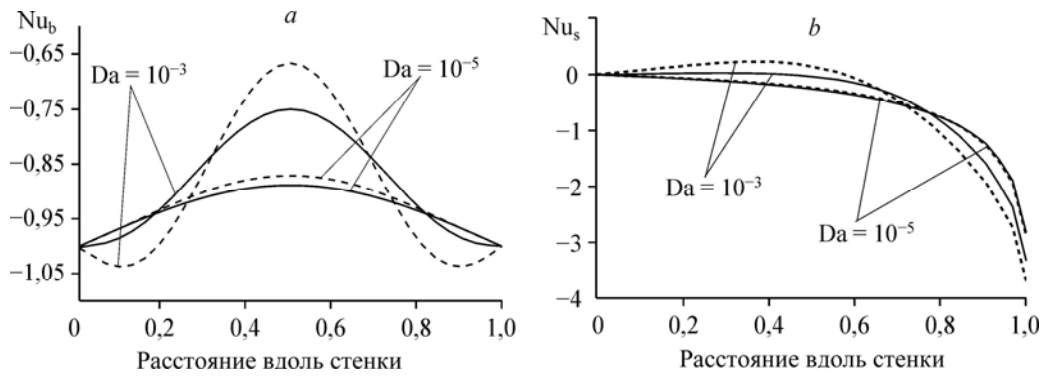


Рис. 8. Число Нуссельта для линейно нагретой правой и равномерно нагретой нижней стенок.
 а — нижняя стенка, б — боковые стенки.

На рис. 8 показано число Нуссельта вдоль нижней и боковых стенок для случая линейно нагретой правой стенки при тех же значениях прочих параметров, что и на рис. 7. Видно, что вдоль нижней стенки кривая локального числа Нуссельта при $Da = 10^{-3}$ выглядит как синусоидальная волна. Коэффициент теплопередачи сначала уменьшается до $X = 0,05$, затем увеличивается до $X = 0,5$, затем вновь снижается до $0,95$, и снова растет. Однако для $Da = 10^{-5}$ Nu растет с увеличением расстояния X до $0,5$, а затем уменьшается с увеличением расстояния. Вертикальное магнитное поле при $Da = 10^{-5}$ приводит к более высокому коэффициенту теплопередачи по сравнению с горизонтальным магнитным полем, а для $Da = 10^{-3}$ горизонтальное магнитное поле обеспечивает более высокий коэффициент теплопередачи до $X = 0,37$. Для $0,37 < X < 0,63$ вертикальное магнитное поле дает более высокий коэффициент теплопередачи по сравнению с горизонтальным полем при $Da = 10^{-5}$, а $Da = 10^{-3}$ для $\phi = 0$ обеспечивает более высокий коэффициент теплопередачи до $X = 0,37$; для $0,37 < X < 0,63$ скорость теплопередачи становится выше при вертикальном магнитном поле, чем при горизонтальном. После $X = 0,63$ число Нуссельта при горизонтальном магнитном поле вновь становится выше, чем при вертикальном. Поскольку обе боковые стенки имеют аналогичный температурный профиль линейного нагрева, то график локального числа Нуссельта для них идентичен. Следует отметить, что для $Da = 10^{-5}$ кривые числа Нуссельта для вертикального и горизонтального магнитных полей накладываются друг на друга, однако при $Da = 10^{-3}$ вертикальное магнитное поле демонстрирует более высокий коэффициент теплопередачи, чем горизонтальное магнитное поле при $Y < 0,7$, далее наблюдается обратное поведение. Таким образом, получено, что вдоль боковых стенок полости скорость теплопередачи уменьшается с увеличением вертикального расстояния Y ; при более высоких значениях числа Дарси наблюдается более высокая скорость теплопередачи до $Y = 0,75$, а затем поведение меняется на противоположное.

Рисунок 9 показывает зависимости среднего числа Нуссельта \overline{Nu} от параметра пористости Дарси (Da) для случая холодной правой стенки. На графиках видно, что средние числа Нуссельта вдоль нижней стенки уменьшаются с увеличением числа Дарси, в то время как вдоль левой стенки они возрастают с увеличением Da . Средние числа Нуссельта вдоль правой стенки сначала увеличивается до $Da = 3 \cdot 10^{-4}$, а затем уменьшаются для более высоких чисел Дарси. В то же время для определенного значения Da среднее число Нуссельта вдоль нижней, левой и правой стенок полости для горизонтального магнитного поля ($\phi = 0$) выше по сравнению с вертикальным магнитным полем ($\phi = \pi/2$).

Рис. 9. Среднее число Нуссельта на линейно нагретой левой и равномерно нагретой нижней стенках при холодной правой стенке.

a — нижняя стенка, b — левая стенка,
 c — правая стенка.

Рисунок 10 отображает среднее число Нуссельта вдоль нижней, левой и правой стенок для случая линейно нагретой правой стенки. В отличие от случая холодной стенки, из-за линейного нагрева правой стенки средние числа Нуссельта вдоль левой и правой стенок для вертикального магнитного поля получаются выше, чем для горизонтального магнитного поля при фиксированном значении числа Дарси. Вдоль нижней стенки аналогичное поведение наблюдается до $Da = 9 \cdot 10^{-4}$, далее имеет место обратное поведение среднего числа Нуссельта. Также замечено, что для $Da \leq 10^{-4}$ значения среднего числа Нуссельта для горизонтального и вертикального магнитных полей пересекаются вдоль нижней и боковой стенок полости, тогда как для $Da > 10^{-4}$ среднее число Нуссельта увеличивается с ростом числа Дарси вдоль нижней и правой стенок.

Заключение

В настоящем исследовании проведено численное моделирование двумерного ламинарного течения вязкого жидкого галлия в квадратной полости, заполненной пористой средой, находящегося под влиянием горизонтального/вертикального магнитного поля, где нижняя стенка нагревается равномерно, верхняя — идеально изолирована, левая стенка полости нагревается линейно, а правая — нагревается линейно или остается холодной. Уравнения сохранения импульса, энергии и массы, описывающие течение, решаются с помощью метода конечных элементов, а полученные нелинейные алгебраические уравнения решаются методом Ньютона. В настоящей работе приведены результаты для числа Рэлея $Ra = 10^5$, числа

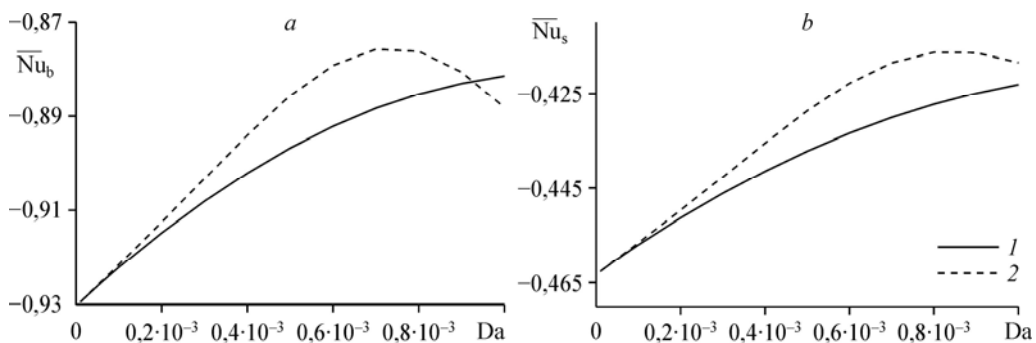
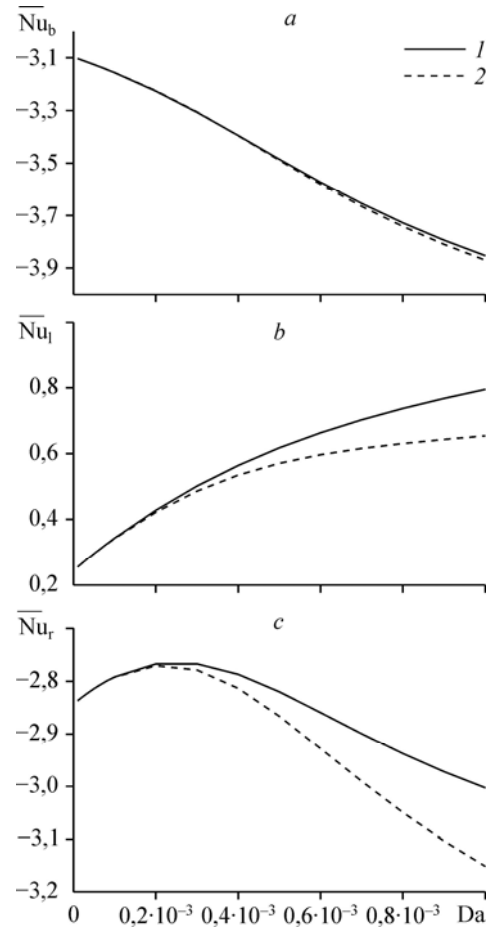


Рис. 10. Среднее число Нуссельта для линейно нагретой нижней стенки вдоль нижней (a) и боковых (b) стенок.

$\phi = 0$ (1), $\pi/2$ (2).

Прандтля $Pr = 0,025$ (галлий), числа Гартмана $Ha = 30$ и $10^{-5} < Da < 10^{-3}$, а также рассмотрены два угла наклона для магнитного поля $\phi = 0$ и $\pi/2$. Сделан вывод о том, что увеличение числа Дарси (Da) приводит как к росту интенсивности циркуляций вдоль линий тока, так и к увеличению высоты изотерм в полости. Вертикальное направление магнитного поля снижает скорость нарастания до $Da = 10^{-4}$, а дальнейший рост числа Дарси вызывает увеличение скорости нарастания интенсивности циркуляции вдоль линий тока и высоты изотерм. С увеличением расстояния X локальное число Нуссельта Nu уменьшается вдоль нижней стенки при холодной правой стенке. Когда правая стенка подвергается линейному нагреву, оно демонстрирует синусоидальное поведение вдоль нижней стенки. В то же время число Нуссельта уменьшается с увеличением вертикального расстояния Y вдоль боковых стенок, когда правая стенка считается нагретой линейно. В случае холодной правой стенки Nu увеличивается вдоль левой стенки; вдоль правой стенки Nu сначала резко увеличивается, а затем становится почти постоянным. Более высокие средние числа Нуссельта наблюдаются при линейно нагретой правой стенке под влиянием вертикального магнитного поля по сравнению со случаем горизонтального, где среднее число Нуссельта возрастает вдоль нижней и боковых стенок с увеличением числа Дарси. В то же время для холодной правой стенки среднее число Нуссельта уменьшается с увеличением числа Дарси вдоль нижней и правой стенок полости, а его увеличение вдоль левой стенки при наличии горизонтального магнитного поля демонстрирует более высокие средние числа Нуссельта по сравнению с вертикальным магнитным полем.

Т. Джавед выражает благодарность Комитету высшего образования Пакистана за поддержку исследования в рамках “Национальной исследовательской программы для университетов” (проект № 3713).

Список литературы

1. **Pop I., Ingham D.B.** Convective heat transfer: mathematical and computational modelling of viscous fluid and porous media. Oxford: Pergamon, 2001. 652 p.
2. **Nield D.A., Bejan A.** Convection in porous media. 3rd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 2006. 640 p.
3. **Martynenko O., Khrantsov P.** Free-convective heat transfer. Berlin: Springer, 2005. 519 p.
4. **Braunfurth M.G., Skeldon A.C., Juel A., Mullin T., Riley D.S.** Free convection in liquid gallium // J. of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 342. P. 295–314.
5. **Ben-David O., Levy A., Mikhailovich B., Azulay A.** Gallium melting in a rectangular box // Proc. of the 15th Intern. Heat Transfer Conf., Koyoto, Japan. 2014. P. 8539–8552.
6. **Yamanaka Y., Kakimoto K., Ozoe H., Churchill S.W.** Rayleigh–Benard oscillatory natural convection of liquid gallium heated from below // Chemical Engng J. 1998. Vol. 71. P. 201–205.
7. **Sathiyamoorthy M., Chamkha A.** Effect of magnetic field on natural convection flow in a liquid gallium filled square cavity for linearly heated side wall(s) // Int. J. Thermal Sci. 2010. Vol. 49. P. 1856–1865.
8. **Mohamad A.A., Viskanta R.** Flow structures and heat transfer in a lid-driven cavity filled with liquid gallium and heated from below // Experimental Thermal and Fluid Sci. 1994. Vol. 9. P. 309–319.
9. **Javed T., Siddiqui M.A., Mehmood Z., Pop I.** MHD natural convective flow in an isosceles triangular cavity filled with porous medium due to uniform/non-uniform heated side walls // Zeitschrift für naturforschung A. 2015. Vol. 70. P. 919–928.
10. **Revic C., Grosan T., Pop I., Ingham D.B.** Magnetic field effect on the unsteady free convection flow in a square cavity filled with a porous medium with a constant heat generation // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 54. P. 1734–1742.
11. **Jiang C., Shi E., Hu Z., Zhu X., Xie N.** Numerical simulation of thermomagnetic convection of air in a porous square enclosure under a magnetic quadrupole field using LTNE models // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 91. P. 98–110.
12. **Gray D.D., Giorgini A.** The validity of Boussinesq approximation for liquid and gases // Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. Vol. 19. P. 545–551.
13. **Davidson P.A.** An introduction to magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 431 p.
14. **Hannoun N., Alexiades V., Mai T.Z.** Resolving the controversy over tin and gallium melting in a rectangular cavity heated from the side // Numerical Heat Transfer. 2003. Vol. 44. P. 253–276.
15. **Reddy J.N., Gartling D.K.** The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. Florida: CRC-Press, 1994. 390 p.
16. **Loret B., Huyghe J.M.** Chemo-Mechanical coupling in porous media geomechanics and biomechanics. Wien–N.Y.: Springer-Verlag, 2004. 382 p.

Статья поступила в редакцию 22 августа 2017 г.,
после переработки – 9 октября 2017 г.