

**О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ  
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ  
ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ НА ЕГО ГРАНИЦЕ**

*Ю. П. Желтов, В. С. Кутляров*

(Москва)

При определении геолого-физических параметров трещиновато-пористых пластов и осуществлении их разработки возникает необходимость создания в пластах периодического движения жидкости. Это достигается путем соответствующего изменения расхода закачиваемой в скважины жидкости или ее отбора из скважин.

Ниже рассматриваются одномерные периодические движения однородной жидкости в трещиновато-пористом пласте применительно к задаче об определении геолого-физических параметров пласта.

**§ 1. Движение жидкости в прямолинейном трещиновато-пористом пласте при гармоническом изменении давления на его границе.** Согласно [1], трещиновато-пористая порода представляется как некоторая сплошная среда, состоящая из двух систем — системы трещин и системы блоков, вложенных одна в другую. Между этими системами происходит обмен жидкостью. Уравнения сохранения массы жидкости в системе трещин и системе блоков породы выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial (m_1 \rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}_1) - q = 0, \quad \frac{\partial (m_2 \rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}_2) + q = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $m_1, m_2$  — пористости трещин и блоков,  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  — скорости жидкости в системе трещин и системе блоков,  $\rho$  — плотность жидкости,  $t$  — время,  $q$  — масса жидкости, вытекающей из блоков в трещины за единицу времени на единицу объема трещиновато-пористой породы. В работе [1] было указано следующее выражение для  $q$ :

$$q = \frac{\rho \alpha}{\mu} (p_2 - p_1) \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент [1], характеризующий интенсивность обмена жидкостью систем блоков и трещин,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $p_1$  — давление жидкости в системе трещин,  $p_2$  — давление жидкости в блоках.

Заметим, что это выражение может быть представлено в другом виде, без явного использования величины давления в пористых блоках. Обозначая давление в трещинах через  $p$ , можно написать соотношение между  $q$  и  $p$  в виде

$$q = \frac{\rho \alpha}{\mu} \left( p_0 - p - \frac{1}{\rho \beta_2} \int_0^t q d\theta \right) \quad (1.3)$$

где  $\beta_2$  — упругоемость в системе блоков,  $p_0$  — начальное давление в трещинах.

Интегральный член в (1.3) как раз и имеет смысл давления в блоках, образовавшегося там за счет притока в блоки жидкости. Записывая (1.3) в дифференциальной форме, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu} \left( \frac{1}{\beta_2} q + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Решая (1.4) при условии  $q|_{t=0} = 0$ , имеем

$$q = -\frac{\rho\alpha}{\mu} \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu\beta_2} t\right) \int_0^t \frac{\partial p}{\partial \theta} \exp\left(\frac{\alpha}{\mu\beta_2} \theta\right) d\theta \quad (1.5)$$

Используя, как и в работе [1], выражения для скоростей фильтрации  $V_1$  и  $V_2$  в виде закона Дарси, упругоэластичности в системах блоков и трещин, а также пренебрегая перетоком жидкости по блокам (не учитывая второй член во втором уравнении (1.4)), из (1.1) и (1.2) получаем одно уравнение, описывающее неустановившееся движение однородной слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \eta_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p) - \kappa_1 \nabla^2 p = 0 \quad (1.6)$$

$$\lambda = \frac{\mu}{k_1} \beta_1, \quad \eta_1 = \frac{k_1}{\alpha} \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad \kappa_1 = \frac{k_1}{\mu (\beta_1 + \beta_2)} \quad \left( \begin{array}{l} \beta_1 = \beta_{c1} + m_{01}\beta \\ \beta_2 = \beta_{c2} + m_{02}\beta \end{array} \right) \quad (1.7)$$

Здесь  $k_1$  — проницаемость системы трещин;  $\beta$ ,  $\beta_{c1}$ ,  $\beta_{c2}$  — коэффициенты сжимаемости соответственно жидкости, трещин и блоков;  $m_{01}$ ,  $m_{02}$  — начальные пористости трещин и блоков,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

Рассмотрим теперь периодическое движение жидкости в полубесконечном ( $0 \leq x < \infty$ ) трещиновато-пористом пласте.

В начальный момент времени давление жидкости  $p$  было постоянным  $p = p_0$ . Давление на границе  $x = 0$  изменяется при  $t > 0$  по гармоническому закону ( $p_0$  — амплитуда,  $\omega_0$  — частота колебаний).

$$p(0, t) - p_0 = p_0 \sin \omega_0 t \quad (1.8)$$

Движение жидкости в пласте описывается уравнением (1.6). Решение задачи о фильтрации жидкости при упругом режиме с граничным условием (1.8) в обычной пористой среде рассмотрено в работе [2].

Перейдем к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa_1 T_0}}, \quad \tau = \frac{t}{T_0}, \quad P = \frac{p(x, t) - p_0}{p_0} \quad \left( T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \quad (1.9)$$

Уравнение (1.6), записанное в безразмерных переменных, для плоского одномерного движения имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - b \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1.10)$$

$$\left( a = bc, \quad b = \frac{\tau_0}{T_0}, \quad c = \frac{\delta}{1 + \delta}, \quad \delta = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad \tau_0 = \frac{\eta_1}{\kappa_1} = \frac{\eta}{\kappa}, \quad \eta = \frac{k_1}{\alpha}, \quad \kappa = \frac{k_1}{\mu\beta_2} \right)$$

Здесь  $\tau_0$  — характерное время запаздывания переходных процессов в трещиновато-пористой среде [1].

Согласно [1], параметр  $\eta$  изменяется в пределах от нескольких  $см^2$  до величины порядка  $10^{10} см^2$ , тогда при  $\kappa \approx 10^4 см^2 / сек$  время запаздывания  $\tau_0$  принимает значения от долей секунды до нескольких суток.

Начальные и граничные условия преобразуются следующим образом:

$$P(\xi, 0) = \frac{\partial P(\xi, 0)}{\partial \tau} = P(\infty, \tau) = 0, \quad P(0, \tau) = \sin 2\pi\tau \quad (1.11)$$

Применяя к (1.10), (1.11) преобразование Лапласа, для изображения  $U(\xi, s)$  получим уравнение

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \frac{s(1+as)}{1+bs} U = 0 \quad \left( U(\xi, s) = \int_0^\infty P(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau \right) \quad (1.12)$$

Граничные условия (1.11) принимают вид

$$U(0, s) = \frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}, \quad U(\infty, s) = 0 \quad (1.13)$$

Решение уравнения (1.12) при условиях (1.13) имеет вид

$$U(\xi, s) = \frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2} \exp[-\xi Z(s)] \quad \left( Z(s) = \left( \frac{s(1+as)}{1+bs} \right)^{1/2} \right) \quad (1.14)$$

Обращая (1.14), получаем

$$P(\xi, \tau) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{\gamma_0 - i\nu}^{\gamma_0 + i\nu} \frac{1}{s^2 + 4\pi^2} \exp[-\xi Z(s) + s\tau] ds \quad (1.15)$$

В плоскости  $s = \gamma + i\nu$  подынтегральная функция в (1.15) имеет два полюса  $s = \pm 2\pi i$  и три точки ветвления  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -b^{-1}$ ,  $s_3 = -a^{-1}$ . При вычислении интеграла (1.15) воспользуемся контуром на фиг. 1. Применяя теорему Коши, получаем

$$P(\xi, \tau) = \sin\left(2\pi\tau - \Delta_1 \xi \sin \frac{\Psi}{2}\right) \exp\left(-\Delta_1 \xi \cos \frac{\Psi}{2}\right) + 2 \int_0^{1/b} F(\xi, \tau, \sigma) d\sigma + \\ + 2 \int_{1/a}^{\infty} F(\xi, \tau, \sigma) d\sigma \quad (1.16)$$

Здесь

$$F(\xi, \tau, \sigma) = \frac{\exp(-\sigma\tau) \sin\left[\xi \left(\frac{\sigma(1-a\sigma)}{1-b\sigma}\right)^{1/2}\right]}{\sigma^2 + 4\pi^2} \quad (1.17)$$

$$\Delta_1 = \sqrt[4]{(d_1^2 + d_2^2) d_3^2}$$

$$d_1 = 1 + 4\pi^2 ab, \quad d_2 = 2\pi(b-a)$$

$$d_3 = \frac{2\pi}{1 + 4\pi^2 b^2}, \quad \Psi = \arctg \frac{d_1}{d_2}$$

Для перетока  $q(x, t)$  из блоков в трещины имеем, используя (1.5) и (1.16), выражение

$$q = \frac{\rho k_1 p_{00}}{\mu \kappa_1 T_0} M(\xi, \tau) \quad (1.18)$$

где

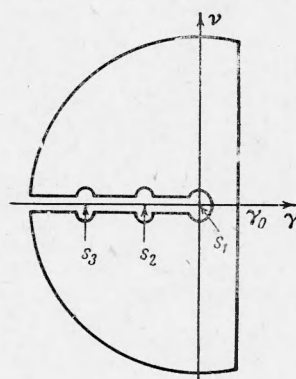
$$M(\xi, \tau) = -\frac{1}{b} \exp\left(-\frac{\tau}{b}\right) \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\partial P(\xi, \theta)}{\partial \theta} \exp \frac{\theta}{b} d\theta = \sum_{j=1}^4 H_j(\xi, \tau)$$

$$H_1(\xi, \tau) = -2\pi(1 + 4\pi^2 b^2)^{-1/2} \sin(2\pi\tau + \arctg 2\pi b - \\ - \Delta_1 \xi \sin^{1/2} \Psi) \exp(-\Delta_1 \xi \cos^{1/2} \Psi) \quad (1.19)$$

$$H_2(\xi, \tau) = 2\pi(1 + 4\pi^2 b^2)^{-1/2} \sin(2\pi\tau - \Delta_1 \xi \sin^{1/2} \Psi) \exp(-\Delta_1 \xi \cos^{1/2} \Psi - \tau/b)$$

$$H_3(\xi, \tau) = 2 \int_{1/a}^{\infty} \frac{\sigma [\exp(-\tau/b) - \exp(-\sigma\tau)]}{(1-b\sigma)(\sigma^2 + 4\pi^2)} \sin[\xi \sqrt{\sigma(1-a\sigma)(1-b\sigma)^{-1}}] d\sigma$$

$$H_4(\xi, \tau) = 2 \int_1^{\infty} \frac{(\sigma-1) \{\exp(-\tau/b) - \exp[-(\sigma-1)\tau(b\sigma)^{-1}]\}}{(\sigma-1)^2 + 4\pi^2 b^2 \sigma^2} \times \\ \times \sin\{\xi \sqrt{(\sigma-1)[c + \sigma(1-c)](b\sigma)^{-1}}\} d\sigma$$



Фиг. 1

Формулы (1.16) — (1.19) дают решение поставленной задачи. Как видно из (1.16), давление, заданное на границе, распространяется в глубь пласта со сдвигом фазы и убывающей с расстоянием амплитудой. Интегралы, входящие в (1.16), исчезают при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. при квазистационарном режиме. Они характеризуют влияние начальных условий на процесс перераспределения давления.

Выпишем приближенные формулы для предельных случаев  $\tau_0 \ll T_0$  и  $\tau_0 \gg T_0$  при больших  $\tau$ .

Случай  $\tau_0 \ll T_0$  отвечает малым частотам  $\omega_0 \ll 2\pi / \tau_0$ . Для интегральных членов в (1.16), (1.18) найдем, следуя методу Лапласа [3], асимптотические формулы при  $\tau \gg 1$  и  $\xi \ll \sqrt{\tau}$ . Удерживая первые члены разложений, получим с учетом  $b \ll 1$  решение (1.16), (1.19) в виде

$$P(\xi, \tau) = \sin(2\pi\tau - \xi\sqrt{\pi}) \exp(-\xi\sqrt{\pi}) + 0.25\pi^{-3/2} \xi\tau^{-3/2} \quad (1.20)$$

$$M(\xi, \tau) = -2\pi \cos(2\pi\tau - \xi\sqrt{\pi}) \exp(-\xi\sqrt{\pi}) - 0.375\pi^{-3/2} \xi\tau^{-5/2}$$

Аналогично для случая больших частот ( $\tau_0 \gg T_0$ ,  $\omega_0 \gg 2\pi / \tau_0$ ,  $b \gg 1$ ) и  $\tau / b \gg 1$  решение принимает вид

$$P(\xi, \tau) = \sin(2\pi\tau - \xi\Delta_2) \exp(-\xi\Delta_3) + 0.25\pi^{-3/2} \xi\tau^{-3/2} \quad (1.21)$$

$$M(\xi, \tau) = -b^{-1} \sin(2\pi\tau - \xi\Delta_2) \exp(-\xi\Delta_3) - 0.375\pi^{-3/2} \xi\tau^{-5/2}$$

Здесь

$$\Delta_2 = (2b)^{-1/2} [c - 1 + (1 + 4\pi^2 b^2 c^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad \Delta_3 = (2b)^{-1/2} [1 - c + (1 + 4\pi^2 b^2 c^2)^{1/2}]^{1/2}$$

Решение (1.20), в согласии с общим выводом, сделанным в работе [1], совпадает с известным решением соответствующей задачи в обычной пористой среде с пьезопроводностью  $\kappa_1$ , так как при  $\tau_0 \ll T_0$  влияние запаздывания на процесс перераспределения давления в трещиноватой породе пренебрежимо мало.

Сравнивая (1.20) и (1.21), нетрудно убедиться, что в трещиноватой породе, так же как и в пористой среде, высокочастотные колебания затухают с расстоянием быстрее низкочастотных. Однако из (1.21) следует, что высокочастотные колебания в трещиноватой породе затухают медленнее колебаний той же частоты в пористой среде с пьезопроводностью  $\kappa_1$ . Это объясняется тем, что при  $\tau_0 \gg T_0$  в движении фактически находится только жидкость, заполняющая трещины, а пьезопроводность в системе трещин больше пьезопроводности породы в целом.

**§ 2. Одномерное осесимметричное движение однородной жидкости в трещиновато-пористом пласте при гармоническом законе изменения дебита на скважине.** Рассмотрим теперь движение однородной жидкости в бесконечном горизонтальном трещиновато-пористом пласте мощностью  $h$ , вскрытом вертикальной скважиной радиуса  $r_0$ .

В начальный момент времени распределение давления в пласте  $p_0(r)$  ( $r$  — расстояние от оси скважины) и дебит скважины  $Q_0$  соответствуют установившемуся режиму фильтрации.

При  $t > 0$  дебит на скважине изменяется во времени по гармоническому закону

$$Q(r_0, t) = Q_0 + Q_1 \sin \omega_0 t \quad (2.1)$$

Граничное условие (2.1) ввиду пренебрежимо малой проницаемости блоков записывается в виде

$$-2\pi \frac{k_1 h}{\mu} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_0} = Q_0 + Q_1 \sin \omega_0 t$$

Переходя к безразмерным переменным

$$\zeta = \frac{r}{\sqrt{\kappa_1 T_0}}, \quad \tau = \frac{t}{T_0}, \quad P = \frac{p(r, t) - p_0(r)}{p_{01}}$$

и записывая уравнение (1.6) для случая одномерного осесимметричного

движения, получаем для определения  $P(\zeta, \tau)$  краевую задачу

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - b \left( \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta \partial \tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2 \partial \tau} \right) - \left( \frac{1}{\zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$P(\zeta, 0) = \frac{\partial P(\zeta, 0)}{\partial \tau} = P(\infty, \tau) = 0, \quad \left( \zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0} = -\sin 2\pi\tau \quad (2.3)$$

$$\left( p_{01} = \frac{Q_1 \mu}{2\pi k_1 h}; \zeta_0 = \frac{r_0}{\sqrt{\kappa_1 T_0}} \right)$$

При решении задачи (2.2), (2.3) снова применим преобразование Лапласа. Изображение

$$U(\zeta, s) = \int_0^{\infty} P(\zeta, \tau) e^{-s\tau} d\tau$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} - \frac{s(1+as)}{1+bs} = 0 \quad (2.4)$$

при граничных условиях

$$U(\infty, s) = 0, \quad \left( \zeta \frac{dU}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0} = -\frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2} \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.4) при условиях (2.5) с учетом  $K_0'(z) = -K_1(z)$  ( $K_0, K_1$  — символы функций Макдональда), имеет вид

$$U(\zeta, s) = \frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2} \frac{K_0[\zeta Z(s)]}{\zeta_0 Z(s) K_1[\zeta_0 Z(s)]} \quad (2.6)$$

По формуле обращения находим

$$P(\zeta, \tau) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{\gamma_0 - i\nu}^{\gamma_0 + i\nu} \frac{1}{s^2 + 4\pi^2} \frac{K_0[\zeta Z(s)] e^{s\tau ds}}{\zeta_0 Z(s) K_1[\zeta_0 Z(s)]} \quad (2.7)$$

При вычислении интеграла (2.7) снова воспользуемся контуром на фиг. 1. Применяя теорему Коши, получаем

$$P(\zeta, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{K_0(\zeta w_1) \exp[i^{1/2}\pi(4\tau - 1)]}{\zeta_0 w_1 K_1(\zeta_0 w_1)} - \frac{K_0(\zeta w_2) \exp[-i^{1/2}\pi(4\tau + 1)]}{\zeta_0 w_2 K_1(\zeta_0 w_2)} \right\} + \int_0^{1/b} \Phi(\zeta, \tau, \sigma) d\sigma + \int_{1/a}^{\infty} \Phi(\zeta, \tau, \sigma) d\sigma \quad (2.8)$$

Здесь

$$\Phi(\zeta, \tau, \sigma) = \frac{\exp(-\sigma\tau)}{(\sigma^2 + 4\pi^2) \zeta_0 g(\sigma)} \frac{J_0[\zeta g(\sigma)] N_1[\zeta_0 g(\sigma)] - N_0[\zeta g(\sigma)] J_1[\zeta_0 g(\sigma)]}{J_1^2[\zeta_0 g(\sigma)] + N_1^2[\zeta_0 g(\sigma)]}$$

$$w_1 = \Delta_1 \exp\left(i \frac{\Psi}{2}\right), \quad w_2 = \Delta_2 \exp\left(-i \frac{\Psi}{2}\right), \quad g(\sigma) = \left(\frac{\sigma(1-a\sigma)}{1-b\sigma}\right)^{1/2}$$

Здесь  $J_0, J_1, N_0, N_1$  — символы функций Бесселя. При больших  $\tau$  интегральные члены в (2.8) могут быть отброшены и для квазистационарного режима давление в трещинах определяется по формуле

$$p(r, t) = p_0(r) + \frac{Q_1 \mu}{4\pi k_1 h} \left\{ \frac{K_0(X_1) \exp[i(\omega_0 t - 1/2\pi)]}{X_{10} K_1(X_{10})} - \frac{K_0(X_2) \exp[-i(\omega_0 t + 1/2\pi)]}{X_{20} K_1(X_{20})} \right\} \quad (2.9)$$

$$X_j = r w_j (\kappa_1 T_0)^{-1/2}, \quad X_{j0} = r_0 w_j (\kappa_1 T_0)^{-1/2}, \quad j = 1, 2$$

Так как  $zK_1(z) \sim 1$  при  $z \rightarrow 0$ , то для малых значений  $X_{10}$  и  $X_{20}$  получаем выражение для  $p(r, t)$  в виде

$$p(r, t) = p_0(r) + \frac{Q_{1\mu}}{4\pi k_1 h} \left\{ K_0(X_1) \exp \left[ i \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \right] - K_0(X_2) \exp \left[ -i \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (2.10)$$

Для величин  $X_{10}$ ,  $X_{20}$  нетрудно получить оценку

$$|X_{j0}| < r_0 \sqrt{2\pi(1+\delta)(\kappa T_0)^{-1}} \quad (j=1, 2) \quad (2.11)$$

Величина  $\delta$  может изменяться в широких пределах. В работе [1] рассмотрен случай  $\delta = 0$ , отвечающий пренебрежимо малой пористости и сжимаемости трещин. Как указано в [4], значения  $\beta_{c1}$  могут достигать величины порядка  $10^2 \beta_{c2}$ . Принимая  $0 \leq \beta_{c1} \leq 10^2 \beta_{c2}$  и учитывая порядок величин  $\beta$  и  $\beta_{c2}$  ( $\beta \approx \beta_{c2} \sim 10^{-4} - 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}^{-1}$ ), получаем  $0 \leq \delta \leq 100$ . Полагая  $r_0 \approx 10 \text{ см}$ ,  $\kappa \approx 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$ ,  $\delta \approx 100$ , получаем из (2.11), что формула (2.10) выполняется с погрешностью не более 5% при  $T_0 \geq 150 \text{ сек}$ .

**§ 3. Определение параметров трещиновато-пористого пласта по кривым изменения давления.** Создание периодических возмущений жидкости в пластах позволяет, как указано авторами [2], определять геолого-физические параметры пластов; возникающие колебания давления могут регистрироваться на стенке скважины-источника колебаний ( $r = r_0$ ) и в произвольной точке пласта, например, в реагирующей скважине ( $r = R$ ).

Воспользуемся формулой (2.10). Рассматривая комбинации параметров пласта и скважины, убеждаемся, что (2.10) содержит гидропроводность в системе трещин  $k_1 h / \mu$ , параметр  $\kappa_1 / r_0^2$  (или  $\kappa_1 / R^2$ ), время запаздывания  $\tau_0$  и отношение упругоёмкостей в системе трещин и блоков  $\delta$ . Определив эти параметры и зная из лабораторных исследований  $\mu$ ,  $m_{02}$ ,  $k_2$ ,  $\beta_{c2}$ ,  $\beta$ , а также  $h$ ,  $R$ , находим  $k_1$ ,  $\kappa_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\alpha$ ,  $r_0$ . Как указывается в работе [1], знание этих величин позволяет оценить средний размер блоков  $l$ . Рассмотрим теперь определение параметров пласта по кривым изменения давления на стенке скважины-источника.

В формуле (2.10) положим  $r = r_0$ . Воспользовавшись приведенными выше оценками, получим, что при указанных значениях величин, входящих в аргументы функции  $K_0$ , можно применить формулу

$$K_0(z) \sim -(\ln 1/2z + 0.577\dots) \quad (3.1)$$

справедливую при малых  $z$ . Используя (3.1), получим из (2.10) выражение для давления на стенке скважины-источника

$$p(r_0, t) - p_0(r_0) = A \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad (3.2)$$

$$A = \frac{Q_{1\mu}}{4\pi k_1 h} \left[ \psi^2 + \left( \ln \frac{1.26\kappa_1 T_0}{r_0^2 \Delta_1^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \text{tg } \varphi = \psi \left( \ln \frac{1.26\kappa_1 T_0}{r_0^2 \Delta_1^2} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

Отсюда при  $\tau_0 = 0$  получаем выражения для  $A$  и  $\text{tg } \varphi$ , приведенные в работе [2], в случае обычной пористой среды.

Зависимость безразмерной амплитуды  $A^\circ = (4\pi k_1 h / Q_{1\mu}) A$  от параметра  $f_0 = r_0^2 / \kappa_1 T_0$  представлена на фиг. 2, где приведены кривые 1 — 6, соответствующие различным значениям  $b$  и  $\delta$  (1 —  $b = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ ; 2 —  $b = 0.1$ ,  $\delta = 1$ ; 3 —  $b = 1$ ,  $\delta = 0.01$ ; 4 —  $b = 1$ ,  $\delta = 1$ ; 5 —  $b = 10$ ,  $\delta = 0.01$ ; 6 —  $b = 10$ ,  $\delta = 1$ ).

Там же приведена кривая (пунктир), отвечающая  $b = 0$ , т. е. обычной пористой среде (с проницаемостью  $k_1$  и пьезопроводностью  $\kappa_1$ ). Отметим, что для фиксированных значений  $f_0$  и  $\delta$  имеет место немонотонное изменение ам-

плитуды давления  $A$  при возрастании  $b$ . При малых  $b$  величина  $A$  убывает и принимает значения, меньшие, чем  $A_0$  — амплитуда давления в обычной пористой среде. Затем с ростом  $b$  амплитуда  $A$  начинает увеличиваться и становится больше  $A_0$ . Разность  $A - A_0$  при больших  $b$  тем больше, чем меньше  $\delta$ .

Имея кривую изменения давления на стенке скважины-источника и сравнивая ее с синусоидой (2.1), получим значения амплитуды  $A$  и угла сдвига фаз  $\varphi$ .

Представляет интерес по результатам измерений на скважине-источнике, без количественного определения параметров среды, дать ответ на вопрос о наличии трещин в пласте в тех случаях, когда это неизвестно заранее. Для обычной пористой среды из (3.3) нетрудно получить соотношение

$$S = \frac{A_1 \sin \varphi_1}{A_2 \sin \varphi_2} = 1$$

справедливое для двух различных значений частот  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$ , причем  $A_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_2$  — амплитуды и углы сдвига фаз соответственно для  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Если среда трещиноватая, то аналогично получим

$$S = \frac{A_1 \sin \varphi_1}{A_2 \sin \varphi_2} = \arctg \frac{1 + (2\pi b_1)^2 c}{2\pi b_1 (1 - c)} \left[ \arctg \frac{1 + (2\pi b_2)^2 c}{2\pi b_2 (1 - c)} \right]^{-1}$$

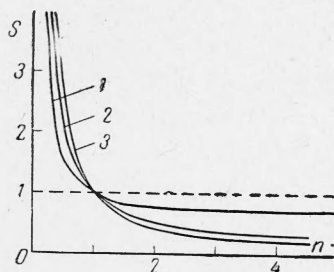
$$\left( b_1 = \frac{\tau_0}{T_{01}}, b_2 = \frac{\tau_0}{T_{02}}, T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}, T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}} \right)$$

Положим  $n = T_{02} / T_{01}$  и рассмотрим функцию

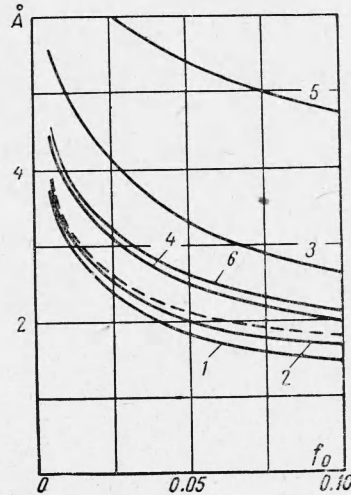
$$S(n) = \arctg \frac{1 + (2\pi b_1)^2 c}{2\pi b_1 (1 - c)} \left[ \arctg \frac{n^2 + (2\pi b_1)^2 c}{2\pi b_1 (1 - c)n} \right]^{-1}$$

Для обычной пористой среды  $S(n) \equiv 1$ .

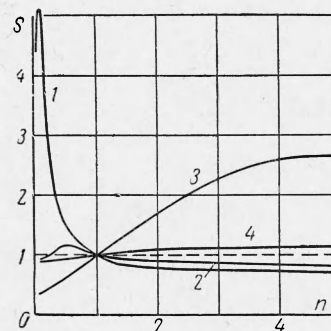
Графики функции  $S(n)$  для различных значений  $b_1$  при  $\delta = 0$ , т. е. для случая пренебрежимо малой упругости трещин, представлены на фиг. 3, где кривые 1, 2, 3 соответствуют  $b_1 = 0.1, 1, 10$ . На фиг. 4 приведены кривые



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

1—4, представляющие зависимость  $S(n)$  при различных значениях  $b_1$  и  $\delta \neq 0$  (1 —  $b_1 = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ ; 2 —  $b_1 = 0.1$ ,  $\delta = 1$ ; 3 —  $b_1 = 10$ ,  $\delta = 0.01$ ; 4 —  $b_1 = 10$ ,  $\delta = 1$ ).

Из приведенных графиков следует, что величина  $S$  для трещиноватой среды при малой упругоэластичности трещин (малые  $\delta$ ) может существенно отличаться от 1. При увеличении  $\delta$  это отличие уменьшается. Таким образом, имея по результатам измерений на скважине зависимость  $S(n)$ , можно сделать выводы о характере трещиноватости породы.

Перейдем к непосредственному определению параметров пласта. Проведем измерения  $A$  и  $\varphi$  для двух различных частот колебаний  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$ , получим, используя (3.3), систему четырех уравнений для определения  $k_1 h / \mu$ ,  $\kappa_1 / r_0^2$ ,  $\tau_0$ ,  $\delta$ . Эта система трансцендентных уравнений может быть решена одним из приближенных методов.

Определение параметров  $\kappa_1 / r_0^2$ ,  $\tau_0$ ,  $\delta$  существенно упрощается, если известна гидропроводность  $k_1 h / \mu$ . Как указывается в работе [5], величина  $k_1 h / \mu$  может быть определена по формуле Дююи методом установившихся отборов или по асимптоте кривой восстановления давления в скважине после ее закрытия. Если  $k_1 h / \mu$  известно, то, измерив  $A$  и  $\varphi$  для частот  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ , получим, используя (3.3), (4.17), систему двух линейных уравнений

$$\omega_{01}^2 u - \omega_{01} \operatorname{tg} \psi_1 v + 1 = 0, \quad \omega_{02}^2 u - \omega_{02} \operatorname{tg} \psi_2 v + 1 = 0 \quad (3.4)$$

относительно неизвестных  $u = \tau_0^2 c$ ,  $v = \tau_0 (1 - c)$ , причем

$$\psi_1 = \frac{4\pi k_1 h}{Q_1 \mu} A_1 \sin \varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{4\pi k_1 h}{Q_2 \mu} A_2 \sin \varphi_2$$

Решив (3.4), найдем затем  $\tau_0$ ,  $\delta$ ,  $\kappa_1 / r_0^2$ .

Рассмотрим теперь определение параметров пласта по кривым изменения давления на стенке реагирующей скважины. В формуле (2.10) положим  $r = R$ . Величина  $R$ , как правило, достаточно велика и

$$\left| \frac{R}{\sqrt{\kappa_1 T_0}} w_j \right| \gg 1 \quad (j = 1, 2)$$

Воспользуемся асимптотическим представлением  $K_0(z)$  при больших  $z$

$$K_0(z) \sim \sqrt{\pi/2z} e^{-z} \quad (3.5)$$

Используя (3.5), получим из (2.10) выражение для давления на реагирующей скважине

$$p(R, t) - p_0(R) = B \sin(\omega_0 t - \Theta)$$

$$B = \frac{Q_1 \mu}{2\pi k_1 h} \left( \frac{\pi \sqrt{\kappa_1 T_0}}{2R\Delta_1} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{R\Delta_1}{\sqrt{\kappa_1 T_0}} \cos \frac{\psi}{2}\right), \quad \Theta = \frac{R\Delta_1}{\sqrt{\kappa_1 T_0}} \sin \frac{\psi}{2} + \frac{\psi}{2}$$

Рассматривая, аналогично предыдущему, частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ , получим систему уравнений для определения  $k_1 h / \mu$ ,  $\kappa_1 / R^2$ ,  $\tau_0$ ,  $\delta$ . В заключение заметим, что рассматриваемый метод требует для своей реализации достаточно чувствительной аппаратуры, регистрирующей изменение давления на скважинах.

Поступила 24 III 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации. Изд. «Недра», 1964.
3. Е в г р а ф о в М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Физматгиз, 1962.
4. Желтов Ю. П. О движении однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах с чисто трещинной пористостью. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Б а н А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.