меньше, а при $\nu > 1$ больше, чем интенсивность ударной волны, отраженной от поверхности абсолютно жесткого тела.

В предельном случае малой интенсивности падающей ударной волны, что соответствует звуковому приближению, линеаризируя и разрешая уравнение (7), получим выражение для коэффициента отражения слабой волны давления от горящей поверхности, которое обсуждалось в [2]

$$\frac{p_3-p_2}{p_2-p_1}\approx\frac{1+\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{\rho_0^2U^2}{\rho^2c^2}+\left[\gamma\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(\nu-1)-\frac{\rho}{\rho_0}\right]\frac{\rho_0U}{\rho c}}{1+\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{\rho_0^2U^2}{\rho^2c^2}-\left[\gamma\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(\nu-1)-\frac{\rho}{\rho_0}\right]\frac{\rho_0U}{\rho c}}$$

($c$—скорость звука в газе)

Следует отметить, что в нестационарных условиях, какими являются условия отражения ударной волны, закон горения вида (1) может не выполняться, несмотря на это вывод о характере отражения ударной волны от горящей поверхности при различных значениях $\nu$ будет справедлив асимптотически при больших $t$.

Поступила 13 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. Акустическая проводимость жесткой горящей поверхности. ПМТФ, 1961, вып. 6.

# ВЛИЯНИЕ АРХИМЕДОВЫХ СИЛ НА ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ТЕПЛООТДАЧУ В КАНАЛЕ, ОБРАЗОВАННОМ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ, ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

***Э. П. Зимин***

(*Москва*)

Рассматривается процесс конвективной теплоотдачи в зазоре между нагретыми до разной температуры вертикальными коаксиальными вращающимися цилиндрами при наличии осевого движения жидкости. Если число Грасгоффа сравнимо по порядку величины с единицей

$$G=\frac{g\beta T_0 l^3\rho^2}{\mu^2}\sim 1$$

(здесь $g$ — ускорение силы тяжести, $T_0$ — характерное значение температуры, $l$ — линейный характерный размер, $\rho$, $\mu$ и $\beta$ — плотность, динамическая вязкость и коэффициент теплового расширения жидкости), то архимедовы силы будут оказывать влияние на движение жидкости между цилиндрами.

Уравнение количества движения в рассматриваемом случае содержит член, характеризующий наличие архимедовых сил

$$\rho(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w}=-\nabla p^\circ+\mu\nabla\mathbf{w}+\mathbf{k}g\rho\beta T$$

Здесь $\mathbf{k}$ — орт, направленный вертикально вверх, $\mathbf{w}$ и $p^\circ$ — скорость и давление, соответственно.

Если течение предполагается полностью развившимся, то оно будет осесимметричным ($\partial/\partial\varphi\equiv 0$) и радиальная составляющая скорости равна нулю ($w_r=0$).

Проектируя тогда уравнение количества движения и уравнение неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{w}=0$ на оси $r$, $\varphi$, $z$, получаем

$$\rho w_z\frac{\partial w_\varphi}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial r}-\frac{w_\varphi^2}{r}+\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial p^\circ}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)+g\rho\beta T$$

$$\rho\frac{w_\varphi^2}{r}=\frac{\partial p^\circ}{\partial r},\qquad\frac{\partial w_z}{\partial z}=0$$

(ось $z$ совпадает с осью цилиндров)

Уравнение теплопередачи имеет вид

$$\rho c w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu\left[\left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)^2\right]$$

Выберем в качестве характерных параметров: для скорости — $r_1\omega_1$, для давления — $\rho r_1^2\omega_1^2$, для температуры — $T_0$, для линейных размеров — $r_1$ ($\omega_1$ — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра). Тогда можно ввести следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = \frac{r}{r_1}, \quad \zeta = \frac{z}{r_1}, \quad v = \frac{w_\varphi}{r_1\omega_1}, \quad u = \frac{w_z}{r_1\omega_1}, \quad p = \frac{p^\circ}{\rho r_1^2\omega_1^2}$$

$$\varphi = \frac{T}{T_0}, \quad R = \frac{\rho r_1^2\omega_1}{\mu}, \quad P = \frac{\mu c}{\lambda}, \quad G = \frac{g\beta T_0 r_1^3\rho^2}{\mu^2}, \quad M = \frac{cT_0}{r_1^2\omega_1^2}$$

и систему уравнений представить в безразмерном виде

$$u\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{R}\left(\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi}\right) + \frac{G}{R^2}\varphi \tag{2}$$

$$\frac{v^2}{\xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{3}$$

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{1}{RP}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}\right) + \frac{1}{RM}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2\right] \ldots \tag{4}$$

Здесь $R$ — число Рейнольдса, $P$ — число Прандтля, $G$ — число Грасгоффа.

Если пренебречь вязкой диссипацией, которая в уравнении (4) учитывается членом в квадратных скобках, то при условии постоянства тепловых потоков через стенки цилиндров профили температуры будут подобны во всех сечениях, а температура вдоль канала будет изменяться по линейному закону

$$\varphi = A\zeta + \theta(\xi) \tag{5}$$

Очевидно, это положение можно трактовать как условие постоянства осевого градиента температуры цилиндров $AT_0 / r_1$.

Если решение имеет структуру вида (5), то можно найти точное решение системы (1)—(4).

Подставляя (5) в (2) и учитывая, что $u$ является функцией только от $\xi$, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = C_1 + \frac{GA}{R^2}\zeta$$

Тогда

$$p = S(\xi) + \frac{GA}{2R^2}\zeta^2 + C_1\zeta \tag{6}$$

Связь постоянной $C_1$ с давлением $p_2$ в фиксированном сечении $\zeta_2$ определяется из граничных условий: $p = p_1$ при $\zeta = 0$ и $p = p_2$ при $\zeta = \zeta_2$

$$C_1 = \frac{p_2 - p_1}{\zeta_2} - \frac{GA\zeta_2}{2R^2} \tag{7}$$

Так как $\partial p / \partial \xi$ является функцией только от $\xi$, то из уравнения (3) следует, что $v = v(\xi)$. Следовательно, внутреннее тепловыделение (вязкая диссипация) не зависит от $\zeta$, т. е. точное решение системы (1) — (4) вида (5) справедливо и при учете вязкой диссипации в уравнении (4).

Тогда уравнение (1) приводится к уравнению Эйлера

$$\xi^2 v'' + \xi v' - v = 0$$

(здесь и далее штрих означает дифференцирование по $\xi$), решение которого имеет вид

$$v = C_2\xi + \frac{C_3}{\xi} \tag{8}$$

Если $\omega_2$ — окружная скорость внешнего цилиндра, то граничные условия имеют вид

$$v(1) = 1, \qquad v(\eta) = \varepsilon\eta \qquad \left(\varepsilon = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta = \frac{r_2}{r_1}\right)$$

Тогда

$$C_2 = \frac{\varepsilon\eta^2 - 1}{\eta^2 - 1}, \qquad C_3 = \frac{\eta^2(1 - \varepsilon)}{\eta^2 - 1}$$

Подставляя (8) в (3), получаем

$$S(\xi) = C_2^2 \frac{\xi^2}{2} + 2C_2C_3 \ln \xi - \frac{C_3^2}{2\xi^2} + p_0 - \frac{C_2^2\xi_0}{2} - 2C_2C_3 \ln \xi_0 + \frac{C_3^2}{2\xi_0^2}$$

Здесь $p_0$ — давление на радиусе $\xi_0$ в сечении $\zeta = 0$.

Используя (5), (6) и (8), представляем уравнения (2) и (4) в следующем виде:

$$C_1 R = u'' + \frac{1}{\xi} u' + \frac{G}{R} \theta \qquad (9)$$

$$uA = \frac{1}{RP} \left(\theta'' + \frac{1}{\xi} \theta'\right) + \frac{1}{RM} \left(\frac{4C_3^2}{\xi^4} + u'^2\right) \qquad (10)$$

Если $A \neq 0$, то, опуская диссипативные члены в уравнении (10), систему (9)—(10) можно привести к линейному уравнению четвертого порядка

$$\xi^3 \theta^{(4)} + 2\xi^2\theta''' - \xi\theta'' + \theta' + GPA \left(\theta - \frac{R^2C_1}{G}\right) \xi^3 = 0$$

Если $A < 0$, то решение этого уравнения имеет вид [1]

$$\theta - \frac{R^2C_1}{G} = K_1 J_0 (a\xi) + K_2 Y_0 (a\xi) + K_3 J_0 (ai\xi) + K_4 Y_0 (ai\xi) \qquad (11)$$

где $J_0$ и $Y_0$ — функции Бесселя первого и второго рода, соответственно, и нулевого порядка, $a^4 = - GPA$.

Подставляя (11) в (9), находим решение для осевой скорости

$$u = - \frac{a^2}{ARP} [K_1 J_0 (a\xi) + K_2 Y_0 (a\xi) - K_3 J_0 (ai\xi) - K_4 Y_0 (ai\xi)]$$

Для определения пяти констант интегрирования $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ и $C_1$ используем четыре граничных условия

$$u(1) = 0, \quad u(\eta) = 0; \qquad \theta(1) = \theta_1, \quad \theta(\eta) = \theta_2 \qquad \text{при } \zeta = \zeta_0$$

(здесь $\zeta_0$ — некоторое фиксированное значение $\zeta$) и связь полного объемного расхода жидкости через канал со средней скоростью

$$\frac{Q}{\pi r_1^3 \omega_1 (\eta^2 - 1)} = \frac{2}{\eta^2 - 1} \int_1^\eta \xi u \, d\xi \qquad (12)$$

Если $A = 0$ и вязкой диссипацией можно пренебречь, то решение системы (9) — (10) имеет следующий вид:

$$\theta = C_5 \ln \xi + C_6, \qquad C_5 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ln \eta}, \qquad C_6 = \theta_1$$

$$u = - \frac{GC_5}{4R} \xi^2 \ln \xi + \frac{\alpha}{4} \xi^2 + C_7 \ln \xi + C_8$$

$$\alpha = C_1 R + \frac{GC_5}{R} - \frac{GC_6}{R}, \qquad C_7 = \frac{1}{\ln \eta} \left[\frac{GC_5}{4R} \eta^2 \ln \eta - \frac{\alpha}{4} (\eta^2 - 1)\right], \qquad C_8 = - \frac{\alpha}{4}$$

Если в уравнении (10) удержать первый член вязкой диссипации, характеризующий вязкие потери при азимутальном движении жидкости, то решение для $\theta$ и $u$ несколько усложняется ($A = 0$)

$$\theta = - \frac{PC_3^2}{M\xi^2} + C_9 \ln \xi + C_{10}, \qquad C_9 = C_5 + \frac{PC_3^2}{M \ln \eta} \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right), \qquad C_{10} = \theta_1 + \frac{PC_3^2}{M}$$

$$u = - \frac{GC_5}{4R} \xi^2 \ln \xi + \frac{\alpha}{4} \xi^2 + C_{11} \ln \xi + C_8 + \frac{GPC_3^2}{2RM} (\ln \xi)^2$$

$$C_{11} = C_8 - \frac{GPC_3^2}{2RM} (\ln \eta)^2$$

Поступила 2 XI 1961

## ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.