УДК 517.91

ИНВАРИАНТЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛАПЛАСА

Н. Х. Ибрагимов

Технологический институт Блекинге, 37179 Карлскруна, Швеция

Предлагается решение *проблемы Лапласа,* состоящей в том, чтобы найти все инварианты гиперболических уравнений и построить базис инвариантов. Найдены три новых инварианта первого и второго порядков, а также построены операторы инвариантного дифференцирования. Показано, что новые инварианты вместе с двумя инвариантами, обнаруженными Л. В. Овсянниковым, образуют базис, так что любой инвариант произвольного порядка является функцией базисных инвариантов и их инвариантных производных.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, интегрирование гиперболических уравнений, преобразования эквивалентности, семиинварианты.

Введение. Знаменитые инварианты Лапласа h и k впервые появились в литературе в 1773 г. в работе П. С. Лапласа по теории интегрирования линейных гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Величины h и k уместнее, однако, называть *семиинвариантами*, поскольку они инвариантны только по отношению к линейной подстановке зависимой переменной.

В своем фундаментальном мемуаре [1] об интегрировании линейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0$$

Лаплас ввел в рассмотрение следующие величины:

$$h = a_x + ab - c, \qquad k = b_y + ab - c.$$

Величины h и k не изменяются при линейном преобразовании зависимой переменной $u = \varphi(x,y)v$ и потому впоследствии были названы *инвариантами Лапласа.* Более точным является название *"семиинварианты"* [2], так как h и k инвариантны относительно не всей группы преобразований эквивалентности, а только ее подгруппы. Название "*семиинварианты*" для величин, инвариантных относительно подгрупп, было предложено Лагерром [3] в соответствии с общей теорией инвариантов Кэли. Вопрос о наличии или отсутствии других инвариантов оставался открытым.

Прошло почти 200 лет, прежде чем Л. В. Овсянников [4], исследуя задачу групповой классификации гиперболических уравнений, обнаружил два настоящих инварианта

$$p = \frac{k}{h}, \qquad q = \frac{1}{h}\,\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y},$$

которые не изменяются под действием всех преобразований эквивалентности. Тогда еще не был разработан общий подход к построению инвариантов семейств уравнений с бесконечной группой преобразований эквивалентности, поэтому вопрос о том, исчерпываются ли найденными величинами все инварианты, оставался открытым. Тем самым возникла задача, которую я называю *проблемой Лапласа*: найти все инварианты гиперболических уравнений и построить базис инвариантов.

Общий метод построения инвариантов семейств линейных и нелинейных уравнений с использованием бесконечных групп преобразований эквивалентности был недавно разработан автором [2] (см. также [5]). Этот метод был затем применен к нескольким линейным и нелинейным уравнениям. В частности, его применение к параболическому уравнению

$$u_t + a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u = 0$$

привело к обнаружению следующего инварианта [6]:

$$K = b^2a_x/2 + (a_t + aa_{xx} - a_x^2)b + (aa_x - ab)b_x - ab_t - a^2b_{xx} + 2a^2c_x.$$

В данной работе дается решение проблемы Лапласа об инвариантах гиперболических уравнений. Для построения базиса инвариантов сначала вычисляются все инварианты до второго порядка включительно и находятся следующие три новых инварианта:

$$I = \frac{p_xp_y}{h}, \qquad N = \frac{1}{p_x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\ln\Big|\frac{p_x}{h}\Big|, \qquad H = \frac{1}{p_y}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\ln\Big|\frac{p_y}{h}\Big|.$$

Затем вычисляется общий оператор инвариантного дифференцирования

$$\mathcal{D} = F(p,I)\,\frac{1}{p_x}\,D_x + G(p,I)\,\frac{1}{p_y}\,D_y$$

и доказывается, что из новых инвариантов и инвариантов Овсянникова можно составить базис всех инвариантов, так что любой инвариант произвольного порядка является функцией базисных инвариантов и их инвариантных производных.

Подробное обсуждение метода, используемого ниже, можно найти в [2], а также в [5, гл. 10], где метод иллюстрируется на примерах вычисления инвариантов алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Семиинварианты. Рассматриваются гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными x, y

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

где нижними индексами обозначены частные производные ($u_x = \partial u/\partial x$ и т. д.).

Преобразованием эквивалентности уравнений (1) называется обратимое преобразование переменных:

$$\bar x = f(x,y,u), \qquad \bar y = g(x,y,u), \qquad \bar u = h(x,y,u),$$

при котором уравнение (1) с любыми коэффициентами a, b, c остается линейным и однородным. При этом, вообще говоря, преобразованное уравнение имеет новые коэффициенты $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$.

Множество всех преобразований эквивалентности уравнений (1) представляет собой бесконечную группу, состоящую из линейного преобразования зависимой переменной

$$u = \varphi(x,y)v, \qquad \varphi(x,y) \neq 0 \tag{2}$$

и следующих обратимых замен независимых переменных:

$$\bar x = f(x), \qquad \bar y = g(y), \tag{3}$$

где $f(x)$, $g(y)$, $\varphi(x,y)$ — произвольные функции, а $v(\bar x, \bar y)$ является новой зависимой переменной. Два уравнения вида (1) называются *эквивалентными,* если они могут быть связаны друг с другом подходящим преобразованием эквивалентности (2), (3).

Функции $J = J(a, b, c, a_x, a_y, \ldots)$ переменных a, b, c и их производных будут называться *семиинвариантами* уравнения (1), если эти функции инвариантны только относительно преобразования (2). В этом разделе найдем все семиинварианты. Очевидные семиинварианты x и y здесь не рассматриваются.

Положим $\varphi(x, y) \approx 1 + \varepsilon\sigma(x, y)$, где ε — малый параметр, и рассмотрим бесконечно малое преобразование (2)

$$u \approx [1 + \varepsilon\sigma(x, y)]v.$$

Тогда соответствующее бесконечно малое преобразование производных выглядит так:

$$u_x \approx (1 + \varepsilon\sigma)v_x + \varepsilon\sigma_x v, \qquad u_y \approx (1 + \varepsilon\sigma)v_y + \varepsilon\sigma_y v,$$
$$u_{xy} \approx (1 + \varepsilon\sigma)v_{xy} + \varepsilon\sigma_y v_x + \varepsilon\sigma_x v_y + \varepsilon\sigma_{xy} v.$$

Поэтому имеем

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu \approx (1 + \varepsilon\sigma)v_{xy} + \varepsilon\sigma_y v_x + \varepsilon\sigma_x v_y + \varepsilon\sigma_{xy} v + \\ + (1 + \varepsilon\sigma)av_x + \varepsilon\sigma_x av + (1 + \varepsilon\sigma)bv_y + \varepsilon\sigma_y bv(1 + \varepsilon\sigma)cv$$

и приходим к бесконечно малому преобразованию уравнения (1)

$$v_{xy} + (a + \varepsilon\sigma_y)v_x + (b + \varepsilon\sigma_x)v_y + [c + \varepsilon(\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y)]v = 0.$$

Отсюда видно, что коэффициенты уравнения (1) подвергаются бесконечно малому преобразованию

$$\bar{a} \approx a + \varepsilon\sigma_y, \qquad \bar{b} \approx b + \varepsilon\sigma_x, \qquad \bar{c} \approx c + \varepsilon(\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y)$$

и дают следующий инфинитезимальный оператор:

$$Z = \sigma_y \frac{\partial}{\partial a} + \sigma_x \frac{\partial}{\partial b} + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y)\frac{\partial}{\partial c}. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала вопрос о существовании семиинвариантов вида $J = J(a, b, c)$. Критерий инвариантности $Z(J) = 0$ относительно преобразования (2) имеет вид

$$\sigma_y \frac{\partial J}{\partial a} + \sigma_x \frac{\partial J}{\partial b} + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y)\frac{\partial J}{\partial c} = 0.$$

Поскольку функция $\sigma(x, y)$ произвольна, это уравнение распадается на следующие три уравнения, получаемые путем приравнивания к нулю коэффициентов при σ_{xy}, σ_x, σ_y:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a} = 0.$$

Следовательно, $J = \text{const}$, так что инвариантов вида $J = J(a, b, c)$, отличных от очевидной постоянной J, нет.

Поэтому надо перейти к рассмотрению дифференциальных инвариантов первого порядка, т. е. функций вида $J(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$. Для того чтобы найти такие инварианты, надо взять продолженный оператор (4)

$$Z = \sigma_y \frac{\partial}{\partial a} + \sigma_x \frac{\partial}{\partial b} + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y)\frac{\partial}{\partial c} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial a_x} + \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial a_y} + \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial b_x} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial b_y} + \\ + (\sigma_{xxy} + a\sigma_{xx} + a_x\sigma_x + b\sigma_{xy} + b_x\sigma_y)\frac{\partial}{\partial c_x} + (\sigma_{xyy} + a\sigma_{xy} + a_y\sigma_x + b\sigma_{yy} + b_y\sigma_y)\frac{\partial}{\partial c_y}$$

и решить уравнение

$$ZJ(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) = 0.$$

Приравняв в этом уравнении к нулю сначала коэффициенты при σ_{xxy} и σ_{xyy}, а затем при σ_{xx} и σ_{yy}, получим четыре уравнения

$$\frac{\partial J}{\partial c_x}=0, \qquad \frac{\partial J}{\partial c_y}=0, \qquad \frac{\partial J}{\partial b_x}=0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a_y}=0,$$

из которых следует, что $J = J(a, b, c, a_x, b_y)$. Теперь приравняем к нулю коэффициенты при σ_{xy}, σ_x, σ_y, что дает следующую систему трех уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial c}+\frac{\partial J}{\partial a_x}+\frac{\partial J}{\partial b_y}=0, \qquad \frac{\partial J}{\partial b}+a\,\frac{\partial J}{\partial c}=0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a}+b\,\frac{\partial J}{\partial c}=0.$$

Последние два уравнения этой системы сразу дают $J = J(\lambda, a_x, b_y)$, где $\lambda = ab - c$. Затем первое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial J}{\partial a_x}+\frac{\partial J}{\partial b_y}-\frac{\partial J}{\partial \lambda}=0.$$

Это уравнение имеет два независимых решения:

$$J_1 = a_x - b_y, \qquad J_2 = a_x + \lambda \equiv a_x + ab - c.$$

Введя обозначения $h = J_2$ и $k = J_2 - J_1$, получим два функционально независимых *семиинварианта*, а именно *инварианты Лапласа:*

$$h = a_x + ab - c, \qquad k = b_y + ab - c. \tag{5}$$

Лемма. *Семиинварианты, зависящие от старших производных от a, b, c, являются функциями инвариантов Лапласа* (5) *и их производных любого порядка по x и y.*

Доказательство леммы состоит в простом сравнении числа инвариантов, получаемых дифференцированием инвариантов Лапласа (5), с разностью между числом производных соответствующего порядка функций a, b, c и числом производных того же порядка функции σ.

2. Инварианты второго порядка. Функция $J = J(x, y, a, b, c, a_x, a_y, \ldots)$ переменных x, y и коэффициентов a, b, c вместе с их производными произвольного порядка называется *инвариантом* уравнения (1), если она не изменяется при общем преобразовании эквивалентности (2), (3) зависимой и независимых переменных. Согласно доказанной выше лемме для нахождения наиболее общего инварианта достаточно взять функции вида

$$J(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y, h_{xx}, h_{xy}, h_{yy}, k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}, \ldots) \tag{6}$$

и подчинить их условию инвариантности относительно преобразований (3) независимых переменных.

Бесконечно малое преобразование (3) переменной x имеет вид

$$\bar{x} \approx x + \varepsilon\xi(x) \tag{7}$$

и дает:

$$u_x \approx (1+\varepsilon\xi')u_{\bar{x}}, \qquad u_y = u_{\bar{y}}, \qquad u_{xy} \approx (1+\varepsilon\xi')u_{\bar{x}\bar{y}},$$

где $\xi' = d\xi(x)/dx$. Эти формулы приводят к бесконечно малому преобразованию уравнения (1)

$$(1+\varepsilon\xi')u_{\bar{x}\bar{y}} + a(1+\varepsilon\xi')u_{\bar{x}} + bu_{\bar{y}} + cu = 0,$$

которое может быть переписано, с точностью до первого порядка по ε, в виде (1):

$$u_{\bar{x}\bar{y}} + au_{\bar{x}} + (b - \varepsilon\xi' b)u_{\bar{y}} + (c - \varepsilon\xi' c)u = 0.$$

Отсюда получаются следующие бесконечно малые преобразования коэффициентов уравнения (1):

$$\bar{a} \approx a, \qquad \bar{b} \approx b - \varepsilon\xi' b, \qquad \bar{c} \approx c - \varepsilon\xi' c. \tag{8}$$

Бесконечно малые преобразования (7) и (8) определяют оператор

$$X = -\xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi' b\,\frac{\partial}{\partial b} + \xi' c\,\frac{\partial}{\partial c}. \tag{9}$$

Продолжение оператора (9) на a_x и b_y имеет вид

$$X = -\xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi'(x)\Big[b\,\frac{\partial}{\partial b} + c\,\frac{\partial}{\partial c} + a_x\,\frac{\partial}{\partial a_x} + b_y\,\frac{\partial}{\partial b_y}\Big]$$

и задает следующее действие на инварианты Лапласа:

$$X = -\xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi'(x)\Big[h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k}\Big]. \tag{10}$$

Мы хотим здесь найти все инварианты (6), зависящие от производных h и k до второго порядка включительно. Поэтому вычислим второе продолжение оператора (10) с помощью общей процедуры и получим

$$\begin{aligned} X = &-\xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi' h\,\frac{\partial}{\partial h} + \xi' k\,\frac{\partial}{\partial k} + (\xi'' h + 2\xi' h_x)\,\frac{\partial}{\partial h_x} + (\xi'' k + 2\xi' k_x)\,\frac{\partial}{\partial k_x} + \\ &+ \xi' h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + \xi' k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} + (\xi''' h + 3\xi'' h_x + 3\xi' h_{xx})\,\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + (\xi'' h_y + 2\xi' h_{xy})\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + \\ &+ \xi' h_{yy}\,\frac{\partial}{\partial h_{yy}} + (\xi''' k + 3\xi'' k_x + 3\xi' k_{xx})\,\frac{\partial}{\partial k_{xx}} + (\xi'' k_y + 2\xi' k_{xy})\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + \xi' k_{yy}\,\frac{\partial}{\partial k_{yy}}. \end{aligned}$$

Теперь, как и в п. **1**, используем бесконечномерность рассматриваемой алгебры Ли операторов, а именно то, что функция $\xi(x)$, а также все ее производные $\xi'(x)$, $\xi''(x)$, $\xi'''(x)$ произвольны. Вследствие этого записанный выше продолженный оператор распадается на следующие четыре оператора, получаемые выделением коэффициентов при различных производных функции $\xi(x)$:

$$\begin{gathered} X_{\xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_{\xi'''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + k\,\frac{\partial}{\partial k_{xx}}, \\ \begin{aligned} X_{\xi'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k} + 2h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + 2k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} + 3h_{xx}\,\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + \\ + 2h_{xy}\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + h_{yy}\,\frac{\partial}{\partial h_{yy}} + 3k_{xx}\,\frac{\partial}{\partial k_{xx}} + 2k_{xy}\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + k_{yy}\,\frac{\partial}{\partial k_{yy}}, \end{aligned} \\ X_{\xi''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_x} + k\,\frac{\partial}{\partial k_x} + 3h_x\,\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + h_y\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + 3k_x\,\frac{\partial}{\partial k_{xx}} + k_y\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично, бесконечно малое преобразование (3) переменной y

$$\bar{y} \approx y + \varepsilon\eta(y)$$

приводит к оператору

$$Y = -\eta(y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \eta'(y)\Big[h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k}\Big], \tag{12}$$

второе продолжение которого распадается на следующие операторы:

$$Y_\eta = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y_{\eta'''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_{yy}} + k\,\frac{\partial}{\partial k_{yy}},$$

$$Y_{\eta'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k} + h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + 2h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + 2k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} + h_{xx}\,\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + {}$$
$$+ 2h_{xy}\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + 3h_{yy}\,\frac{\partial}{\partial h_{yy}} + k_{xx}\,\frac{\partial}{\partial k_{xx}} + 2k_{xy}\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + 3k_{yy}\,\frac{\partial}{\partial k_{yy}}, \tag{13}$$

$$Y_{\eta''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_y} + k\,\frac{\partial}{\partial k_y} + h_x\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + 3h_y\,\frac{\partial}{\partial h_{yy}} + k_x\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + 3k_y\,\frac{\partial}{\partial k_{yy}}.$$

Из условий инвариантности относительно переносов по x и y ($X_\xi(J) = 0$ и $Y_\eta(J) = 0$) следует, что J в (6) не зависит от x и y. Из вида операторов (13) очевидно также, что оба уравнения

$$h = 0, \qquad k = 0 \tag{14}$$

инвариантны относительно (13). В дальнейшем будем предполагать, что h и k не обращаются в нуль одновременно, например $h \neq 0$. Уравнение $X_{\xi'}J = 0$ для функции $J(h,k)$ дает один из инвариантов Овсянникова

$$p = k/h. \tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что величина p удовлетворяет критерию инвариантности для всех операторов (11) и (13). Далее, из уравнений $X_{\xi'''}(J) = 0$ и $Y_{\eta'''}(J) = 0$ следует, что $h_{xx}, h_{yy}, k_{xx}, k_{yy}$ могут входить в инварианты (6) второго порядка только в следующих комбинациях:

$$r = k_{xx} - p\,h_{xx}, \qquad s = k_{yy} - p\,h_{yy}.$$

Итак, общий вид инвариантов (6) второго порядка сводится к зависимости

$$J(h, p, h_x, h_y, k_x, k_y, h_{xy}, k_{xy}, r, s). \tag{16}$$

Теперь надо записать для функций вида (16) условия инвариантности

$$X_{\xi'}(J) = 0, \qquad X_{\xi''}(J) = 0, \qquad Y_{\eta'}(J) = 0, \qquad Y_{\eta''}(J) = 0, \tag{17}$$

где операторы $X_{\xi'}$, $X_{\xi''}$, $Y_{\eta'}$, $Y_{\eta''}$ переписаны в переменных, входящих в (16), а именно:

$$X_{\xi'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + 2h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + 2k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} + 2h_{xy}\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + 2k_{xy}\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + 3r\,\frac{\partial}{\partial r} + s\,\frac{\partial}{\partial s},$$

$$X_{\xi''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_x} + ph\,\frac{\partial}{\partial k_x} + h_y\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + k_y\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + 3(k_x - ph_x)\,\frac{\partial}{\partial r},$$

$$Y_{\eta'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + 2h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + 2k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} + 2h_{xy}\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + 2k_{xy}\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + r\,\frac{\partial}{\partial r} + 3s\,\frac{\partial}{\partial s}, \tag{18}$$

$$Y_{\eta''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_y} + ph\,\frac{\partial}{\partial k_y} + h_x\,\frac{\partial}{\partial h_{xy}} + k_x\,\frac{\partial}{\partial k_{xy}} + 3(k_y - ph_y)\,\frac{\partial}{\partial s}.$$

Операторы (18) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_{\xi'}, X_{\xi''}] = -X_{\xi''}, \qquad [X_{\xi'}, Y_{\eta'}] = 0, \qquad [X_{\xi'}, Y_{\eta''}] = 0,$$
$$[X_{\xi''}, Y_{\eta'}] = 0, \qquad [X_{\xi''}, Y_{\eta''}] = 0, \qquad [Y_{\eta'}, Y_{\eta''}] = -Y_{\eta''}$$

и, следовательно, образуют базис алгебры Ли. Приведенные выше коммутаторы показывают, что решение системы уравнений (17) удобно начать с уравнений (см. [5, § 4.5.3])

$$\begin{aligned} X_{\xi''}(J) &= h\,\frac{\partial J}{\partial h_x} + ph\,\frac{\partial J}{\partial k_x} + h_y\,\frac{\partial J}{\partial h_{xy}} + k_y\,\frac{\partial J}{\partial k_{xy}} + 3(k_x - ph_x)\,\frac{\partial J}{\partial r} = 0,\\ Y_{\eta''}(J) &= h\,\frac{\partial J}{\partial h_y} + ph\,\frac{\partial J}{\partial k_y} + h_x\,\frac{\partial J}{\partial h_{xy}} + k_x\,\frac{\partial J}{\partial k_{xy}} + 3(k_y - ph_y)\,\frac{\partial J}{\partial s} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Интегрирование характеристической системы

$$\frac{dh_x}{h} = \frac{dk_x}{ph} = \frac{dh_{xy}}{h_y} = \frac{dk_{xy}}{k_y} = \frac{dr}{3(k_x - ph_x)}$$

для первого уравнения (19) показывает, что величины h, p, h_y, k_y, s могут входить в J только в следующих комбинациях:

$$\lambda = k_x - ph_x, \qquad \tau = hh_{xy} - h_x h_y, \qquad \nu = phk_{xy} - k_x k_y, \qquad \omega = hr - 3\lambda h_x.$$

При этом второе уравнение (19) сводится к уравнению

$$Y_{\eta''}(J) = h\,\frac{\partial J}{\partial h_y} + ph\,\frac{\partial J}{\partial k_y} + 3(k_y - ph_y)\,\frac{\partial J}{\partial s} = 0,$$

интегрирование которого показывает, что общее решение уравнений (19) имеет вид $J = J(h, p, \lambda, \mu, \tau, \nu, \omega, \rho)$, где

$$\begin{aligned} \lambda &= k_x - ph_x, \qquad \mu = k_y - ph_y, \qquad \tau = hh_{xy} - h_x h_y,\\ \nu &= phk_{xy} - k_x k_y, \qquad \omega = hr - 3\lambda h_x, \qquad \rho = hs - 3\mu h_y. \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь решаем уравнение $(X_{\xi'} - Y_{\eta'})(J) = 0$, записанное в переменных h, p, λ, μ, τ, ν, ω, ρ:

$$(X_{\xi'} - Y_{\eta'})(J) = \lambda\,\frac{\partial J}{\partial \lambda} - \mu\,\frac{\partial J}{\partial \mu} + 2\omega\,\frac{\partial J}{\partial \omega} - 2\rho\,\frac{\partial J}{\partial \rho} = 0,$$

и видим, что $J = J(h, p, m, \tau, \nu, n, N)$, где

$$m = \lambda\mu, \qquad n = \omega\rho, \qquad N = \omega/\lambda^2. \tag{21}$$

Чтобы завершить интегрирование системы (17), остается решить уравнение

$$X_{\xi'}(J) = h\,\frac{\partial J}{\partial h} + 3\tau\,\frac{\partial J}{\partial \tau} + 3\nu\,\frac{\partial J}{\partial \nu} + 3m\,\frac{\partial J}{\partial m} + 6n\,\frac{\partial J}{\partial n} = 0.$$

В результате получаем следующие шесть независимых инвариантов второго порядка:

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{\tau}{h^3}, \quad Q = \frac{\nu}{h^3}, \quad N = \frac{\omega}{\lambda^2}, \quad M = \frac{n}{h^6}, \quad I = \frac{m}{h^3} \tag{22}$$

при условии, что $h \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Заметим, что каждое из уравнений

$$\lambda \equiv k_x - ph_x = 0, \qquad \mu \equiv k_y - ph_y = 0 \tag{23}$$

инвариантно. В наших вычислениях мы опускаем случаи, когда выполняются уравнения (23) и (14).

Перепишем теперь инварианты (22) в терминах семиинвариантов Лапласа h, k и инварианта Овсянникова $p = k/h$. Из уравнений

$$k_x - ph_x \equiv (hk_x - kh_x)/h = hp_x, \qquad k_y - ph_y \equiv (hk_y - kh_y)/h = hp_y$$

имеем

$$\lambda = k_x - ph_x = hp_x, \qquad \mu = k_y - ph_y = hp_y,$$

$$r = k_{xx} - ph_{xx} = hp_{xx} + 2h_x p_x, \qquad \omega = h^2 p_{xx} - hh_x p_x, \tag{24}$$
$$s = k_{yy} - ph_{yy} = hp_{yy} + 2h_y p_y, \qquad \rho = h^2 p_{yy} - hh_y p_y.$$

Отсюда легко видеть, что

$$q = \frac{\tau}{h^3} = \frac{h_{xy}}{h^2} - \frac{h_x h_y}{h^3} \equiv \frac{1}{h}\,\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y} \tag{25}$$

и что $Q = p^3 \tilde q$, где $\tilde q$ является инвариантом (поскольку p^3 — инвариант) и имеет вид

$$\tilde q = \frac{1}{k}\,\frac{\partial^2 \ln|k|}{\partial x\,\partial y}. \tag{26}$$

Заметим далее, что инвариант

$$M = \frac{\omega}{h^6} = \Big(\frac{p_x}{h}\Big)_x \Big(\frac{p_y}{h}\Big)_y$$

можно заменить другим инвариантом, а именно

$$H = \rho/\mu^2, \tag{27}$$

используя равенства (21)–(24) и тождество $M = NHI^2$, которое следует из соотношения

$$NH = \frac{\omega\rho}{\lambda^2\mu^2} = \frac{\omega\rho}{h^4 p_x^2 p_y^2} = \frac{\omega\rho}{h^6 I^2}.$$

Учитывая определения (20)–(22) и используя уравнения (24), получаем

$$N = \frac{\omega}{\lambda^2} = \frac{h(k_{xx} - ph_{xx})}{(k_x - ph_x)^2} - \frac{3h_x}{k_x - ph_x} = \frac{p_{xx}}{p_x^2} - \frac{h_x}{hp_x} = \frac{1}{p_x}\Big(\ln\Big|\frac{p_x}{h}\Big|\Big)_x. \tag{28}$$

Аналогично переписываем инвариант (27) в виде

$$H = \frac{\rho}{\mu^2} = \frac{p_{yy}}{p_y^2} - \frac{h_y}{hp_y} = \frac{1}{p_y}\Big(\ln\Big|\frac{p_y}{h}\Big|\Big)_y. \tag{29}$$

В результате имеем

$$I = \frac{\lambda\mu}{h^3} = \frac{p_x p_y}{h}\,\cdot \tag{30}$$

Собрав вместе инварианты (15), (25), (26), (28)–(30), в итоге приходим к следующему полному набору инвариантов второго порядка для уравнения (1):

$$p = \frac{k}{h}, \qquad q = \frac{1}{h}\,\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y}, \qquad \tilde q = \frac{1}{k}\,\frac{\partial^2 \ln|k|}{\partial x\,\partial y}; \tag{31}$$

$$N = \frac{1}{p_x}\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\Big|\frac{p_x}{h}\Big|, \qquad H = \frac{1}{p_y}\,\frac{\partial}{\partial y}\ln\Big|\frac{p_y}{h}\Big|, \qquad I = \frac{p_x p_y}{h}. \tag{32}$$

Кроме того, имеются следующие индивидуально инвариантные уравнения (14) и (23):

$$h = 0, \qquad k = 0, \qquad k_x - ph_x = 0, \qquad k_y - ph_y = 0.$$

3. Инвариантное дифференцирование. Теперь найдем инвариантные дифференцирования, которые переводят каждый инвариант уравнения (1) в инварианты того же самого уравнения. Напомню, что для всякой группы, заданной с помощью инфинитезимальных операторов

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha_\nu(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

с n независимыми переменными $x = (x^1, \ldots, x^n)$, существует n инвариантных дифференцирований вида (см. [7, гл. 7], а также [5, § 8.3.5])

$$\mathcal{D} = f^i D_i. \tag{33}$$

Их коэффициенты имеют вид $f^i = f^i(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots)$ и находятся путем решения дифференциальных уравнений

$$X_\nu(f^i) = f^j D_j(\xi^i_\nu), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

В нашем случае операторами X_ν являются (10), (12). Запишем оператор инвариантного дифференцирования (33) в виде

$$\mathcal{D} = f\, D_x + g\, D_y, \tag{35}$$

а уравнения (34) для коэффициентов — в виде

$$\begin{gathered} X(f) = fD_x(\xi(x)) + gD_y(\xi(x)) \equiv -\xi'(x)f, \qquad X(g) = 0, \\ Y(g) = fD_x(\eta(y)) + gD_y(\eta(y)) \equiv -\eta'(y)g, \qquad Y(f) = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Здесь f, g — неизвестные функции x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y, h_{xx}, $\ldots$. Подразумевается, что операторы X и Y продолжены на все производные от h, k, которые входят в рассмотрение.

Начнем со случая, когда $f = f(x, y, h, k)$ и $g = g(x, y, h, k)$. Тогда уравнения (36) дают следующую систему для определения f:

$$\xi\,\frac{\partial f}{\partial x} - \xi'\Big[h\,\frac{\partial f}{\partial h} + k\,\frac{\partial f}{\partial k}\Big] = \xi'(x)f, \qquad \eta\,\frac{\partial f}{\partial y} - \eta'\Big[h\,\frac{\partial f}{\partial h} + k\,\frac{\partial f}{\partial k}\Big] = 0.$$

Используя, как и в п. **2**, тот факт, что ξ, ξ', η, η' являются произвольными функциями, приходим к следующим четырем уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad h\,\frac{\partial f}{\partial h} + k\,\frac{\partial f}{\partial k} = -f, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad h\,\frac{\partial f}{\partial h} + k\,\frac{\partial f}{\partial k} = 0,$$

откуда непосредственно следует, что $f = 0$. Аналогично уравнения (36), записанные для $g = g(x, y, h, k)$, дают $g = 0$. Значит, инвариантных дифференцирований (35) с коэффициентами $f = f(x, y, h, k)$ и $g = g(x, y, h, k)$ нет.

Поэтому продолжим поиск, полагая

$$f = f(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y), \qquad g = g(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y).$$

Продолженные операторы X и Y приводят к операторам (ср. (11) и (13))

$$\begin{gathered} X_\xi = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_{\xi''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_x} + k\,\frac{\partial}{\partial k_x}, \\ X_{\xi'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k} + 2h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + 2k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y} \end{gathered} \tag{37}$$

и, соответственно, к операторам

$$\begin{gathered} Y_\eta = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y_{\eta''} = h\,\frac{\partial}{\partial h_y} + k\,\frac{\partial}{\partial k_y}, \\ Y_{\eta'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + k\,\frac{\partial}{\partial k} + h_x\,\frac{\partial}{\partial h_x} + 2h_y\,\frac{\partial}{\partial h_y} + k_x\,\frac{\partial}{\partial k_x} + 2k_y\,\frac{\partial}{\partial k_y}. \end{gathered} \tag{38}$$

Наличие операторов X_ξ и X_η приводит к тому, что f, g не зависят от x и y. Далее, уравнения (36) распадаются на уравнения

$$X_{\xi'}(f) = -f, \qquad X_{\xi''}(f) = 0, \qquad Y_{\eta'}(f) = 0, \qquad Y_{\eta''}(f) = 0 \tag{39}$$

для функции $f(h, k, h_x, h_y, k_x, k_y)$ и

$$X_{\xi'}(g) = 0, \qquad X_{\xi''}(g) = 0, \qquad Y_{\eta'}(g) = -g, \qquad Y_{\eta''}(g) = 0 \tag{40}$$

для функции $g(h, k, h_x, h_y, k_x, k_y)$. Из них пара уравнений $X_{\xi''}(f) = 0$ и $Y_{\eta''}(f) = 0$ для f и аналогичная пара уравнений $X_{\xi''}(g) = 0$ и $Y_{\eta''}(g) = 0$ для g дают, что f и g зависят только от следующих четырех переменных (ср. с п. **2**):

$$h, \quad k, \quad \lambda = k_x - ph_x = hp_x, \quad \mu = k_y - ph_y = hp_y.$$

Перепишем теперь операторы $X_{\xi'}$ и $Y_{\eta'}$ в переменных h, λ, μ, $p = k/h$:

$$X_{\xi'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + 2\lambda\,\frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu\,\frac{\partial}{\partial \mu}, \qquad Y_{\eta'} = h\,\frac{\partial}{\partial h} + \lambda\,\frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\mu\,\frac{\partial}{\partial \mu} \tag{41}$$

и проинтегрируем уравнения

$$X_{\xi'}(f) = -f, \qquad Y_{\eta'}(f) = 0$$

для функции $f(h, p, \lambda, \mu)$ и аналогичные уравнения

$$X_{\xi'}(g) = 0, \qquad Y_{\eta'}(g) = -g$$

для $g(h, p, \lambda, \mu)$. В результате получим

$$f = \frac{h}{\lambda}\,F(p, I), \qquad g = \frac{h}{\mu}\,G(p, I), \tag{42}$$

где $\lambda = hp_x$, $\mu = hp_y$, а p и I — инварианты (15) и (30):

$$p = \frac{k}{h}, \qquad I = \frac{\lambda\mu}{h^3} = \frac{p_x p_y}{h}.$$

Подстановка выражений (42) в (35) приводит к оператору инвариантного дифференцирования

$$\mathcal{D} = F(p, I)\,\frac{1}{p_x}\,D_x + G(p, I)\,\frac{1}{p_y}\,D_y \tag{43}$$

с произвольными функциями $F(p, I)$ и $G(p, I)$.

Замечание. Наиболее общее инвариантное дифференцирование имеет вид (43) с заменой $F(p, I)$ и $G(p, I)$ на произвольные функции от инвариантов высшего порядка (например, на $F(p, I, q, \tilde{q}, N, H)$ и $G(p, I, q, \tilde{q}, N, H)$), если соответствующие инварианты найдены. Но в этом нет необходимости, достаточно выбрать $F = \text{const}$, $G = \text{const}$.

Полагая в (43) $F = 1$, $G = 0$, а затем $F = 0$, $G = 1$, получаем следующие простые инвариантные дифференцирования в направлениях x и y:

$$\mathcal{D}_x = \frac{1}{p_x}\,D_x, \qquad \mathcal{D}_y = \frac{1}{p_y}\,D_y. \tag{44}$$

Теперь можно построить инварианты высшего порядка с помощью инвариантных дифференцирований (44) и доказать следующее утверждение.

Теорема. *Базис инвариантов произвольного порядка для уравнения* (1) *составляют инварианты*

$$p = \frac{k}{h}, \qquad I = \frac{p_x\,p_y}{h}, \qquad q = \frac{1}{h}\,\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y}, \qquad \tilde{q} = \frac{1}{k}\,\frac{\partial^2 \ln|k|}{\partial x\,\partial y} \tag{45}$$

либо инварианты альтернативного базиса

$$p = \frac{k}{h}, \qquad I = \frac{p_x p_y}{h}, \qquad N = \frac{1}{p_x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\ln\Big|\frac{p_x}{h}\Big|, \qquad q = \frac{1}{h}\,\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y}. \tag{46}$$

Доказательство. Путем несложных вычислений можно прийти к следующим соонoшениям:

$$\mathcal{D}_x(p) = 1, \qquad \mathcal{D}_x(I) = (N + 1/p)I + p(p\tilde{q} - q),$$
$$\mathcal{D}_y(p) = 1, \qquad \mathcal{D}_y(I) = (H + 1/p)I + p(p\tilde{q} - q).$$

Они показывают, что инварианты (46) можно получить из (45) с помощью инвариантных дифференцирований, и наоборот. Следовательно, в качестве базиса всех инвариантов второго порядка (31), (32) можно выбрать либо (45), либо (46). Далее можно показать, используя уравнения (24), что инвариантные дифференцирования $\mathcal{D}_x$ и $\mathcal{D}_y$ базисных инвариантов (45) или (46) дают 6 независимых инвариантов, зависящих от частных производных третьего порядка от h и k. Вместе с тем введение в рассмотрение инвариантов третьего порядка вовлекает 8 производных третьего порядка от h и k. Однако количество условий инвариантности с учетом четвертых производных $\xi^{(iv)}(x)$ и $\eta^{(iv)}(y)$ увеличивается на два уравнения, так что в конечном итоге останется только 6 дополнительных инвариантов — ровно столько, сколько получается инвариантными дифференцированиями. Повторение этих же рассуждений в случае производных любого порядка завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Laplace P. S.** Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles // Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris. 1773/77. P. 341–402; перепечатано: Laplace P. S. Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1893. V. 9. P. 5–68; English translation, N. Y., 1966.
2. **Ibragimov N. H.** Infinitesimal method in the theory of invariants of algebraic and differential equations // Notices of the South African Math. Soc. 1997. V. 29. P. 61–70.
3. **Laguerre E.** Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 1879. V. 88. P. 224–227.
4. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнения Чаплыгина // ПМТФ. 1960. № 3. С. 126–145.
5. **Ibragimov N. H.** Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. Chichester: John Wiley and Sons, 1999.
6. **Ibragimov N. H.** Laplace type invariants for parabolic equations // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 28, N 2. P. 125–133.
7. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 24/X 2003 г.