ПМТФ, № 1, 1962

О СОСТОЯНИЯХ С АНИЗОТРОПНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В РАЗРЕЖЕННОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ГАЗЕ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев

(*Новосибирск*)

К числу состояний газа, в которых возможно анизотропное распределение по скоростям, относятся, в частности, плазма в магнитном поле при пренебрежении столкновениями и пучок заряженных частиц, проходящий через плазму.

Исследование таких состояний особенно интересно для релятивистского газа, где длина свободного пробега частиц много больше, чем в нерелятивистском газе той же плотности, а потери частицами энергии при излучении существенно влияют на их движение.

§ 1. Тензор энергии импульса с анизотропным давлением. Если характерные длины в рассматриваемых процессах много меньше длины свободного пробега, то в релятивистском кинетическом уравнении можно пренебречь столкновительным членом и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left\{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция распределения по координатам и импульсам; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля соответственно; остальные обозначения общеприняты.

Ограничимся случаем, когда электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и $E < H$. Тогда, как известно [1]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — скорость той системы отсчета относительно лабораторной, в которой электрическое поле равно нулю. Легко видеть, что в сильном магнитном поле, когда ларморовский радиус частиц мал по сравнению с другими характерными размерами задачи, в уравнении (1.1) основным является член с силой Лоренца. В этом случае, разлагая функцию распределения по степеням ларморовского радиуса (см., например, [2]) и удерживая в нулевом приближении только член с силой Лоренца, имеем

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V})\times\mathbf{H}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{1.3}$$

Решение (1.3) есть [3]

$$f_0 = f_0(u_i U_i,\ (\varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm})^2) \qquad \left(u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{1.4}$$

Здесь U_i — четырехскорость, соответствующая усредненному движению; F_{lm} — тензор электромагнитного поля, ε_{iklm} — антисимметричный единичный тензор четвертого ранга (греческие индексы пробегают три значения, а латинские четыре; по дважды повторяющимся индексам идет суммирование).

При помощи (1.4), интегрируя по трехмерному объему импульсов, запишем выражения для $T_{ik}^{(1)}$ — тензора энергии импульса газа

$$T_{ik}^{(1)} = ic \int p_i \frac{u_k}{u_4} f \cdot d\mathbf{p} \tag{1.5}$$

Как легко видеть в собственной системе отсчета (т. е. там, где $V_\alpha = 0$), тензор $T_{ik}^{(1)}$ диагонален. Отсюда в лабораторной системе отсчета имеем

$$T_{ik}^{(1)} = (\varepsilon + P_\perp)U_iU_k - P_\parallel R_iR_k + P_\perp(\delta_{ik} + R_iR_k) \tag{1.6}$$

Здесь $P_\perp$ и $P_\parallel$ — давления в собственной системе отсчета соответственно перпендикулярно и параллельно магнитному полю, которые при отсутствии столкновений могут быть различными; ε — внутренняя энергия единицы объема в собственной системе отсчета, а

$$R_i = \frac{1}{2}(H^2 - E^2)^{-1/2}\varepsilon_{iklm}U_kF_{lm}$$

В собственной системе отсчета с осью z вдоль магнитного поля все компоненты вектора R_i равны нулю, кроме $R_3 = i$, и тензор (1.6), как и следовало ожидать, принимает диагональный вид.

Из (1.6) также непосредственно видно, что при $P_\parallel = P_\perp$ тензор энергии импульса принимает свой обычный вид [1].

Заметим, что

$$R_i^2 = -1, \qquad R_iU_i = 0$$

Применим (1.6) для отыскания скоростей магнитогидродинамических волн малой амплитуды в простейших случаях, когда волна распространяется либо параллельно, либо перпендикулярно магнитному полю. Используем, как обычно (см., например, [4]), непрерывность на разрывах соответствующих компонент полного тензора энергии импульса зарядов и электромагнитного поля

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} \tag{1.7}$$

Здесь $T_{ik}^{(2)}$ — тензор энергии — импульса электромагнитного поля

$$T_{ik}^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F^2{}_{lm}\delta_{ik}\right) \tag{1.8}$$

В случае перпендикулярной волны выберем ось $x = x_1$ вдоль направления распространения волны, а ось $z = x_3$ вдоль H. Используя (1.2), (1.6), (1.8), а также граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля, запишем условия непрерывности на разрыве E_y и компонент T_{11}, T_{14} в системе отсчета, где разрыв покоится

$$\left\{(\varepsilon + P_\perp)U_1^2 + P_\perp + \frac{H^2}{8\pi}\right\} = 0 \tag{1.9}$$

$$\left\{(\varepsilon + P_\perp)U_1U_4 + i\frac{VH^2}{4\pi c}\right\} = 0 \tag{1.10}$$

$$\{HV\} = 0 \tag{1.11}$$

Здесь фигурные скобки обозначают разность значений соответствующей величины на разрыве.

В магнитогидродинамической волне скачки величин бесконечно малы и потому их отношения можно заменять на производные. Отметим также известное обстоятельство, что в магнитогидродинамической волне все величины могут быть выражены как функции одной из них. Выбирая в качестве независимой переменной скорость V и производя вычисления, вполне аналогичные соответствующим в [4], получим выражение для скорости магнитогидродинамической волны

$$V = c\sqrt{\frac{s_\perp^2 + r^2}{1 + r^2}}, \quad r^2 = \frac{H^2}{4\pi(\varepsilon + P_\perp)}, \quad s_\perp^2 = \left[\frac{\partial P_\perp}{\partial \varepsilon}\right]_a \tag{1.12}$$

(Здесь индекс а означает, что производная должна быть взята для адиабатического процесса.)

Для случая параллельной волны выберем ось x_3 вдоль направления распространения волны. Условия для компонент T_{11} и T_{14} теперь принимают вид

$$\{(\varepsilon + P_\parallel) U_3^2 = P_\parallel\} = 0, \qquad \{(\varepsilon + P_\parallel) U_3 U_4\} = 0 \tag{1.13}$$

Уравнения (1.13), как и для аналогичного случая с изотропным давлением [4], не содержат H и их решение для бесконечно малого скачка дает скорость звука, распространяющегося вдоль магнитного поля

$$V = c\sqrt{(\partial P_\parallel / \partial \varepsilon)_a} \tag{1.14}$$

§ 2. Учет столкновений. В работе [5] было получено релятивистское кинетическое уравнение при учете столкновений, которое описывает передачу энергии и импульса от одного газа к другому. Из результатов [5] легко получить характерное время рассеяния τ_D релятивистских электронов на нерелятивистских частицах

$$\tau_D = \frac{m^2 v^3 \gamma^2}{8\pi (ee')^2 L n'}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.1}$$

Здесь e, m, v — заряд, масса и скорость электронов, e', n' — заряд и плотность нерелятивистских частиц; L — кулоновский логарифм.

Запишем кинетическое уравнение, когда внешние поля отсутствуют и распределение однородно по координатам

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\alpha} \tag{2.2}$$

Здесь [5]

$$I_\alpha = 2\pi (ee')^2 L \int pp' \frac{W_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+u'^2}} \left(f \frac{\partial f'}{\partial p_\beta'} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\right) \tag{2.3}$$

В случае нерелятивистских частиц ($u_3' \ll 1$, $u_4' = i$) имеем

$$W_{\alpha\beta} \approx \frac{1+u^2}{cu^3}(u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \qquad (n^2 \equiv u_\alpha^2) \tag{2.3}$$

Считая нерелятивистские ионы бесконечно тяжелыми и упрощая (2.3), имеем для (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2\pi (ee')^2 L}{m^2 c^2} n' \frac{\partial}{du_\alpha}\left(\frac{W_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+u^2}} \frac{\partial f}{\partial u_\beta}\right) \tag{2.5}$$

Используя соотношение

$$[\mathbf{u}\, \nabla_u]^2 f = \triangle_{\vartheta,\varphi} f$$

$\triangle_{\vartheta,\varphi}$ — угловая часть лапласиана в пространстве импульсов), приведем (2.5) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\tau_D} \triangle_{\vartheta,\varphi} f, \qquad \triangle_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2.6}$$

Учтем теперь влияние столкновений на поведение функции распределения с начальной анизотропией по скоростям. В качестве примера функций (1.4) рассмотрим [3]

$$f = An \exp \{-\sigma(\sqrt{1+u^2} + \sqrt{1 + (\sigma_1 u_z / \sigma)^2})\} \tag{2.7}$$

Здесь A — нормировочный множитель, σ и σ_1 — параметры распределения, n — плотность в собственной системе отсчета.

В случае слабой анизотропии $(\sigma_1^2 / \sigma^2 \overline{u_z}^2 \ll 1)$ получаем из (2.7)

$$f = An\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma} u_z^2\right) \exp(-\sigma\sqrt{1+u^2}) \tag{2.8}$$

Решая (2.6) при начальном условии (2.8) и учитывая, что рассматриваемое распределение обладает азимутальной симметрией, получим

$$f(t, u, \vartheta) = An \exp(-\sigma\sqrt{1+u^2}) \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{\sigma_1^2}{6\sigma} u^2 \left[P_0(\cos\vartheta) + 2P_2(\cos\vartheta) \exp\left(-\frac{3t}{2\tau_D}\right)\right]\right\} \tag{2.9}$$

Здесь $P_\nu(\cos\vartheta)$ — полиномы Лежандра соответствующего индекса. Из (2.9) видим, что за времена $\sim\tau_D$ устанавливается изотропное распределение по импульсам.

При помощи (2.6) рассмотрим рассеяние пучка релятивистских электронов на ионах. Начальную функцию распределения электронов выберем в виде

$$f(t, \mathbf{p})_{t=0} = n_1 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \frac{n_1}{2\pi p_0^2}\,\delta(p - p_0)\,\delta(1 - \cos\vartheta) \tag{2.10}$$

Здесь p_0 — начальный импульс электронов в пучке; n_1 — плотность пучка в лабораторной системе; ось z направлена вдоль $\mathbf{p}_0$.

Пользуясь разложением

$$\delta(1 - \cos\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

найдем решение (2.6) в виде

$$f(t, p, \vartheta) = \frac{n_1}{2\pi p_0^2}\,\delta(p - p_0) \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{l(l+1)}{4\tau_D}\,t\right) P_l(\cos\vartheta) \tag{2.11}$$

Из (2.11) видно, что анизотропия пучка снимается за то же время τ_D, что и анизотропия распределения (2.8).

§ 3. Влияние магнитотормозного излучения. В магнитном поле в случае, когда $\gamma^2 \gg 1$, имеем [1]

$$\tau^* = \frac{3}{2}\,\frac{m^3 c^7}{e^4 H^2 v_\perp^2 \gamma} \qquad (v_\perp \perp H) \tag{3.1}$$

Время τ^* характеризует замедление частиц при излучении. Порядок отношения времен

$$\frac{\tau_D}{\tau^*} \approx \frac{\gamma^3}{\beta L} \qquad \left(\beta = \frac{mc^2 n}{H^2/8\pi}\right) \tag{3.2}$$

Поэтому столкновениями можно пренебречь, если β не очень велико; например, $\beta \approx 1$ при $n' \approx 10^{12}$ $см^{-3}$, $H \approx 10^4$ Ое.

Кинетическое уравнение для однородной, прозрачной плазмы запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{F}^* \cdot f) = 0 \tag{3.3}$$

где $\mathbf{F}^*$ — сила торможения излучением. Ограничиваясь ультрарелятивистским случаем, когда

$$\mathbf{F}^* = -\frac{M p_\perp^2 \mathbf{p}}{p}, \qquad M = \frac{2}{3}\frac{e^4 H^2}{m^4 c^6} \tag{3.4}$$

получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 2Mpp_\perp^2 \frac{\partial f}{\partial p^2} - 2M\frac{p_\perp^4}{p}\frac{\partial f}{\partial p_\perp^2} = 4M\frac{p_\perp^2}{p} f \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) эквивалентно системе уравнений характеристик

$$dt = -\frac{dp^2}{2Mpp_\perp^2} - -\frac{dp_\perp^2}{2Mp_\perp^4 / p} = \frac{df}{4Mp_\perp^2 f / p} \tag{3.6}$$

Выбирая в качестве начальной функции распределения (2.7) и учитывая, что рассматривается ультрарелятивистский случай, получим решение (3.5)

$$f(p,t) = nA\left(1 - M\frac{p_\perp^2}{p}t\right)^{-4} \exp\left\{-\sigma\left[\frac{p / mc}{|1 - Mp_\perp^2 t / p|} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma mc}\right)^2 p_\parallel^2 \left(1 - M\frac{p_\perp^2}{p}t\right)^{-2}}\right]\right\} \tag{3.7}$$

Точность описания электронного газа при помощи (3.7) повышается при уменьшении σ. При $\sigma_1 = 0$ (3.7) переходит в решение с начальной максвелловской функцией распределения. При этом $\sigma = mc^2 / T$ (T — температура в энергетических единицах).

Благодарим Г. И. Будкера, В. Л. Покровского и Б. В. Чирикова за полезные обсуждения.

Поступила 21 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960.
2. Чу Г., Гольдбергер М. и Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. Пробл. совр. физ., 1957, т. 7. стр. 139.
3. Заславский Г. М., Моисеев С. С. О поведении некоторых состояний плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. ПМТФ, 1961, № 6.
4. Гофман Ф. и Теллер Е. Магнитогидродинамические ударные волны. Пробл. совр. физ., 1951, т. 2. стр. 47.
5. Беляев С. Т. и Будкер Г. И. Релятивистское кинетическое уравнение. ДАН СССР, 1956, т. 107, стр. 807.