Геология и геофизика, 2007, т. 48, № 8, с. 889—898 **http://www.izdatgeo.ru**

УДК 517.95 + 517.923

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

А.Л. Карчевский

Институт математики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 4, Россия

Получено аналитическое решение уравнений Максвелла для горизонтально-слоистых анизотропных сред. Решение представлено в форме, позволяющей вычислять требуемые величины без накопления ошибок округления. При послойном пересчете вычисления сведены к стандартным операциям в каждом слое: решение алгебраического уравнения четвертого порядка, умножение, сложение и обращение неособенных матриц второго порядка. Не существует ограничений на мощности слоев: модель среды может содержать как очень толстые, так и очень тонкие слои. Алгоритм численного решения прост и может быть легко распараллелен.

Уравнения Максвелла, горизонтально-слоистая анизотропная среда, дифференциальное матричное уравнение Риккати.

A FREQUENCY DOMAIN ANALYTICAL SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATIONS FOR LAYERED ANISOTROPIC MEDIA

A.L. Karchevsky

An analytical solution to Maxwell's equations for layered anisotropic media is represented in the form that allows estimating the required parameters without round-off accumulation. The solution implies layer-by-layer recalculation and is reduced to the standard procedures in each layer, namely, solving a fourth-order algebraic equation, multiplication, addition, and inversion of second-order nonsingular matrices. The model has no limitations on layer thickness and is applicable to both very thick and very thin layers. The new numerical code is straightforward and can be easily parallelized.

Maxwell's equations, layered anisotropic medium, differential matrix Riccati's equation

ВВЕДЕНИЕ

Достаточно широкий класс геолого-геофизических сред при исследовании методами электроразведки можно рассматривать как анизотропные. Это, например, сланцевые породы, среды, содержащие ориентированные проводящие включения, и т. п. Существует большое количество работ [Тихонов, 1959; Четаев, 1962, 1966а,б; Семенов, Новожилова, 1964; Ваньян, l965; Гнасенко, Маркина, 1967; Давыдов, 1971; Семенов и др., 1974; Табаровский, Эпов, 1977; Табаровский и др., 1977; Табаровский, 1979; Светов, 1984; Kaufman, Keller, 1985; Светов, Губатенко, 1988; Эпов, Ельцов, 1991; Потапов, Кнеллер, 1993; Tabarovsky et al., 2001; Федоров, 2005; Федоров, Эпов, 2005], посвященных расчету электромагнитных полей в анизотропных средах. В основном рассматривается трансверсально-изотропная слоистая среда, когда напластование или рассланцевание параллельно границам слоев. Задача моделирования существенно усложняется, если маломощные прослои или плоскости преимущественной трещиноватости составляют некоторый угол с границами пластов. Решению подобных прямых задач посвящено незначительное количество публикаций [Табаровский, Эпов, 1977; Федоров, Эпов, 2005; Федоров, 2005].

В данной работе получены аналитические выражения для компонент электромагнитного поля в частотной области в горизонтально-слоистой среде любого вида анизотропии. Считалось, что диэлектрическая проницаемость ε, проводимость σ и магнитная проницаемость μ являются тензорами второго ранга. Предлагаемый подход основан на возможности применения преобразования Фурье по горизонтальным пространственным переменным и преобразования Лапласа по временной переменной и на редукции системы дифференциальных уравнений (СДУ) второго порядка к дифференциальному матричному уравнению Риккати (ДМУР) для матрицы, имеющей смысл адмитанса.

Идея использования связи дифференциальноого уравнения (ДУ) второго порядка с соответствующим дифференциальным уравнением Риккати (ДУР) для построения алгоритма решения ДУ второго порядка, который был бы удобен для программирования, полезен для решения обратных задач и для математического моделирования процессов распространения электомагнитных волн в горизонтально-слоистой среде, по всей видимости, впервые предложена в работе В.И. Дмитриева [1968]. Один из первых алгоритмов послойного пересчета был разработан А.Н. Тихоновым и Д.Н. Шахсуваровым [1956]. Однако он имел ограничение: при его численной реализации существовали выражения, записанные с участием экспонент, имеющих показатели с положительными действительными частями, что приводило к накоплению ошибок округления при послойном пересчете. Алгоритм В.И. Дмитриева был свободен от подобного недостатка и использовался им в последующих работах [Дмитриев, Федорова, 1980]. Заметим, что в обеих работах [Тихонов, Шахсуваров, 1956; Дмитриев, 1968] были получены аналитические соотношения для вычисляемых величин, однако в последней они получены в таком виде, который позволяет вычислять их устойчиво. Для задач теории упругости идея работы [Дмитриев, 1968] была использована [Аккуратов, Дмитриев, 1979, 1984] для получения следа решения СДУ теории упругости на поверхности $z = 0$. Далее свое применение для СДУ теории упругости алгоритм послойного пересчета получил в работах [Фатьянов, Михайленко, 1988; Фатьянов, 1989, 1990]. В работе [Фатьянов, Михайленко, 1988] рассуждения ведутся для получения следа решения СДУ теории упругости для горизонтально-слоистой изотропной среды с поглощением, в работе [Фатьянов, 1989] — для трансверсально-изотропной среды (с поглощением) с вертикальной осью симметрии.

Как уже отмечалось, во всех этих работах эксплуатировался известный переход от ДУ или СДУ второго порядка с помощью специальной замены функций к ДУР или ДМУР соответственно. Замечательным является тот факт, что когда коэффициенты и правые части данных уравнений являются постоянными, тогда ДУР и ДМУР имеют решения, которые могут быть записаны в явной аналитической форме. Следовательно, находя нужные величины по явным аналитическим формулам, получим решение ДУ или СДУ за короткое время, т. е. получаем очень быстрый алгоритм решения прямой задачи. Такой алгоритм может быть полезен для решения обратной задачи, например, оптимизационным методом.

В работах [Карчевский, 2005а,б] был предложен метод и устойчивый численный алгоритм нахождения решения СДУ теории упругости для горизонтально-слоистых сред любого вида анизотропии в любой точке среды. Предложенный метод отличался от существовавших аналогов [Аккуратов, Дмитриев, 1979, 1984; Фатьянов, Михайленко, 1988; Фатьянов, 1989, 1990] тем, что не использовал переход от изначальной СДУ второго порядка к новой СДУ для потенциалов. Тем самым метод оказался свободным от некоторых ограничений, имеющих место в предыдущих работах и делающих невозможным решение задачи для общего случая анизотропных сред. Метод оказался достаточно общим, появилась возможность его применения в решении других подходящих уравнений математической физики для горизонтально-слоистых сред. В данной работе разработанный метод решения демонстрируется на примере уравнений Максвелла. Необходимо отметить, что переход к уравнениям Риккати, минуя шаг перехода к уравнениям для потенциалов, также сделан в работе [Pavlov, 2002] для получения решения уравнений теории упругости для горизонтально-слоистой изотропной среды.

По области применимости предлагаемого метода решения прямой задачи настоящая работа близка к результатам работы [Табаровский, Эпов, 1977], идея метода из которой родственна идее метода решения из работы [Тихонов, Шахсуваров, 1956]. Следовательно, методу присущ тот же недостаток: при его численной реализации существуют выражения, записанные с участием экспонент, имеющих показатели с положительными действительными частями. Это может привести к накоплению ошибок округления при послойном пересчете или, по крайней мере, могут существовать выражения, содержащие особенность типа $0 \cdot \infty$, которые требуют особого внимания при вычислениях.

В настоящей работе построено аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области и представлено в таком виде, который позволяет его вычислить при послойном пересчете без накопления ошибок округления, поскольку в полученных формулах участвуют только экспоненты, имеющие показатели с отрицательными действительными частями. Для метода рашения нет ограничений на количество слоев и их мощность: модель среды может содержать как очень тонкие, так и очень толстые слои. Решение представлено в матричной форме, поскольку, по мнению автора, данный вид решения в данном случае наиболее прост для программирования.

Предлагаемый метод в большей степени ориентирован на решение оптимизационным методом в частотной области обратной динамической задачи электроразведки для горизонтально-слоистых анизотропных сред. Для нужд математического моделирования метод также может быть применим, но при условии использования хорошего численного алгоритма для обратных преобразований Фурье и Лапласа по пространственным и вре́менной переменным. С этой целью могут быть использованы результаты работ В.И. Дмитриева [Дмитриев, Федорова, 1980].

В работе [Карчевский, 2005а] приводится только метод решения, а во всей полноте и решение, и метод, и обоснование приводятся в работе [Карчевский, 2005б]. В настоящей работе будем придерживаться того же принципа: будет дано только аналитическое решение и приведен метод решения прямой задачи. По вопросам обоснования тех или иных шагов метода и численного алгоритма решения можно обратиться к работе [Карчевский, 2005б].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду — N_l-слойную структуру с границами раздела x_3^k $(k = \overline{0, N_l})$, $x_3^0 = 0$; m-й слой — интервал $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, последний $N_l + 1$ (подстилающий) слой — полупространство $[x_3^{N_l}, \infty)$, воздух — полупространство $x_3 \in (-\infty, 0]$.

Электромагнитные свойства каждого слоя характеризуются значениями диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}$, проводимости $\boldsymbol{\sigma}$ и магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$, явлющихся квадратными симметричными матрицами третьего порядка. Матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$ являются положительно-определенными, матрица $\boldsymbol{\sigma}$ — неотрицательно-определенная. Таким образом, элементы матриц ε_{ij}, σ_{ij} и μ_{ij} являются кусочно-постоянными функциями переменной x_3 $(x_3 \in (-\infty, \infty))$.

Компоненты электромагнитных колебаний могут быть определены из системы уравнений, следующей из системы уравнений Максвелла,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \boldsymbol{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} + \mathbf{j}^m), \tag{1}$$

$$\mathbf{j}^e = f^e(t) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*), \quad \mathbf{j}^m = f^m(t) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*).$$

Источник находится в одном из слоев, т. е. $x_3^* \neq x_3^k$, $k = \overline{0, n}$.

Начальные условия

$$\mathbf{E}|_{t<0} = 0, \quad \mathbf{H}|_{t<0} = 0. \tag{2}$$

Условия склейки в точках (x_1, x_2, x_3^k)

$$[\mathbf{E}_j]_{x_3^k} = 0, \quad [\mathbf{H}_j]_{x_3^k} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь обозначение $[f]_x$ означает $[f]_x = f(x + 0) - f(x - 0)$.

Целью настоящей работы является построение алгоритма нахождения величин

$$E_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p), \quad H_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p), \quad j = \overline{1, 3}, \tag{4}$$

где $E_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ и $H_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ есть образ функций $\mathbf{E}_j(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\mathbf{H}_j(x_1, x_2, x_3, t)$; $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа по временной переменной t; ν_1 и ν_2 — параметры преобразования Фурье по пространственным переменным x_1 и x_2 соответственно.

НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСТАНОВКИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Прежде всего введем матрицу $\mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^{-1}$. В силу свойств матрицы $\boldsymbol{\mu}$ матрица $\mathbf{m}$ будет также симметричной и положительно-определенной.

Дифференцируя первое уравнение (1) по переменной t и используя второе уравнение (1), получим соотношение только для $\mathbf{E}$. После преобразования Лапласа по переменной t, после преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\cdot)\, e^{pt}\, e^{-i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)}\, dt\, dx_1 dx_2,$$

придем к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left[m_{22}\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - m_{12}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} - i\nu_2 m_{23}E_1 + i\nu_1 m_{23}E_2 - i\eta_2 E_3\right] -$$

$$- i\nu_2 m_{23}\frac{\partial E_1}{\partial x_3} + i\nu_2 m_{13}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \nu_2 m_{33}(\nu_2 E_1 - \nu_1 E_2) - \nu_2\eta_3 E_3 = \zeta_{11}E_1 + \zeta_{12}E_2 + \zeta_{13}E_3 - pJ_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left[-m_{12}\frac{\partial E_1}{\partial x_3} + m_{11}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} + i\nu_2 m_{13}E_1 - i\nu_1 m_{13}E_2 + i\eta_1 E_3\right] + \tag{5}$$

$$+ i\nu_1 m_{23}\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - i\nu_1 m_{13}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \nu_1 m_{33}(\nu_2 E_1 - \nu_1 E_2) + \nu_1\eta_3 E_3 = \zeta_{12}E_1 + \zeta_{23}E_2 + \zeta_{23}E_3 - pJ_2,$$

$$-i\eta_2\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - i\eta_1\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\nu_2 + \eta_3(\nu_2 E_1 - \nu_1 E_2) - \nu_4 E_3 = \zeta_{13}E_1 + \zeta_{23}E_2 + \zeta_{33}E_3 - pJ_3,$$

где

$$J = j^e + \operatorname{rot} j^m, \quad \boldsymbol{\zeta} = p^2\boldsymbol{\varepsilon} - p\boldsymbol{\sigma},$$

$\eta_1 = \nu_2 m_{11} - \nu_1 m_{12}$, $\eta_2 = \nu_1 m_{22} - \nu_2 m_{12}$, $\eta_3 = \nu_2 m_{13} - \nu_1 m_{23}$, $\eta_4 = \nu_1^2 m_{22} + \nu_2^2 m_1 - 2\nu_1\nu_2 m_{12}$,
и j^e, j^m — образы для $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$.

В (5) компонента E_3 может быть выражена из третьего уравнения и подставлена в первые два. После несложных преобразований приходим к следующему дифференциальному матричному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + iBU\right) + B'\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = l_1\delta(x_3 - x_3^*) + l_2\delta'(x_3 - x_3^*). \qquad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения для матриц и векторов:

$$U = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} - \frac{1}{g_{33}}\begin{bmatrix} \eta_2^2 & \eta_1\eta_2 \\ \eta_1\eta_2 & \eta_1^2 \end{bmatrix},$$

$$B = -\begin{bmatrix} \nu_2 m_{23} & -\nu_1 m_{23} \\ -\nu_2 m_{13} & \nu_1 m_{13} \end{bmatrix} + \frac{1}{g_{33}}\begin{bmatrix} g_{13}\eta_2 & g_{23}\eta_2 \\ g_{13}\eta_1 & g_{23}\eta_1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{g_{33}}\begin{bmatrix} g_{13}^2 & g_{13}g_{23} \\ g_{13}g_{23} & g_{23}^2 \end{bmatrix},$$

$$l_1 = -p\left(f^e(p)\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + if^m(p)\begin{bmatrix} \nu_2 \\ -\nu_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{g_{33}}\begin{bmatrix} g_{13} \\ g_{23} \end{bmatrix}(f^e(p)\beta_3 + if^m(p)(\nu_1\gamma_2 - \nu_2\gamma_1))\right),$$

$$l_2 = p\left(f^m\begin{bmatrix} \gamma_2 \\ -\gamma_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{g_{33}}\begin{bmatrix} \eta_2 \\ \eta_1 \end{bmatrix}(f^e(p)\beta_3 + if^m(p)(\nu_1\gamma_2 - \nu_2\gamma_1))\right),$$

и g_{mm} — элементы следующей матрицы

$$G = \zeta + \begin{bmatrix} \nu_2^2 m_{33} & -\nu_1\nu_2 m_{33} & -\nu_2\eta_3 \\ -\nu_1\nu_2 m_{33} & \nu_1^2 m_{33} & \nu_1\eta_3 \\ -\nu_2\eta_3 & \nu_1\eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix}.$$

Матрицы A, D — симметричные, штрих (′) обозначает операцию транспонирования.

Условия склейки (3), уравнения (1) и (5) позволяют получить для вектор-функции U в точках разрыва среды следующие условия склейки:

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U + iBU\right]_{x_3^k} = 0, \quad [U]_{x_3 = x_3^k} = 0, \quad k = \overline{0, N_l}. \qquad (7)$$

К постановке (6), (7) необходимо добавить условия затухания на бесконечности

$$U \to 0 \quad (x_3 \to \pm\infty). \qquad (8)$$

Для дальнейших рассуждений вектор-функцию U, определенную на всей числовой прямой, удобно разбить на две части: до и после точки, в которой расположен источник, т. е.

$$U = \begin{cases} U_{(1)}, & -\infty < x_3 < x_3^*, \\ U_{(2)}, & x_3^* < x_3 < \infty, \end{cases} \qquad (9)$$

где каждая $U_{(1)}$ и $U_{(2)}$ в своей области определения по переменной x_3 удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_{(j)} + iBU_{(j)}\right) + iB'\frac{\partial}{\partial x_3}U_{(j)} - DU_{(j)} = 0, \; j = 1, 2,$$

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U_{(j)} + iBU_{(j)}\right]_{x_3^k} = 0, \; [U_{(j)}]_{x_3 = x_3^k} = 0, \; j = 1, 2, \qquad (10)$$

$$U_{(1)} \to 0 \quad (x_3 \to -\infty), \; U_{(2)} \to 0 \quad (x_3 \to \infty).$$

Подставляя вектор-функцию U в виде (9) в (6), получим следующие условия сопряжения в точке x_3^*:

$$U_{(2)}\big|_{x_3 = x_3^* + 0} - U_{(1)}\big|_{x_3 = x_3^* - 0} = l_3,$$

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_{(2)} + iBU_{(2)}\right)\Bigg|_{x_3 = x_3^* + 0} - \left(A \frac{\partial}{\partial x_3} U_{(1)} + iBU_{(1)}\right)\Bigg|_{x_3 = x_3^* - 0} = l_4. \tag{11}$$

$$l_3 = A^{-1} l_2, \; l_4 = l_1 - iB'A^{-1} l_2.$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Для вектор-функций $U_{(j)}$ ($j = 1, 2$), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (10), введем квадратные матрицы X и S второго порядка при помощи следующих выражений:

$$A \frac{\partial}{\partial x_3} U_{(1)} + iBU_{(1)} = SU_{(1)}, \; A \frac{\partial}{\partial x_3} U_{(2)} + iBU_{(2)} = XU_{(2)}. \tag{12}$$

Введенные матрицы в своей области определения переменной x_3 удовлетворяют следующим ДМУР:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} S + (S + iB')A^{-1}(S - iB) = D, \; \frac{\partial}{\partial x_3} X + (X + iB')A^{-1}(X - iB) = D. \tag{13}$$

Из условий (7) вытекают следующие условия склейки:

$$[S]_{x_3^k} = 0, \; [X]_{x_3^k} = 0. \tag{14}$$

Пусть точка x_3^* лежит в j-м слое, т. е. $x_3^* \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$.

В каждом n-слое $[x_3^{n-1}, x_3^n]$ $(n \le j)$ и в каждом m-слое $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ $(m \ge j)$ ДМУР (13) будут иметь [Карчевский, 2005а,б] следующие решения:

$$S = S_{(-)}^n + (L_S^{n-1})^{-1}, \tag{15}$$

$$L_S^{n-1}(x_3) = e^{\hat{C}(x_3 - x_3^{n-1})} (S^{n-1} - S_{(-)}^n)^{-1} e^{\check{C}(x_3 - x_3^{n-1})} +$$
$$+ e^{\hat{C}(x_3 - x_3^{n-1})} \left(\int_{x_3^{n-1}}^{x_3} e^{\hat{C}(s - x_3^{n-1})} A^{-1} e^{-\check{C}(s - x_3^{n-1})} \, ds \right) e^{\check{C}(x_3 - x_3^{n-1})}, \tag{16}$$

$$X = X_{(+)}^m + (L_X^m)^{-1}, \tag{17}$$

$$L_X^m(x_3) = e^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)} (X^m - x_{(+)}^m)^{-1} e^{\check{C}(x_3 - x_3^m)} +$$
$$+ e^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)} \left(\int_{x_3^m}^{x_3} e^{-\check{C}(s - x_3^m)} A^{-1} e^{-\hat{C}(s - x_3^m)} \, ds \right) e^{\check{C}(x_3 - x_3^m)}. \tag{18}$$

Здесь S^{n-1} и X^m — начальные значения для решений ДМУР (13) в точках x_3^{n-1} и x_3^m соответственно, $S_{(-)}^n$ и $X_{(+)}^m$ есть постоянные матрицы и являются частными решениями ДМУР (13) в слоях n и m соответственно. Как вычисляются частные решения ДМУР, и что означают индексы (+) и (–), будет сказано ниже.

Если R — частное решение ДМУР, то оно может быть найдено как решение следующего матричного уравнения Риккати:

$$(R + iB')A^{-1}(R - iB) = D. \tag{19}$$

Матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ связаны с решением данного уравнения и между собой при помощи следующих соотношений:

$$R = A\hat{C} + iB, \; R = A\check{C} - iB', \; \check{C}A = A\hat{C} + i(B + B'), \; \check{C}A\hat{C} = D. \tag{20}$$

Из соотношений (20) и уравнения (19) следует, что матрица $\hat{C}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$A\hat{C}^2 + i\,(B + B')\hat{C} - D = 0. \tag{21}$$

Из работы [Гантмахер, 1988] знаем, что собственные числа λ_j матрицы, которая является решением матричного уравнения типа (21), должны быть корнями алгебраического уравнения

$$\det\,[A\lambda^2 + i\,(B + B')\lambda - D] = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22), которое является алгебраическим уравнением четвертого порядка, есть характеристическое уравнение СДУ (6).

Корни характеристического уравнения (22) могут быть найдены, например, при помощи метода Феррари [Курош, 2006].

Решив уравнение (22), имеем четыре корня (среди которых могут быть кратные): два с положительной действительной частью, два — с отрицательной.

Известные корни уравнения (22) и матричное уравнение (21) позволяют найти [Карчевский, 2005б] матрицу $\hat{C}$ в следующем виде

$$\hat{C} = (i\,(B + B') + (\lambda_n + \lambda_k)A)^{-1}(\lambda_n\,\lambda_k\,A + D), \tag{23}$$

где λ_n и λ_k — некоторые два различных корня уравнения (22). Как только матрица $\hat{C}$ вычислена, сразу из соотношений (20) определяются соответствующие матрицы R и $\check{C}$. Если выбраны два корня с отрицательными или положительными действительными частями, то можно доказать, что

$$\det[i\,(B + B') + (\lambda_n + \lambda_k)A] \neq 0.$$

Для построения частного решения ДМУР в подстилающем слое $[x_3^{N_l}, \infty)$ выберем два корня уравнения (22) с отрицательными действительными частями. По формуле (23) строим матрицу $\hat{C}$, а по ней строим частное решение $X_{(-)}^{N_l+1}$. Во-первых, частное решение в подстилающем слое будет совпадать с общим решением ДМУР в силу утверждения 2.1 [Карчевский, 2005б]. Во-вторых, в силу уравнения (12) получим, что в подстилающем слое решение системы (6) будет

$$U_{(2)} \sim \mathrm{e}^{\hat{C}x_3},\;\; x_3 > x_3^{N_l}.$$

По построению матрица $\hat{C}$ имеет собственные числа, действительные части которых отрицательны, следовательно, будет удовлетворено граничное условие

$$\lim_{x_3 \to \infty} U_{(2)} = 0\;.$$

Таким образом, знаем матрицу X в точке $x_3 = x_3^{N_l} + 0$. В силу условий склейки (14) известно начальное значение X^{N_l} для решения ДМУР на интервале $[x_3^{N_l-1}, x_3^{N_l}]$. Для этого интервала строим частное решение ДМУР $X_{(+)}^{N_l}$: выберем два корня уравнения (22) с положительными действительными частями, по формуле (23) строим матрицу $\hat{C}$, а по ней строим частное решение. По формуле (17) получим матрицу X в точке $x_3 = x_3^{N_l-1} + 0$, а в силу условий склейки (14) получаем начальное значение X^{N_l-1} для решения ДМУР на интервале $[x_3^{N_l-2}, x_3^{N_l-1}]$ и т. д. Таким образом, для каждого интервала $[x_3^{m-1}, x_3^{m}]$ ($m \geq j + 1$), зная значения матриц X^m и $X_{(+)}^m$, получим значение матрицы X^{m-1} по формуле (17), положив в ней $x_3 = x_3^{m-1}$. Значение матрицы X^* вычисляется по формуле (17), где $m = j$ и вместо x_3 необходимо положить x_3^*.

Аналогичным образом для воздуха $(-\infty, x_3^0]$ ($x_3^0 = 0$) выберем два корня уравнения (22) с положительными действительными частями, по формуле (23) строим матрицу $\hat{C}$, а по ней строим частное решение $S_{(+)}^{-1}$. Снова, во-первых, частное решение в подстилающем слое будет совпадать с общим решением ДМУР, во-вторых, в силу (12) в воздухе решение системы (6) будет

$$U_{(1)} \sim \mathrm{e}^{\hat{C}x_3},\;\; x_3 < x_3^0.$$

По построению матрица $\hat{C}$ имеет собственные числа, действительные части которых положительны, следовательно, будет удовлетворено граничное условие

$$\lim_{x_3 \to -\infty} U_{(1)} = 0\;.$$

Таким образом, знаем матрицу S в точке $x_3 = x_3^0 - 0$. В силу условий склейки (14) известно начальное значение S^0 для решения ДМУР на интервале $[x_3^0, x_3^1]$. Для этого интервала строим частное решение ДМУР $S_{(-)}^1$: выберем два корня уравнения (22) с отрицательными действительными частями, по формуле (23) строим матрицу $\hat{C}$, а по ней строим частное решение. По формуле (15) получим матрицу S в точке $x_3 = x_3^1 - 0$, а в силу условий склейки (14) получаем начальное значение S^1 для решения ДМУР на интервале $[x_3^1, x_3^2]$ и т. д. Таким образом, для каждого интервала $[x_3^{n-1}, x_3^n]$ $(n \le j - 1)$, зная значения матриц S^{n-1} и $S_{(-)}^n$, получим значение матрицы S^n по формуле (15), положив $x_3 = x_3^n$. Значение матрицы S^* вычисляется по формуле (15), где $n = j$ и вместо x_3 необходимо положить x_3^*.

Из (11) и (12) в точке x_3^* имеем

$$U_1^* = (X^* - S^*)^{-1}(l_4 - X^* l_3), \ \ U_2^* = U_1^* + l_3. \tag{24}$$

Поскольку решение ДМУР (13) нам известно, то для того чтобы найти решение прямой задачи (6)—(8) U в любой точке x_3 необходимо найти решения дифференциальных уравнений (12) с начальными условиями (24).

Введем матрицант $\Omega_{z_0}^{z}[Y]$ как решение следующего дифференциального матричного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega - Y(z)\Omega = 0, \ \ \Omega\big|_{z = z_0} = E.$$

С его помощью решение U может быть представлено [Карчевский, 2005б] в следующем виде.

Для $x_3 > x_3^*$ и $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$ имеем

$$U = \Omega_{x_3^{m-1}}^{x_3}[\hat{X}]\Omega_{x_3^{m-2}}^{x_3^{m-1}}[\hat{X}] \ldots \Omega_{x_3^{j}}^{x_3^{j+1}}[\hat{X}]\Omega_{x_3^*}^{x_3^{j}}[\hat{X}]U_{(2)}^*, \tag{25}$$

$$\hat{X} = A^{-1}(X - i\hat{B}),$$

$$\Omega_{x_3^{s-1}}^{x_3^{s}}[\hat{X}] = (X^s - X_{(+)}^s)^{-1}\, e^{\check{C}\,(x_3^{s-1} - x_3^{s})}\,(X^{s-1} - X_{(+)}^s), \quad s = \overline{j+1, m-1},$$

$$\Omega_{x_3^*}^{x_3^{j}}[\hat{X}] = (X^j - X_{(+)}^j)^{-1} e^{\check{C}\,(x_3^* - x_3^{j})}\,(X^* - X_{(+)}^j),$$

$$\Omega_{x_3^{m-1}}^{x_3}[\hat{X}] = L_X^m(x_3) e^{\check{C}\,(x_3^{m-1} - x_3)}\,(X^{m-1} - X_{(+)}^m).$$

Для $x_3 < x_3^*$ и $x_3 \in [x_3^{n-1}, x_3^n]$ имеем

$$U = \Omega_{x_3^{n}}^{x_3}[\hat{S}]\Omega_{x_3^{n+1}}^{x_3^{n}}[\hat{S}] \ldots \Omega_{x_3^{j-1}}^{x_3^{j-2}}[\hat{S}]\,\Omega_{x_3^*}^{x_3^{j-1}}[\hat{S}]U_{(1)}^*, \tag{26}$$

$$\hat{S} = A^{-1}(S - i\hat{B}),$$

$$\Omega_{x_3^{s}}^{x_3^{s-1}}[\hat{S}] = (S^{s-1} - S_{(-)}^s)^{-1} e^{\check{C}\,(x_3^{s} - x_3^{s-1})}\,(S^s - S_{(-)}^s), \quad s = \overline{n+1, j-1},$$

$$\Omega_{x_3^*}^{x_3^{j-1}}[\hat{S}] = (S^{j-1} - X_{(-)}^j)^{-1} e^{\check{C}\,(x_3^* - x_3^{j-1})}\,(S^* - S_{(-)}^j),$$

$$\Omega_{x_3^{n}}^{x_3}[\hat{S}] = L_S^{n-1}(x_3) e^{\check{C}\,(x_3^{n} - x_3)}\,(S^n - S_{(-)}^n).$$

В заключение необходимо показать, как вычислять выражения типа второго слагаемого в выражениях (16) и (18). Покажем это на примере второго слагаемого из (18).

Введем матрицу

$$\Xi(x_3) = e^{\hat{C}\,(x_3 - x_3^m)} \left(\int_{x_3^m}^{x_3} e^{-\hat{C}\,(s - x_3^m)} A^{-1} e^{-\check{C}\,(s - x_3^m)}\, ds \right) e^{\check{C}\,(x_3 - x_3^m)},$$

которая удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{C}\Xi + \Xi\check{C} = \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)} A^{-1} \mathrm{e}^{\check{C}(x_3 - x_3^m)} - A^{-1} \equiv \tilde{C}, \tag{27}$$

которое, в свою очередь, эквивалентно следующей задаче для матрицы и векторов четвертого порядка:

$$\begin{bmatrix} \hat{C} + \check{C}_{11}E & \check{C}_{21}E \\ \check{C}_{12}E & \hat{C} + \check{C}_{22}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где Ξ_j и $\tilde{C}_j$ — j-й вектор-столбец матриц Ξ и $\tilde{C}$ соответственно, $\check{C}_{nm}$ — элементы матрицы $\check{C}$.

При выборе корней характеристического уравнения, как представлено выше, уравнение (27) имеет единственное решение для любой правой части $\tilde{C}$, следовательно, и матричное уравнение (28) однозначно разрешимо.

Специальный вид матрицы в (28) позволяет получить вектор-столбцы Ξ_j ($j = 1, 2$) матрицы $\Xi(x_3)$ в следующем виде:

$$\Xi_1 = [(\hat{C} + \check{C}_{22}E)(\hat{C} + \check{C}_{11}E) - \check{C}_{12}\check{C}_{21}E]^{-1} [(\hat{C} + \check{C}_{22}E)\tilde{C}_1 - \check{C}_{21}\tilde{C}_2], \tag{29}$$

$$\Xi_2 = [(\hat{C} + \check{C}_{11}E)(\hat{C} + \check{C}_{22}E) - \check{C}_{12}\check{C}_{21}E]^{-1} [(\hat{C} + \check{C}_{11}E)\tilde{C}_2 - \check{C}_{12}\tilde{C}_1].$$

Для устойчивого определения матричных экспонент используем представление матричной экспоненты из [Годунов, 1983]. В нашем случае имеем соотношения

$$\mathrm{e}^{\hat{C}_x} = E\psi(x, \lambda_1) + (\hat{C} - \lambda_1 E)\psi(x, \lambda_1, \lambda_2),$$

где

$$\begin{cases} \psi(x, \lambda_1) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \;\; \psi(x, \lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} - \mathrm{e}^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ \psi(x, \lambda_1) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \;\; \psi(x, \lambda_1, \lambda_1) = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

и λ_j ($j = 1, 2$) — собственные числа матрицы $\hat{C}$.

Таким образом, алгоритм устойчивого вычисления вектор-столбца U описан, т. е. получили E_1 и E_2. Остальные компоненты вычисляются по следующим формулам:

$$E_3 = -\frac{i}{g_{33}}([\eta_2 Z_{11} - \eta_1 Z_{21} + ig_{13}]E_1 + [\eta_2 Z_{12} - \eta_1 Z_{22} + ig_{23}]E_2),$$

$$H_1 = \frac{1}{p}[(m_{12}Z_{11} - m_{11}Z_{21} - i\nu_2 m_{13})E_1 + (m_{12}Z_{12} - m_{11}Z_{22} + i\nu_1 m_{13})E_2 + i\eta_1 E_3],$$

$$H_2 = -\frac{1}{p}[(m_{22}Z_{11} - m_{12}Z_{21} - i\nu_2 m_{23})E_1 + (m_{22}Z_{12} - m_{12}Z_{22} + i\nu_1 m_{23})E_2 - i\eta_2 E_3], \tag{30}$$

$$H_3 = -\frac{1}{p}[(m_{23}Z_{11} - m_{13}Z_{21} - i\nu_2 m_{33})E_1 + (m_{23}Z_{12} - m_{13}Z_{22} + i\nu_1 m_{33})E_2 + i\eta_3 E_3],$$

которые верны для всех $x_3 \neq x_3^*$, и Z_{nm} — элементы матрицы Z, которая определена следующим образом:

$$Z = \begin{cases} S, & x_3 < x_3^* \\ X, & x_3 > x_3^* \end{cases}.$$

Замечание. Выше предполагалось, что источник находится в одном из слоев, т. е. $x_3^* \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$, где $j = \overline{1, N_l}$. Очевидно, как модифицировать представленный выше алгоритм, если источник располагается в воздухе или в подстилающем слое.

ВЫВОДЫ

Получены аналитические формулы для компонент электромагнитного поля в частотной области $E_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ и $H_j(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ ($j = \overline{1, 3}$) для горизонтально-слоистых анизотропных сред в произвольной точке x_3. Формулы представлены в таком виде, который позволяет при послойном пересчете получать требуемые величины без накопления ошибок округления, поскольку формулы содержат только экспоненты, показатели которых имеют отрицательные действительные части. В каждом слое вычисления сводятся к решению алгебраического уравнения четвертого порядка, к умножению, сложению и обращению неособенных матриц второго порядка. Визуальный анализ ключевых формул показывает, что отсутствуют выражения, содержащие особенности типа $0\cdot\infty$ или $0/0$. Не существует ограничений на мощности слоев: модель среды может содержать как очень толстые, так и очень тонкие слои. Алгоритм численного решения прямой задачи может быть легко распараллелен, поскольку вычисления ведутся независимо для каждой частоты.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00559), интеграционными грантами СО РАН, УрО РАН и ДВО РАН (проекты 16 и 48).

ЛИТЕРАТУРА

Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Численные методы в геофизике. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.

Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т. 24, № 2, с. 272—286.

Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М., Недра, l965, 165 с.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Наука, 1988, 548 с.

Гнасенко Л.Б., Маркина Е.А. Электромагнитное поле низкочастотного диполя в горизонтально-слоистой среде // Учен. зап. ЛГУ, Сер. физ. и геол. наук, 1967, № 333, вып. 17, с. 201—226.

Годунов С.К. Матричная экспонента, матрица Грина и условия Лопатинского. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1983, 77 с.

Давыдов В.М. Теория низкочастотных электромагнитных полей в средах с тонкими анизотропными слоями и ее геофизические приложения. М., Недра, 1971, 330 с.

Дмитриев В.И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование, Вып. 10. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 55—65.

Дмитриев В.И., Федорова Э.А. Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах // Вычислительные методы и программирование, Вып. 32. М., Изд-во Москв. ун-та, 1980, с. 150—183.

Карчевский А.Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика, 2005а, т. 46 (3), с. 339—351.

Карчевский А.Л. Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред // Сибирские электронные математические известия, 2005б, т. 2, с. 23—61. (pdf-файл статьи: http://semr.math.nsc.ru/V2/v2p23—61.pdf)

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб., Лань, 2006, 432 с.

Потапов А.П., Кнеллер Л.Е. Решение прямой и обратной задач индукционного каратажа для сред с произвольным и дискретным распределением проводимости по глубине // Геология и геофизика, 1990 (5), с. 122—130.

Светов Б.С. Электродинамические основы квазистационарной геоэлектрики. М., ИЗМИРАН, 1984, 183 с.

Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. М., Наука, 1988, 344 с.

Семенов А.С., Новожилова М.Е. Поле вертикального электрического диполя в слоистой анизотропной среде // Вопросы разведочной геофизики, 1964, вып. 3, с. 51—96.

Семенов А.С., Новожилова М.Е., Бхаттачариа Б.Б. Поле погруженного линейного заряженного проводника на границе анизотропного полупространства // Учен. зап. ЛГУ, 1974, № 382, с. 45—63.

Табаровский Л.А. Электромагнитные поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типа в многослойных средах // Электромагнитные исследования скважин. Новосибирск, Наука, 1979, с. 225—233.

Табаровский Л.А., Эпов М.И. Электромагнитные поля гармонических источников в слоистых анизотропных средах // Геология и геофизика, 1977 (1), с. 101—109.

Табаровский Л.А., Эпов М.И., Кагановский А.М. Фокусирующие системы индукционного каротажа в анизотропных средах // Геология и геофизика, 1977 (9), с. 105—113.

Тихонов А.Н. О распространении переменного электромагнитного поля в слоистой анизотропной среде // Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 5, с. 967—970.

Тихонов А.Н., Шахсуваров Д.Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах // Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1956, № 3, с. 251—254.

Фатьянов А.Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1989, 43 с. (Препринт / ВЦ СО АН СССР, № 857).

Фатьянов А.Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР, 1990, т. 310, № 2, с. 323—327.

Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР, 1988, т. 301, № 4, с. 834—839.

Федоров А.И. Математическое моделирование электромагнитных полей в слоистых средах с наклоном осей анизотропии электропроводности: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, ОИГГМ СО РАН, 2005, 16 с.

Федоров А.И., Эпов М.И. Определение элементов тензора электропроводности пород по данным электромагнитного каротажа // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005, т. 8, № 1(21), с. 97—109.

Четаев Д.Н. О поле низкочастотного электрического диполя, лежащего на поверхности однородного анизотропного проводящего полупространства // Журн. техн. физики, 1962, т. 32, № 11, с. 1342—1348.

Четаев Д.Н. Новый метод решения задач электродинамики анизотропных сред // Изв. АН СССР, Физика Земли, 1966а, № 4, с. 45—51.

Четаев Д.Н. Об электромагнитных потенциалах в слоисто-анизотропных средах // Изв. АН СССР, Физика Земли, 1966б, № 10, с. 48—61.

Эпов М.И., Ельцов И.Н. Релаксация электромагнитного поля дипольного источника в проводящем слоистом пласте, погруженном в изолятор // Геология и геофизика, 1991 (10), с. 126—129.

Kaufman A.A., Keller G.V. Methods in geochemistry and geophysics. Inductive mining prospecting. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, Elsevier, 1985, 620 p.

Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space // Proceedings of the International Conference „Problems of Geocosmos“ (St. Petersburg, 3—8 June 2002). SPb., 2002, p. 320—323.

Tabarovsky A.L., Epov M.I., Rabinivich M.B. Measuring formation anisotropy using multifrequency processing of transverse induction measurments // SPE Ann. Tech. Conf. and Exh., 2001.

Рекомендована к печати 7 декабря 2006 г.
С.В. Гольдиным

Поступила в редакцию 28 сентября 2005 г.,
после доработки — 9 августа 2006 г.