УДК 532.511 : 534.222

АКУСТИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ВОЛНОВОДНОМ СЛОЕ С ПРОДОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

М. А. Бисярин

Научно-исследовательский институт радиофизики Санкт-Петербургского государственного университета, 198504 Санкт-Петербург
E-mail: bisyarin@niirf.spbu.ru

Рассмотрено распространение слабонелинейного акустического импульса в слабоизогнутом волноводном слое, сильнонеоднородном в поперечном направлении и слабонеоднородном в продольном направлении. Исходная система уравнений гидродинамики сведена к нелинейному волновому уравнению, коэффициенты которого определены с использованием уравнения состояния среды. Установлено, что при переходе показателя адиабаты через значение $\gamma = 3/2$ характер процесса распространения импульса меняется: при бо́льших значениях γ среда является фокусирующей, при меньших — дефокусирующей. Показано, что процесс распространения импульса характеризуется тремя масштабами: высокочастотное заполнение модулируется огибающей, эволюцию которой, в свою очередь, формируют средняя по скорости эволюция фазы огибающей и медленное изменение амплитуды. Для огибающей импульса выведено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Для определенных типов продольной неоднородности построено явное солитонное решение этого уравнения.

Ключевые слова: акустический импульс, нелинейное волновое уравнение, показатель адиабаты, нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами, солитон огибающей.

Введение. При решении задач нелинейной акустики применяются методы и результаты теории нелинейных волн [1, 2]. Для описания волновых процессов используются модельные нелинейные уравнения, а звуковые пучки и импульсы представляют собой сосредоточенные решения этих уравнений. Общие вопросы теории сосредоточенных нелинейных волн рассматриваются в монографиях [3, 4]. Изучению нелинейной акустики посвящены работы [5, 6], в монографии [7] подробно изложены математические методы, применяемые при исследовании задач гидродинамики.

Основными особенностями нелинейных волновых процессов являются нарушение принципа суперпозиции и зависимость свойств среды от распространяющегося возмущения. Упругие волны могут взаимодействовать с возмущениями неакустического характера, при этом образуются связанные волны. Например, в атмосфере имеет место нелинейное взаимодействие акустических и внутренних гравитационных волн [8]. Изменение свойств среды при прохождении волны может вызвать другой нелинейный эффект — самолокализацию мощных гравитационно-акустических импульсов в ионосфере [9].

В нелинейной акустике особый интерес представляют слоистые среды и волноводы, так как в них возможно направленное распространение акустических волн. Процессы раз-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-02-16176).

личной физической природы, происходящие в слоистых средах, изучались в [10]. Исследовались также звуковые волны конечной амплитуды в волноводах с непрямоугольным сечением [11] и в цилиндрических волноводах [12]. Кроме того, рассматривались вопросы устойчивости нелинейных импульсов в волноводах [13]. В [10–13] предполагалась независимость свойств среды от координаты волны.

В задачах нелинейной акустики, как правило, рассматриваются волны в среде со слабой дисперсией. Поэтому, накапливаясь, нелинейные искажения могут привести к увеличению крутизны фронта и значительному изменению характера волнового процесса. Однако это происходит не всегда. Рассмотрим задачу Коши для простейшего модельного уравнения теории нелинейных волн $\partial u/\partial t + c(u)\,(\partial u/\partial x) = 0$, $u(x,0) = f(x)$. Если функция $F(x) = c(f(x))$ монотонно возрастает, то разрывы не образуются [2]. Эволюция амплитуды и формы звукового пучка, обусловленная сильной нелинейностью, затуханием и дифракцией, описывается уравнением Хохлова — Заболотской — Кузнецова [6], а если пучок однороден в поперечном направлении, — уравнением Бюргерса. Совместное действие нелинейности и дисперсии может привести к установлению стационарного режима распространения возмущения. В данной работе исследуется слабая нелинейность, при этом возможно образование солитонов огибающей при распространении модулированных по амплитуде высокочастотных колебаний.

1. Нелинейные свойства среды. Вывод нелинейного волнового уравнения. Рассматривается распространение акустических импульсов в непрерывно-слоистой среде, например в атмосфере, равновесное распределение плотности которой (а также скорости звука) зависит от высоты. Особые каналы распространения инфразвуковых импульсов возникают также в зоне полярного сияния [14]. Исследуется градиентный слой, т. е. слой, в котором локализация волнового поля происходит за счет поперечного распределения скорости звука. Ниже установлен вид такого распределения.

Предположим, что осевая линия слоя задана некоторой формулой и характеризуется известной кривизной $\tilde{\varkappa}(s)$. В этом случае естественно ввести координаты s (длина кривой, отсчитываемая от некоторой заданной точки) и n (расстояние вдоль нормали к кривой). Распространение акустических волн описывается системой уравнений Эйлера

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\tilde{\varkappa}}{1+n\tilde{\varkappa}}\,\rho v_n + \frac{\partial}{\partial n}\,(\rho v_n) + \frac{1}{1+n\tilde{\varkappa}}\,\frac{\partial}{\partial s}\,(\rho v_s) = 0,\\ \rho\Big(\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{1+n\tilde{\varkappa}}\,v_s\,\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\,\frac{\partial v_s}{\partial n}\Big) + \frac{1}{1+n\tilde{\varkappa}}\,\frac{\partial p}{\partial s} = 0,\\ \rho\Big(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{1}{1+n\tilde{\varkappa}}\,v_s\,\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n\,\frac{\partial v_n}{\partial n}\Big) + \frac{\partial p}{\partial n} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь v_s, v_n — продольная и нормальная составляющие поля скоростей; ρ — плотность; p — давление. Отклонение плотности от равновесного значения выражается через отклонение давления с помощью уравнения состояния

$$\rho = \rho_0 + (p-p_0)/c_0^2 + \alpha_2(p-p_0)^2/2 + \alpha_3(p-p_0)^3/6 + O((p-p_0)^4), \tag{2}$$

где $\alpha_2 = (\partial^2\rho/\partial p^2)_0$; $\alpha_3 = (\partial^3\rho/\partial p^3)_0$.

Из исходной системы (1) путем линеаризации может быть выведено волновое уравнение [15]. В нелинейном случае, когда звуковая волна изменяет свойства среды, система уравнений Эйлера также может быть упрощена.

В работах [11–13] описание прохождения импульсов по акустическим волноводам основано непосредственно на системе уравнений Эйлера или Навье — Стокса. Вместе с тем представляет интерес модельное уравнение, являющееся обобщением линейного волнового уравнения [15] и позволяющее четко определить специфику волнового движения.

Рассмотрим самовоздействие плоской волны

$$p = p_0 + P_* \,\mathrm{e}^{i(ks-\omega t)}, \qquad v_s = V\,\mathrm{e}^{i(ks-\omega t)}, \qquad v_n = 0 \tag{3}$$

в плоскопараллельном слое ($\tilde{\varkappa}(s) = 0$) без учета возбуждения высших гармоник. С помощью формулы (2) из системы (1) исключим неизвестную функцию ρ, а затем подставим выражения (3) в (1). Первое уравнение в (1) продифференцируем по времени, второе — по координате s, после чего вычтем одно из другого. Среди нелинейных членов выделим такие, у которых экспоненциальный множитель имеет вид (3): именно эти слагаемые описывают самовоздействие волны. Преобразовывая их с использованием результатов линейной теории, приходим к следующему выводу: влияние нелинейности на рассматриваемый процесс проявляется в том, что скорость распространения возмущения зависит от амплитуды волны, иными словами, давление оказывается подчиненным нелинейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} - \frac{1 + \lambda |P_*|^2}{c_0^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

где

$$\lambda = \alpha_3 c_0^2/2 - \alpha_2/\rho_0 - 1/(\rho_0^2 c_0^4).$$

Уравнение (4) обобщает волновое уравнение линейной акустики на случай волн конечной амплитуды.

При $\lambda > 0$ среда является фокусирующей, при $\lambda < 0$ — дефокусирующей. В случае идеальной адиабатичности процесса распространения звука:

$$\lambda = (2 - 1/\gamma - 3/\gamma^2)/(2p_0^2),$$

чтобы среда была фокусирующей, показатель адиабаты γ должен быть больше 3/2 [16–18]. Как отмечено в [9, 13], условие $\lambda > 0$ редко удовлетворяется в акустике газов. Этим акустическая задача отличается от задачи о распространении электромагнитных импульсов в среде с нелинейной поляризуемостью [19], для которой из системы уравнений Максвелла выводится уравнение, аналогичное (4), но в которой коэффициент Керра λ для большинства веществ положителен.

Для газов дефокусирующее действие среды, обусловленное уравнениями гидродинамики, может быть компенсировано лишь достаточно сильной зависимостью в линейном приближении скорости звука от давления ($\alpha_2 = -(2/c_0^3)\,\partial c_0/\partial p$). В акустике жидкостей используется эмпирическое уравнение состояния Тэта [6], аналогичное уравнению Пуассона. В этом уравнении $\gamma > 3/2$, например, для воды $\gamma = 6{,}1$. Это означает, что большинство жидкостей являются акустически фокусирующими средами.

Для плоской волны (3), рассмотренной при выводе (4), $|P_*|^2 = \langle (p+\bar{p})^2 \rangle/2$, где угловые скобки означают осреднение по периоду волны. Тогда уравнение (4) можно обобщить на случай возмущений произвольной формы, а также на случай большего числа пространственных координат ($\partial^2/\partial s^2$ заменяется на оператор Лапласа Δ). Таким образом, изучая распространение импульсов конечной амплитуды, можно свести исходную систему уравнений (1) к нелинейному волновому уравнению, в котором скорость распространения волны зависит от среднего значения квадрата возмущения давления за период в соответствии с уравнением (4).

2. Формулировка задачи и представление решения. Целью данной работы является изучение эволюции короткого импульса, распространяющегося в градиентном слое. По аналогии с электромагнитными процессами введем функцию $w^{1/2}(s, n, p) = c_0/c$ ($c_0 = \mathrm{const}$; c — локальная скорость звука), которую будем называть акустическим показателем преломления среды. Будем считать, что рассматриваемый волноводный слой сильнонеоднороден по поперечной координате и слабонеоднороден по продольной. Процесс распространения импульса предполагается слабонелинейным, поэтому амплитуда возмущения считается величиной порядка малого параметра ε. Слабая продольная неоднородность характеризуется параметром ε^2, т. е. w зависит от медленной переменной $\sigma = \varepsilon^2 s$. Из соображений, изложенных в п. **1**, следует, что

$$w = \beta^2(n,\sigma) + \alpha(n,\sigma)\langle p^2\rangle/2 + i\varepsilon^3\Gamma(\sigma). \tag{5}$$

Положительная мнимая часть показателя преломления служит для формального учета диссипации энергии в среде, иными словами, $\varepsilon^3\Gamma(\sigma)$ — коэффициент поглощения. Предположим также, что осевая линия волновода слабоизогнута, так что ее кривизна равна $\varepsilon^2\varkappa(\sigma)$. Тогда исходная система уравнений Эйлера (1) сводится к уравнению для функции $p(s,n,t)$ — отклонения давления от равновесного значения при прохождении акустического импульса:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} + \frac{\varepsilon^2\varkappa(\sigma)}{1+\varepsilon^2\varkappa(\sigma)n}\,\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{(1+\varepsilon^2\varkappa(\sigma)n)^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2\varkappa(\sigma)n}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2\varkappa(\sigma)n}\,\frac{\partial p}{\partial s} - {}$$
$$- \Big(\frac{1}{2}\,\alpha(n,\sigma)\langle p^2\rangle + \beta^2(n,\sigma) + i\varepsilon^3\Gamma(\sigma)\Big)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Так как волновое поле должно быть сосредоточено в окрестности оси слоя, уравнение (6) следует дополнить асимптотическим граничным условием

$$\lim_{n\to\pm\infty} p = 0. \tag{7}$$

Далее показано, что это требование может быть выполнено за счет зависимости линейной части функции w от координаты n, т. е. за счет сильной поперечной неоднородности слоя.

В настоящей работе процесс распространения акустического импульса последовательно разделяется на более быстрый и простой (эволюция быстрой фазы) и более медленный и сложный (эволюция огибающей) процессы, кроме того, приводится асимптотическое описание обоих процессов. При этом оказывается, что эволюция огибающей характеризуется двумя масштабами, учитывающими эволюцию фазы огибающей и медленное изменение ее амплитуды.

Выберем представление для решения уравнения (6). Рассматривается слабонелинейный случай, поэтому амплитуда волны полагается величиной порядка ε. Кроме того, предположим, что в старшем порядке решение является одномодовым, другие моды и высшие гармоники имеют амплитуды более высокого порядка малости.

Форма решения должна учитывать характер волны, бегущей вдоль оси волновода, поэтому в (6) естественно ввести фазовые переменные

$$\theta = Q(\sigma)/\varepsilon - \varepsilon t, \qquad \theta_m^{(l)} = Q_m^{(l)}(\sigma)/\varepsilon - \varepsilon t,$$
$$m = 1,2,\dots, \qquad l = 0,1,\dots,K-1,$$

где $Q(\sigma)$, $Q_m^{(l)}(\sigma)$ — вещественные функции, определяемые в ходе решения задачи; K — число распространяющихся без затухания мод; индекс m — номер гармоники, l — номер моды. Фаза θ является одной из функций $\theta_1^{(l)}$, т. е. $\theta = \theta_1^{(k)}$ (k — фиксированный номер).

Исследование возбуждения высших гармоник и других мод выходит за рамки данной работы, тем не менее искомую функцию запишем в форме, предусматривающей возможность учета этих эффектов. Решение задачи (6), (7) будем искать в виде

$$p = \varepsilon P(n,\theta,\sigma,\varepsilon)\exp\left[i(\varepsilon^{-1}\theta+\varepsilon^{-2}Q_1(\sigma))\right]+\varepsilon\bar{P}(n,\theta,\sigma,\varepsilon)\exp\left[-i(\varepsilon^{-1}\theta+\varepsilon^{-2}Q_1(\sigma))\right]+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l=0\\ l\neq k \text{ при } m=\pm 1}}^{K-1} p_m^{(l)}(n,\theta_m^{(l)},\sigma,\varepsilon)\exp\left[im(\varepsilon^{-1}\theta_m^{(l)}+\varepsilon^{-2}Q_{1m}^{(l)}(\sigma))\right], \quad (8)$$

причем для того, чтобы функция p была вещественной, должны выполняться соотношения $p_{-m}^{(l)}(n,\theta_{-m}^{(l)},\sigma,\varepsilon)=\bar{p}_m^{(l)}(n,\theta_m^{(l)},\sigma,\varepsilon)$, $\theta_{-m}^{(l)}=\theta_m^{(l)}$. Здесь $Q_{1(-m)}^{(l)}(\sigma)=Q_{1m}^{(l)}(\sigma)$ — вещественные функции. В (8) комплексные амплитуды разлагаются в асимптотические ряды по степеням ε:

$$P=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j P_j(n,\theta,\sigma), \qquad p_m^{(l)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j p_{mj}^{(l)}(n,\theta_m^{(l)},\sigma), \quad (9)$$

а учет (7) требует выполнения в окрестности оси волновода соотношений $P \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, $p_m^{(l)} \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

В процессе распространения доминирующей является мода k. Именно ее характеристики определяются в ходе решения задачи.

3. Фазовые функции и поперечное распределение волнового поля. Вычислим $\langle p^2\rangle$. Выражение для p^2 надо проинтегрировать по промежутку $[\theta,\theta+2\pi\varepsilon]$ и разделить результат на длину интервала. Формула (5) преобразуется к виду

$$w=\beta^2(n,\sigma)+\varepsilon^2\alpha(n,\sigma)|P|^2+\varepsilon^3\pi\frac{\partial}{\partial\theta}|P|^2+i\varepsilon^3\Gamma(\sigma)+O(\varepsilon^4). \quad (10)$$

Подставим главную моду представления (8) в уравнение (6), записанное с использованием (10), (9). Затем приравняем к нулю слагаемые при одинаковых степенях ε и введем следующие обозначения: $Q_1'(\sigma)=q_1(\sigma)$, $Q'(\sigma)=q(\sigma)$, $r(\sigma)=q(\sigma)+q_1(\sigma)$.

Комплексная амплитуда импульса $P(n,\theta,\sigma,\varepsilon)$ в старшем порядке по ε определяется задачей Штурма — Лиувилля по переменной n с параметрами σ и θ:

$$LP_0\equiv\frac{\partial^2 P_0}{\partial n^2}+(\beta^2(n,\sigma)-r^2(\sigma))P_0=0, \qquad \lim_{n\to\pm\infty}P_0=0. \quad (11)$$

Здесь $r^2(\sigma)$ — собственное число; $P_0(n,\theta,\sigma)$ — собственная функция. Если $\beta^2(n,\sigma)$ непрерывна при всех n и $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\beta^2(n,\sigma)=-\infty$, то существует бесконечное множество собственных значений $r_l^2(\sigma)$, причем все они простые и могут быть записаны в виде последовательности $r_0^2(\sigma)>r_1^2(\sigma)>r_2^2(\sigma)>\ldots>r_l^2(\sigma)\to-\infty$ [20]. Каждая собственная функция имеет l нулей, и существуют интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|P_{0l}|^2\,dn, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\partial P_{0l}}{\partial n}\Big)^2dn, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta^2(n,\sigma)|P_{0l}|^2\,dn.$$

При определенных значениях $\beta^2(n,\sigma)$ в задаче (11) имеется K положительных собственных чисел, которые соответствуют не затухающим по σ модам. Доминирующая мода в (8) взята из числа этих мод и определяется из задачи (11) собственным числом и функцией с номером k.

Вид оператора L позволяет представить искомую функцию P_0 в виде

$$P_0(n,\theta,\sigma) = V(n,\sigma)F(\theta,\sigma),$$

где $V(n,\sigma)$ — вещественная функция, нормированная условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} V^2(n,\sigma)\,dn = 1.$$

Функция P_0 представляет собой поперечное распределение поля, медленно меняющееся вдоль волновода. Комплексная функция $F(\theta,\sigma)$ описывает огибающую доминирующей моды, а значит, в первом приближении — огибающую всего импульса. В дальнейшем будем называть эту функцию огибающей импульса.

Следующий член разложения (9) определяется из неоднородной задачи

$$LP_1 = 2i(\beta^2(n,\sigma) - q(\sigma)r(\sigma))\,\frac{\partial P_0}{\partial\theta}, \qquad \lim_{n\to\pm\infty} P_1 = 0,$$

условие разрешимости которой позволяет вычислить $q(\sigma)$:

$$q(\sigma) = r(\sigma) + \frac{1}{r(\sigma)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\partial V}{\partial n}\Big)^2\,dn. \qquad (12)$$

Обозначив через $W(n,\sigma)$ исчезающее при $n\to\pm\infty$ решение уравнения

$$LW = (\beta^2(n,\sigma) - q(\sigma)r(\sigma))V(n,\sigma),$$

функцию P_1 представим в виде

$$P_1(n,\theta,\sigma) = 2iW(n,\sigma)\,\frac{\partial F}{\partial\theta} + c(\theta,\sigma)V(n,\sigma),$$

где $c(\theta,\sigma)$ на данном этапе остается неопределенной.

Итак, из (11), (12) следуют выражения для фазовых функций быстрого и среднего процессов, а также для поперечного распределения поля импульса.

4. Эволюция огибающей импульса. Еще одним следствием уравнения (6) и условия (7) является задача

$$\begin{aligned} LP_2 = {}& 2i(\beta^2(n,\sigma) - q(\sigma)r(\sigma))\,\frac{\partial P_1}{\partial\theta} + (\beta^2(n,\sigma) - q^2(\sigma))\,\frac{\partial^2 P_0}{\partial\theta^2} - \varkappa(\sigma)\,\frac{\partial P_0}{\partial n} - 2ir(\sigma)\,\frac{\partial P_0}{\partial\sigma} - \\ & - ir'(\sigma)P_0 - 2n\varkappa(\sigma)r^2(\sigma)P_0 - \alpha(n,\sigma)|P_0|^2P_0 - \varepsilon\Big(\varkappa(\sigma)\,\frac{\partial P_1}{\partial n} - (\beta^2(n,\sigma) - q^2(\sigma))\,\frac{\partial^2 P_1}{\partial\theta^2} + \\ & + 2ir(\sigma)\,\frac{\partial P_1}{\partial\sigma} + ir'(\sigma)P_1 + 2n\varkappa(\sigma)r^2(\sigma)P_1 + 2q(\sigma)\,\frac{\partial^2 P_0}{\partial\theta\,\partial\sigma} + q'(\sigma)\frac{\partial P_0}{\partial\theta} - \\ & - 4in\varkappa(\sigma)q(\sigma)r(\sigma)\,\frac{\partial P_0}{\partial\theta} - 2i\alpha(n,\sigma)|P_0|^2\,\frac{\partial P_0}{\partial\theta} + \pi\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,|P_0|^2P_0 + i\Gamma(\sigma)P_0\Big), \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} P_2 = 0.$$

Условие разрешимости этой задачи позволяет записать уравнение для огибающей $F(\theta,\sigma)$:

$$\begin{aligned} & 2ir(\sigma)\,\frac{\partial F}{\partial\sigma} + g(\sigma)\,\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + j(\sigma)F + h(\sigma)|F|^2F = \\ & \qquad = -\varepsilon\Big(A(\sigma)\,\frac{\partial F}{\partial\theta} + iB(\sigma)\,\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^3} + C(\sigma)|F|^2\,\frac{\partial F}{\partial\theta} + D(\sigma)F^2\,\frac{\partial\bar F}{\partial\theta} + i\Gamma(\sigma)F\Big), \qquad (13) \end{aligned}$$

которое является возмущенным нелинейным уравнением Шредингера с переменными коэффициентами, определяемыми формулами

$$g(\sigma) = 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\beta^2(n,\sigma) - q(\sigma)r(\sigma))V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn - \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\beta^2(n,\sigma) - q^2(\sigma))V^2(n,\sigma)\,dn,$$

$$j(\sigma) = ir'(\sigma) + 2\varkappa(\sigma)r^2(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}nV^2(n,\sigma)\,dn,$$

$$h(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(n,\sigma)V^4(n,\sigma)\,dn,$$

$$A(\sigma) = q(\sigma)\Big(\frac{q'(\sigma)}{q(\sigma)} - \frac{r'(\sigma)}{r(\sigma)}\Big) - 4r(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)\,\frac{\partial W}{\partial\sigma}\,dn +$$

$$+ i\varkappa(\sigma)\Big(2\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)\,\frac{\partial W}{\partial n}\,dn + 2r^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}nV(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn -$$

$$- 4r^2(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn\int\limits_{-\infty}^{\infty}nV^2(n,\sigma)\,dn\Big),$$

$$B(\sigma) = \frac{g(\sigma)q(\sigma)}{r(\sigma)} - 2g(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn -$$

$$- 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\beta^2(n,\sigma) - q^2(\sigma))V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn,$$

$$C(\sigma) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(n,\sigma)V^3(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn - 4ih(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn +$$

$$+ \pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}V^4(n,\sigma)\,dn + 2ih(\sigma)\Big(\frac{q(\sigma)}{r(\sigma)} - 1\Big),$$

$$D(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(n,\sigma)V^3(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn - 2ih(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(n,\sigma)W(n,\sigma)\,dn +$$

$$+ \pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}V^4(n,\sigma)\,dn + i\,\frac{h(\sigma)q(\sigma)}{r(\sigma)}.$$

Нетрудно убедиться, что слагаемое $i[\operatorname{Im} j(\sigma) + \varepsilon\Gamma(\sigma)]F$ в (13) характеризует затухание импульса. При этом поглощение энергии средой, определяемое коэффициентом Γ, имеет место и в случае, когда свойства волновода не зависят от переменной σ, в то время как вклад в затухание величины $\operatorname{Im} j(\sigma)$ обусловлен слабой продольной неоднородностью.

Исследуем более подробно невозмущенное нелинейное уравнение Шредингера, т. е. уравнение (13) при $\varepsilon = 0$. Представляют интерес его решения, сосредоточенные по переменной θ, поскольку они соответствуют распространению коротких импульсов в волноводном слое. С математической точки зрения сосредоточенность означает, что решение нелинейного уравнения Шредингера представляет собой функцию, стремящуюся к нулю при $\theta \to \pm\infty$ со всеми производными по θ быстрее любой степени $|\theta|^{-1}$.

Как показано в [19], если коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера связаны соотношением

$$2g(\sigma)r(\sigma) = \lambda^2 h(\sigma), \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{14}$$

то его сосредоточенным решением является функция

$$F(\theta,\sigma) = \frac{\lambda}{\sqrt{r(\sigma)}} \exp\Big[i\Big(\theta + \frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\operatorname{Re} j(\sigma')}{r(\sigma')}\,d\sigma'\Big)\Big] \Big/ \operatorname{ch}\Big(\theta - \int\limits_0^\sigma \frac{g(\sigma')}{r(\sigma')}\,d\sigma'\Big). \tag{15}$$

В выражении для p, записанном с использованием формул для $V(n,\sigma)$, $F(\theta,\sigma)$, $r(\sigma)$, $q(\sigma)$, отчетливо проявляется характер изучаемого движения, определяемый тремя масштабами: высокочастотное заполнение модулируется огибающей, эволюция которой зависит от двух масштабов. Кроме того, из (15) следует, что импульс распространяется в продольно-неоднородном волноводе со скоростью

$$v(\sigma) = \frac{1}{q(\sigma)}\Big(1 + \varepsilon\,\frac{q(\sigma)r(\sigma)}{g(\sigma)} + O(\varepsilon^2)\Big),$$

медленно меняющейся по мере распространения.

В задачах нелинейной акустики представляет интерес также случай $\alpha < 0$, когда коэффициент $h(\sigma) < 0$. Пусть выполняется соотношение

$$2g(\sigma)r(\sigma) = -\lambda^2 h(\sigma), \qquad \lambda = \mathrm{const}\,.$$

Тогда

$$F(\theta,\sigma) = \frac{\lambda}{\sqrt{r(\sigma)}} \operatorname{th}\Big(\theta - \int\limits_0^\sigma \frac{g(\sigma')}{r(\sigma')}\,d\sigma'\Big) \exp\Big[i\Big(\theta + \int\limits_0^\sigma \frac{\operatorname{Re} j(\sigma') - 3g(\sigma')}{2r(\sigma')}\,d\sigma'\Big)\Big]. \tag{15a}$$

Импульс (15а) при распространении “гасит” высокочастотное заполнение. Такой импульс называется (по аналогии с электромагнитной задачей) солитоном затемнения, или “дыркой огибающей”. Как указано в [12], процесс такого типа характерен для акустических волноводов цилиндрической формы, заполненных воздухом.

5. Прохождение импульса по волноводу с параболическим профилем показателя преломления. Многие формулы из пп. **1–4** существенно упрощаются, если предположить, что

$$\beta^2(n,\sigma) = \beta_0^2(\sigma) - \beta_2^2(\sigma)n^2/4.$$

При больших значениях нормальной координаты $\beta^2(n,\sigma) < 0$, однако для нахождения решения в окрестности оси волновода такое приближение оправданно.

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (11) оказываются равными соответственно

$$r_l^2(\sigma) = \beta_0^2(\sigma) - (l + 1/2)\beta_2(\sigma), \qquad V_l(n,\sigma) = (2^2 l!)^{-1/2}(2\pi)^{-1/4}\beta_2^{1/4}(\sigma)D_l(\sqrt{\beta_2(\sigma)}\,n).$$

Здесь $D_l(x)$ — функция параболического цилиндра. Возможно существование $K = [\beta_0^2/\beta_2 + 1/2]$ незатухающих мод ($[x]$ — целая часть x). Рассмотрим моду с номером $k = 0$, предположив $\alpha = \alpha(\sigma)$. Имеем

$$r(\sigma) = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_2/2}, \qquad q(\sigma) = (\beta_0^2 - \beta_2/4)/\sqrt{\beta_0^2 - \beta_2/2},$$

$$V(n,\sigma) = (\beta_2/(2\pi))^{1/4}\,\mathrm{e}^{-\beta_2 n^2/4}, \qquad W(n,\sigma) = \beta_2(\sigma) n^2 V(n,\sigma)/8.$$

Коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера также могут быть вычислены в терминах α, β_0, β_2. При выполнении соотношения

$$\alpha(\sigma) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^2}\,\frac{\beta_0(\sigma)\sqrt{\beta_2(\sigma)}}{\sqrt{1 - \beta_2(\sigma)/(2\beta_0^2(\sigma))}}$$

огибающая импульса представляется формулой

$$F(\theta,\sigma) = \lambda\,\mathrm{e}^{i\theta} \Big/ \left\{ \Big(\beta_0^2(\sigma) - \frac{1}{2}\,\beta_2(\sigma)\Big)^{1/4} \operatorname{ch}\Big[\theta - \frac{1}{4}\int\limits_0^\sigma \frac{\beta_0^2(\sigma')\beta_2(\sigma')}{(\beta_0^2(\sigma') - \beta_2(\sigma')/2)^{3/2}}\,d\sigma'\Big]\right\}.$$

При $\beta_2 \ll \beta_0^2$ скорость нулевой моды близка к скорости импульса в линейном приближении $1/\beta_0(\sigma)$. При больших значениях β_2 скорость $v(\sigma) < 1/\beta_0(\sigma)$.

6. Влияние продольной неоднородности на сосредоточенность импульса, его амплитуду и ширину. Как отмечено выше, если коэффициенты $r(\sigma)$, $g(\sigma)$, $h(\sigma)$ невозмущенного нелинейного уравнения Шредингера связаны соотношением (14), то его решение является сосредоточенным по θ при всех σ. Рассмотрим случай, когда коэффициенты произвольны.

Положим $\varepsilon = 0$ и проведем дальнейшее упрощение уравнения (13). Для этого огибающую F представим в виде произведения

$$F(\theta,\sigma) = f(\theta,y)\exp\Big(i\int\limits_0^\sigma \frac{j(\sigma')}{2r(\sigma')}\,d\sigma'\Big),$$

введя новую переменную

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{g(\sigma')}{r(\sigma')}\,d\sigma'.$$

Экспоненциальный множитель в явном виде описывает затухание импульса, обусловленное неоднородностью волноводного слоя, а также дополнительный набег фазы огибающей.

За счет продольной неоднородности волновода сосредоточенный в начале трассы импульс может разрушиться. Задача о сохранении сосредоточенности импульса сводится к исследованию сосредоточенности функции $f(\theta,y)$, удовлетворяющей нелинейному уравнению Шредингера

$$i\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + H(y)|f|^2 f = 0, \tag{16}$$

где $H(y) = h(y)/(r(y)g(y))$; переменная σ выражена через y.

Разрушению импульса способствуют большие мощность и крутизна исходного импульса $f(\theta,0) = \Psi(\theta)$, а также значительная продольная неоднородность. Как показано в [21, 22], если $H(y)$ — непрерывная положительная функция, то существует гарантированный интервал $[0, Y)$, на котором сохраняется сосредоточенность импульса. Значение Y определяется из уравнения

$$6 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|\Psi|^2 + |\Psi'|^2)\, d\theta \int\limits_0^Y H(y)\, dy = 1. \tag{17}$$

Зная Y и формулу замены переменных $y(\sigma)$, можно вычислить длину гарантированного интервала для исходной переменной σ. Из уравнения (17) следует, что длина гарантированного интервала уменьшается с увеличением мощности и крутизны начального импульса.

Следует отметить, что $[0, Y)$ — минимальный интервал, на котором сохраняется сосредоточенность импульса. Решение уравнения (16), принадлежащее классу быстроубывающих функций, может существовать и в более широком диапазоне. Если

$$\int\limits_0^{\infty} |H'(y)|\, dy < \infty, \tag{18}$$

то сосредоточенность импульса сохраняется при любой быстроубывающей функции $\Psi(\theta)$ на всей длине волноводного слоя [21].

Рассмотрим уравнение (16), предположив, что продольная неоднородность не только мала, но и является плавно меняющейся. Иными словами,

$$H(y) = 2\mu^2 - \delta b(\delta y), \qquad \mu = \mathrm{const}, \qquad \delta \ll 1,$$

где $b(\xi)$ — ограниченная вещественная функция, зависящая от медленной переменной $\xi = \delta y$. Тогда с использованием методов, изложенных в [3, 4], для уравнения (16) можно построить решение, асимптотическое по малому параметру δ.

Представив искомую функцию в виде $f = \Phi\, \mathrm{e}^{i\varphi}$ (Φ, φ — вещественные функции) и учитывая вид солитонного решения при $\delta = 0$, найдем решение (16) в виде рядов по степеням δ:

$$\varphi = \theta\varphi_0(\xi) + \delta\varphi_1(X, \xi) + \delta^2\varphi_2(X, \xi) + \ldots,$$
$$\Phi = A_0(\xi)/\operatorname{ch} X + \delta\Phi_1(X, \xi) + \delta^2\Phi_2(X, \xi) + \ldots, \qquad X = \theta - x_0(\xi)/\delta - x_1(\xi).$$

Подставляя эти разложения в (16) в старших порядках по δ, получим следующие условия:

$$x_0'(\xi) = 2, \qquad x_1'(\xi) = x_1 = \mathrm{const}, \qquad A_0(\xi) = 1/\mu, \qquad \varphi_0(\xi) = 1,$$
$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial X^2} + \Big(\frac{6}{\operatorname{ch}^2 X} - 1\Big)\Phi_1 = \frac{b(\xi)}{\mu^3 \operatorname{ch}^3 X}, \qquad \Phi_1 \underset{X\to\pm\infty}{\to} 0,$$
$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial X^2}\,\frac{1}{\operatorname{ch} X} - 2\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\,\frac{\operatorname{sh} X}{\operatorname{ch}^2 X} = -x_1'(\xi)\,\frac{\operatorname{sh} X}{\operatorname{ch}^2 X}.$$

Уравнения для Φ_1 и φ_1 легко интегрируются. В результате искомая функция f представляется в виде

$$f(\theta, y) = \frac{1}{\mu}\,\frac{1}{\operatorname{ch}(\theta - 2y - \delta x_1 y)}\Big(1 + \frac{\delta b(\xi)}{4\mu^2} + \delta d(\xi) \operatorname{th}(\theta - 2y - \delta x_1 y) + O(\delta^2)\Big) \times$$
$$\times \exp\Big(i\theta + i\delta\,\frac{x_1 X}{2}\Big), \tag{19}$$

где $d(\xi)$ — решение нелинейного уравнения второго порядка с коэффициентами, выражаемыми через функцию $b(\xi)$.

Из (19) следуют выражения для амплитуды A и ширины Δ огибающей импульса:

$$
\begin{gathered}
A = \frac{1}{\mu} \exp\Big(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{\sigma} \frac{\operatorname{Im} j(\sigma')}{r(\sigma')}\, d\sigma' \Big) \Big(1 + \frac{\delta}{4\mu^2}\, b(\delta y) + O(\delta^2) \Big), \\
\Delta = \Delta_0 \, \frac{r(\sigma)}{g(\sigma)} \, (1 + O(\delta))
\end{gathered}
\tag{20}
$$

(Δ_0 — начальная ширина импульса; μ^{-1} — начальная амплитуда импульса). Амплитуда и ширина меняются в процессе распространения импульса. Если, например, отношение g/r увеличивается с ростом σ, то Δ уменьшается. Это означает, что слабая продольная неоднородность волноводного слоя может привести к значительному сжатию импульса.

Формулы (20) справедливы на участке волновода $y < Y$. Однако если выполнено условие (18), то эти формулы описывают амплитуду и ширину импульса на всей трассе.

При разрушении импульса градиенты физических величин становятся большими и пренебрегать вязкостью среды нельзя. В этом случае система уравнений Эйлера неприменима.

Заключение. Анализ процесса распространения короткого импульса в градиентном неоднородном волноводе позволяет сделать следующие выводы. Большое количество задач нелинейной акустики связано с изучением сильной нелинейности, обусловливающей, в частности, образование ударных волн. Модельными уравнениями, описывающими распространение импульсов в нелинейных средах с дисперсией и диссипацией, служат уравнения Бюргерса, Кортевега — де Фриза, Хохлова — Заболотской — Кузнецова и др. Дисперсия может компенсировать увеличение крутизны профиля волны, вызываемое нелинейностью, в результате чего возникает импульс, распространяющийся без изменения формы. В данной работе показано, что в случае слабой нелинейности существует другой эффект, а именно: импульс представляет собой высокочастотные колебания синусоидального типа (возможно, искаженные наличием продольной неоднородности), модулированные по амплитуде. В отличие от сильной слабая нелинейность не влияет на высокочастотное заполнение, ее действие проявляется в образовании солитонов огибающей импульса. При этом процесс распространения импульса определяется тремя масштабами. Наиболее быстро эволюционирует высокочастотное заполнение, модулированное по амплитуде. Эволюцию огибающей определяют два процесса, идущие с разными скоростями: средний по скорости процесс эволюции фазы огибающей и медленное изменение ее амплитуды. Если волновод неоднороден в продольном направлении, то огибающая описывается нелинейным уравнением Шредингера с переменными коэффициентами.

Уравнение (13) учитывает затухание амплитуды импульса вдоль координаты s. Аналогичный результат получен в работе [12], где изучается однородный волновод со стенками и используется нелинейное уравнение Шредингера с постоянными коэффициентами. Однако в [12] затухание обусловлено не только диссипацией, но и радиальными потоками в пограничном слое, т. е. в конечном счете — наличием границы. В рассмотренном случае дополнительное затухание обусловлено зависимостью свойств волновода от продольной координаты.

Следует отметить, что проведенные в последнее время математические исследования разрешимости системы уравнений Навье — Стокса выявили различие характера решений при $\gamma > 3/2$ [23] и $\gamma < 3/2$ [24].

Численные расчеты [12] показывают, что для всех мод в воздухе ($\gamma \approx 1{,}41$) возможно лишь распространение “дырок огибающей”, что соответствует дефокусирующей среде. Этот результат согласуется с приведенным выше утверждением о том, что при идеально адиабатическом распространении звуковых импульсов граничным значением γ_0, разделяющим фокусирующие и дефокусирующие среды, является значение $\gamma_0 = 1{,}5$. С результатом работы [12] согласуется также вывод о том, что фокусирующий характер среды может быть обеспечен за счет сильной зависимости скорости звука от давления. Как показывает сравнение с [12], исследование градиентного волноводного слоя позволяет избежать трудностей, обусловленных учетом влияния границ. В то же время в слоистых средах возможно такое распределение скорости звука, при котором градиентный волновод реализуется на практике. Тогда в нем возможно распространение сосредоточенного акустического импульса, по крайней мере, на конечные расстояния. Поперечное распределение волнового поля и фазовые функции высокочастотного заполнения и огибающей получаются из решения задачи Штурма — Лиувилля (11), а огибающую импульса можно исследовать с помощью уравнения (13).

Автор выражает благодарность И. А. Молоткову за внимание к работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. **Молотков И. А.** Нелинейные локализованные волновые процессы / И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, М. А. Бисярин. М.: Янус-К, 1999.
4. **Молотков И. А.** Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: Физматлит, 2003.
5. **Бахвалов Н. С.** Нелинейная теория звуковых пучков / Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская. М.: Наука, 1982.
6. **Зарембо Л. К.** Нелинейная акустика / Л. К. Зарембо, В. И. Тимошенко. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.
7. **Lions P. L.** Mathematical topics in fluid dynamics. Oxford: Clarendon Press, 1998.
8. **Dysthe K. B., Jurén C., Stenflo L.** On resonant interactions of atmospheric waves // Physica Scripta. 1974. V. 9, N 4. P. 226–228.
9. **Shvartsburg A. B.** Subsonic solitons in the ionosphere // Phys. Lett. A. 1978. V. 68, N 2. P. 281–282.
10. **Лебле С. Б.** Волноводное распространение нелинейных волн в стратифицированных средах. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1988.
11. **Keller J. B., Millman M. H.** Finite-amplitude sound-wave propagation in a waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 49, N 1, pt 2. P. 329–333.
12. **Nozaki K., Taniuti T.** Envelope solitons in nonlinear acoustics // Physica D. Nonlinear Phenomena. 1986. V. 18, N 1/3. P. 127–134.
13. **Заболотская Е. А., Шварцбург А. Б.** Нелинейный акустический волновод // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 2. С. 373–375.
14. **Wilson C. R.** Auroral infrasonic waves // J. Geophys. Res. 1969. V. 74, N 7. P. 1812–1836.
15. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
16. **Бисярин М. А.** Звуковые импульсы конечной амплитуды в нелинейном неоднородном волноводном слое. М., 1989. Деп. в ВИНИТИ 24.05.89, № 3464-В89.
17. **Бисярин М. А.** Самовоздействие слабонелинейных акустических импульсов в градиентном волноводе // Тр. Всесоюз. науч. конф. “Волновые и вибрационные процессы в машиностроении”. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1989. С. 209–210.

18. **Bisyarin M. A.** Propagation of finite-amplitude pulses in gradient waveguides // Proc. of the 1st Europ. fluid mech. conf. Cambridge: S. n., 1991.
19. **Бисярин М. А., Молотков И. А.** Распространение коротких импульсов в нелинейных и неоднородных световодах // Проблемы теоретической физики: Сб. науч. тр. / Под ред. Ю. Н. Демкова и др. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1988. Т. 3. С. 171–182.
20. **Coddington E. A.** Theory of ordinary differential equations / E. A. Coddington, N. Levinson. N. Y.; Toronto; L.: McGraw-Hill Book Co, 1955.
21. **Бисярин М. А.** Нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами: сосредоточенное решение и его разрушение // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 173. С. 42–47.
22. **Бисярин М. А.** О локальной разрешимости нелинейного уравнения Шредингера с переменными коэффициентами // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. Физика, химия. 1989. Вып. 2. С. 80–83.
23. **Feireisl E., Novotný A., Petzeltová H.** On the existence of globally defined weak solutions to the Navier — Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 2001. V. 3. P. 358–392.
24. **Плотников П. И., Соколовский Я.** Стационарные краевые задачи для уравнений Навье — Стокса с показателем адиабаты $\gamma < 3/2$ // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 2. С. 166–169.

Поступила в редакцию 9/III 2005 г.