ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПЛАСТАХ, ГРАНИЧАЩИХ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛАСТАМИ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Новосибирск)

При рассмотрении движения грунтовых вод в напорных пластах, граничащих со слабопроницаемыми грунтами, приходят к линейному дифференциальному уравнению для напора [1,2]. В случае же безнапорного движения в верхнем водоносном пласте получается нелинейное уравнение. Здесь применяется два способа линеаризации и проводится их сопоставление с точным решением для плоского движения. Второй способ линеаризации применяется к осесимметричным движениям.

1. Плоские движения. Пусть имеем водоносный пласт мощности a, граничащий с пластом мощности a_0 (фиг. 1), коэффициент фильтрации которого k_0 очень мал по сравнению с коэффициентом фильтрации k водоносного пласта. Границы всех пластов — горизонтальные плоскости, напор основного водоносного пласта h, напор верхнего водоносного пласта постоянный и равен H_0. Тогда принимают, что вертикальная скорость просачивания в наш слой w_0 выражается по закону Дарси в виде

$$w_0 = \frac{k_0}{a_0}(H_0 - h) \qquad (1.1)$$

Точно так же из нижнего пласта (фиг. 1) будет происходить просачивание со скоростью

$$w_1 = \frac{k_1}{a_1}(H_1 - h) \qquad (1.2)$$

По закону Дарси горизонтальная скорость в каком-нибудь сечении x равна $-k\, dh/dx$, расход жидкости $q(x)$ в сечении x будет

$$q(x) = -ka\frac{dh}{dx} \qquad (1.3)$$

Изменение расхода $q(x)$ вдоль оси x (dq/dx) компенсируется притоком воды через верхний и нижний пласты, w_0 и w_1, что выражается уравнением

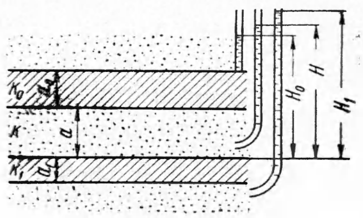
$$ka\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{k_0}{a_0}(H_0 - h) + \frac{k_1}{a_1}(H_1 - h) = 0 \quad (1.4)$$

Введем обозначения

$$\frac{k_0/a_0 + k_1/a_1}{ka} = \omega^2, \quad \frac{k_0}{a_{\text{э}}}H_0 + \frac{k_1}{a_1}H_1 = H \quad (1.5)$$

Тогда уравнение (1.4) можно будет переписать

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \omega^2(h - H) = 0 \qquad (1.6)$$



Фиг. 1

Уравнение (1.6) имеет частное решение $h = H$, где H определяется выражением (1.5); соотношение (1.5) для H должно выполняться при равновесии жидкости, находящейся в трех водопроницаемых пластах и двух плохо проницаемых (фиг. 1)

Нас будет интересовать решение уравнения (1.6), соответствующее граничным условиям

$$h = H_0 \quad \text{при } x = 0, \qquad h = H \quad \text{при } x = \infty \qquad (17)$$

Оно имеет вид

$$h = H - (H - H_0)e^{-\omega x} \tag{1.8}$$

Нетрудно найти формулу для дебита при $x = 0$

$$q = q(0) = -ka\frac{dh}{dx}\bigg|_{x=0} = -ka(H - H_0)\,\omega \tag{1.9}$$

Это выражение можно привести к виду формулы Дюпюи для случая совершенно непроницаемых водоупоров

$$q = -\frac{ka(H - H_0)}{L} \tag{1.10}$$

если считать, что

$$L = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{ka}{k_0 / a_0 + k_1 / a_1}} \tag{1.11}$$

Если движение является безнапорным и происходит в верхнем водоносном пласте, подстилаемом слабопроницаемым пластом мощности a_1 с коэффициентом фильтрации k_1, то выражение (1.2) сохраняется, формула же для расхода потока в сечении x будет

$$q(x) = -kh\frac{dh}{dx} \tag{1.12}$$

При учете испарения, считая интенсивность его линейной функцией от h, также получают выражение вида (1.1), но с другими значениями постоянных k_0, a_0 и H_0 и (см. [5]). Для простоты мы ограничимся лишь величиной w_1 и тогда напишем уравнение для h в виде

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) - \alpha^2(h - H) = 0 \qquad \left(\alpha^2 = \frac{k_1}{ka_1}\right) \tag{1.13}$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид [4]

$$\int\frac{h\,dh}{\sqrt{C_1 + {}^2/_3\alpha^2h^2(h - {}^3/_2H)}} = x + C_2 \tag{1.14}$$

Для того чтобы выполнялось условие $h = H$ при $x = \infty$, необходимо, чтобы $h = H$ было двойным корнем подкоренного полинома. При выполнении этого условия третий корень будет $h = -{}^1/_2\,H$. Если еще потребовать, чтобы $h = H_0$ при $x = 0$, то получим уравнение для h

$$\sqrt{H + 2h} - \sqrt{H + 2H_0} + \sqrt{\frac{H}{3}}\ln\left[\frac{H - h}{H + H_0}\left(\frac{\sqrt{H + 2h} + \sqrt{3H}}{\sqrt{H = 2H_0} + \sqrt{3H}}\right)^2\right] = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}x \tag{1.15}$$

и выражение для $q = q(0)$

$$q = -\frac{\alpha k}{\sqrt{3}}(H - H_0)\sqrt{2H + H_0} \tag{1.16}$$

Его можно представить в виде

$$q = \frac{k(H^2 - H_0^2)}{2L} \qquad \left(L = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{ka_1}{k_1}}\frac{H + H_0}{\sqrt{H + 2H_0}}\right) \tag{1.17}$$

Легко видеть, что для $0 \leqslant H_0 \leqslant H$ удовлетворяется неравенство

$$0.866\sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}} \leqslant L \leqslant \sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}} \tag{1.18}$$

Теперь подвергнем уравнение (1.13) линеаризации двумя способами.

Первый способ линеаризации. Множитель h под знаком производной заменим постоянной H° — некоторым средним значением h между H_0 и H. Тогда (1.13) примет вид

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \omega^2(h - H) = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{\alpha^2}{H^\circ} = \frac{k_1}{ka_1H^\circ}\right) \tag{1.19}$$

его интеграл, удовлетворяющий условиям (1.6), будет

$$h = H - (H - H_0)\, e^{-\omega x} \qquad (1.20)$$

Формула для дебита получится в следующем виде:

$$q = -kH_0 (H - H_0)\,\omega = -k\,\frac{H^2 - H_0^2}{2L_1} \qquad (1.21)$$

при

$$L_1 = \sqrt{\frac{ka_1}{k_1}}\,\frac{(H + H_0)\sqrt{H^\circ}}{2H_0} \qquad (1.22)$$

Второй способ линеаризации. Положим $h^2 = u$ и перепишем (1.13)

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\alpha^2\left(\sqrt{u} - H\right) = 0 \qquad (1.23)$$

Разложение функции $\sqrt{u}$ в ряд по степеням разности $u - u_0$, где u_0 — произвольное число, имеет вид

$$\sqrt{u} = \sqrt{u_0} + \frac{1}{2\sqrt{u_0}}(u - u_0) - \frac{(u - u_0)^2}{2u_0\sqrt{u_0}} + \frac{(u - u_0)^3}{16u_0^2\sqrt{u_0}} + \ldots$$

Полагая $u = h^2$, $u_0 = H^2$, получим

$$h - H = \frac{1}{2H}(h^2 - H^2) - \frac{(h^2 - H^2)^2}{8H^3} + \frac{(h^2 - H^2)^3}{16H^5} + \ldots$$

Наибольшее значение имеет $h - H$ при $h = H_0$. Вводя обозначение

$$\frac{H_0}{H} = \gamma \qquad (1.24)$$

Найдем

$$H_0 - H = \frac{1}{2H}(H_0^2 - H^2)\left\{1 + \frac{1 - \gamma^2}{4} + \frac{(1 - \gamma^2)^2}{8} + \ldots\right\} \qquad (1.25)$$

При γ достаточно близких к единице можно приближенно принять

$$h - H \approx \frac{h^2 - H^2}{2H} = (h - H)\,\frac{h + H}{2H} \qquad (1.26)$$

Другими словами, мы умножаем $h - H$ на дробь

$$\frac{h + H}{2H} \qquad (1.27)$$

Эта дробь при изменении h от H_0 до H изменяется от $1/2\,(\gamma + 1)$ до 1. Таким образом, наибольшая погрешность имеет место при $h = H_0$. Если вместо (1.27) взять дробь

$$\frac{h + H}{2H^\circ} \qquad \text{при } H_0 < H^\circ < H \qquad (1.28)$$

то можно более равномерно распределить эту погрешность. Удобно взять $H^0 = 1/2\,(H_0 + H)$, так как дробь

$$\frac{h + H}{H_0 + H}$$

равна единице при $h = H_0$, т. е. вблизи границы водоема.

Заменим дифференциальное уравнение (1.13) таким:

$$\frac{d^2h^2}{dx^2} - \omega^2(h^2 - H^2) = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{k_1}{ka_1H^\circ}\right) \qquad (1.29)$$

Его решение, обращающееся в H_0 при $x = 0$ и в H при $x = \infty$, имеет вид

$$h^2 = H^2 - (H^2 - H_0^2)\, e^{-wx} \qquad (1.30)$$

а формула для дебита

$$q = -\frac{k\,(H^2 - H_0^2)}{L_2} \qquad \left(L_2 = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{ka_1H^\circ}{k_1}}\right) \tag{1.31}$$

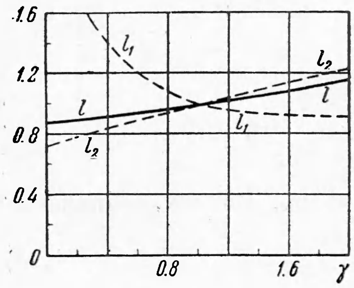
Сопоставим формулы (1.17), (1.22) и (1.31) для величин L, L_1 и L_2, принимая $H^\circ = {}^1/_2\,(H_0 + H)$. Положим

$$L = l\sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}}, \qquad L_1 = l_1\sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}}, \qquad L_2 = l_2\sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}} \tag{1.32}$$

где l, l_1 и l_2 можно записать, при $\gamma = H_0/H$, так:

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1+\gamma}{\sqrt{1+2\gamma}}, \qquad l_1 = \frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\sqrt{2}\,\gamma}, \qquad l_2 = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \tag{1.33}$$

На фиг. 2 представлена зависимость l, l_1, l_2 от γ, причем взяты и значения $\gamma > 1$, соответствующие нагнетательной скважине. Видим, что для вычисления дебита второй способ осреднения значительно лучше.



Фиг. 2

Можно поставить задачу: найти H° так, чтобы $L_2 = L$. Получается

$$H^\circ = \frac{3}{4}\,H\,\frac{(1+\gamma)^2}{1+2\gamma} \tag{1.34}$$

Если мы посмотрим непосредственно на формулу (1.21) для дебита (аналогичная формула была получена для случая осесимметричного притока к скважине А. Н. Мятиевым [3]), то увидим, что при $H_0 = 0$ дебит обращается в нуль. А. Н. Мятиев объяснял это тем, что в скважине нельзя понизить уровень воды больше, чем на половину H, однако на самом деле, как показывает сравнение с точным решением (1.16), это неверно, и дело заключается в неудачном способе линеаризации уравнения.

Рассматриваемую нами задачу можно считать задачей о притоке (одностороннем) в канаве с вертикальным откосом, доходящим до водоупора. Тогда L (или L_2) можно считать областью влияния канавы на дебит скважины. С другой стороны, можно определить условный размер «воронки депрессии», т. е. той области, вне которой практически можно считать движение невозмущенным. Для этого надо найти то значение $x = L^*$, для которого $H - h$ имеет заданное малое значение или составляет заданную долю от H, и т. д. Величина L^* будет больше, чем L, но на протяжении $L < x < L^*$ понижения $s = H - h$ малы и медленно изменяются. Рассмотрение неустановившихся движений дает другой способ определения L^* (см. [6]).

2. Осесимметричный приток к скважине. Дифференциальное уравнение для напора h в безнапорном осесимметричном движении имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rh\frac{dh}{dr}\right) - \alpha^2\,(h - H) = 0 \qquad \left(\alpha^2 = \frac{k_1}{ka_1}\right) \tag{2.1}$$

На основании результатов § 1 более целесообразным здесь должен быть второй способ линеаризации (см. § 1). Полагая $h^2 = = u$, можем написать

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) - \omega^2\,(u - H^2) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\omega^2 = \frac{k_2}{ka_1H^0}, \qquad H_0 < H^0 < H \tag{2.3}$$

Общее решение этого уравнения выражается через функции Бесселя мнимого аргумента. Если поставить условия: $h = H_0$ при $r = r_0$ (радиус скважины), $h = H$ при $r = \infty$, то решение будет иметь вид

$$h^2 = H^2 - (H^2 - H_0^2) \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \tag{2.4}$$

Таблицы значений функции Бесселя $K_0(x)$ можно найти, например, в книге [7].

Для дебита скважиины Q получаем

$$Q = -\pi k r_0 (H^2 - H_0^2) \frac{\omega K_1(\omega r_0)}{K_0(\omega r_0)} \tag{2.5}$$

Для функций $K_0(x)$ и $K_1(x)$ при $x < 0.02$ имеют место приближенные равенства (при вычислениях с тремя значущими цифрами)

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x}, \qquad K_0(x) \approx 0.1159 - \ln x = \ln \frac{1.123}{x}$$

Так как величина ωr_0 обычно бывает достаточно малой, то для дебита скважины можно написать

$$Q = -\frac{\pi k (H^2 - H_0^2)}{\ln (R : r_0)} \tag{2.6}$$

где

$$R = \frac{1.123}{\omega} = 1.123 \sqrt{\frac{kHa_1}{k_1}} \tag{2.7}$$

Эту величину R можно назвать *радиусом влияния скважины на дебит*. То, что обычно называют *радиусом воронки депрессии*, мы обозначим через R^*. Эта величина больше R и, как можно показать с помощью теории неустановившихся движений, имеет такую же структуру, как R, отличаясь от R лишь числовым множителем [6]. Однако, если в формулу для дебита (2.6) подставить вместо R величину R^*, то величина дебита изменится мало.

Укажем, что в случае напорного движения формула для дебита колодца может быть записана в виде

$$Q = \frac{2\pi k a (H - H_0)}{\ln (R : r_0)} \tag{2.8}$$

где

$$R = 1.123 \sqrt{\frac{ka}{k_0 / a_0 + k_1 / a_1}} \tag{2.9}$$

Значения величин a, a_0, a_1, k, k_0, k_1 те же, что на фиг. 1.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения
АН СССР

Поступила
12 11 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Мятиев А. Н. Действие колодца в напорном бассейне подземных вод. Известия Туркменского филиала АН СССР, № 3—4, 1946. Напорный комплекс подземных вод и колодцы. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1947, № 9.
2. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, сб. статей № 9, 1947.
3. Мятиев А. Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод. Изв.АН СССР, Отд. техн. наук, 1948, № 3.
4. Матвеенко Т. И. Задача о фильтрации в одном и двух пластах. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
5. Аверьянов С. Ф. Горизонтальный дренаж при борьбе с засолением орошаемых земель, М., 1959.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. О радиусе влияния скважин. Известия Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск, 1960, № 5.
7. Сегал Б. И. и Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М.—Л., 1948.