УДК 532.135

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОНОТОННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

С. В. Осипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: osipov@gorodok.net

Рассматривается нестационарное движение капли максвелловской жидкости, возникающее в среде Максвелла из состояния покоя в результате действия монотонных и периодических сил. На начальном отрезке времени, меньшем времени релаксации, на каплю со стороны жидкости действуют силы упругости; более того, капля сама является вязкоупругим материалом. Найдено решение задачи в первом приближении. Проведен анализ зависимости амплитуды скорости капли и сдвига фазы колебаний от времени релаксации внешней и внутренней сред, а также от частоты колебаний вынуждающей силы. Осуществлен предельный переход по плотности и вязкости внутренней среды.

Ключевые слова: жидкость Максвелла, вязкоупругая среда, время релаксации, периодические силы.

Введение. Движению жидких капель, твердых частиц и пузырьков газа в вязкой несжимаемой жидкости посвящено много работ. Достаточно широко изучено поведение капель и пузырьков под действием термокапиллярных, архимедовых, периодических сил (см., например, [1, 2]). Представляет интерес поведение капель в других, более сложных средах. В настоящей работе рассматривается движение капли, а также пузырька и твердого шарика в вязкоупругой среде. В частности, описан случай жидкости, или тела Максвелла.

Математически максвелловская модель определяется уравнением состояния вида [3]

$$T_{rel}\,\frac{\tilde{d}P}{dt} + P = -pI + 2\mu D,$$

где P — тензор напряжений; $\tilde{d}P/dt = dP/dt + P\cdot W + (P\cdot W)^{\text{т}}$; $W = (\nabla\boldsymbol{v} - \nabla\boldsymbol{v}^{\text{т}})/2$ — производная Яумана, обеспечивающая инвариантность относительно вращения; D — тензор скоростей деформации; p — давление; t — время; v — скорость. Здесь существенную роль играет величина времени релаксации T_{rel}, которая определяет поведение и свойства среды. Если продолжительность эксперимента достаточно мала ($t \ll T_{rel}$), то тело Максвелла ведет себя как твердое тело Гука; при $T_{rel} \ll t$ материал представляет собой ньютоновскую жидкость.

Это свойство среды Максвелла позволяет использовать данную модель для изучения удивительных явлений, подобных тем, что наблюдались в экспериментах [4, 5], где исследовалось поведение двух сферических дисперсных элементов (капель в маловязкой жидкой матрице, твердых частиц в высоковязкой жидкой матрице, воздушных пор в вязкоупругом

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-902.2003.1).

геле). Установлено, что два или более дисперсных элементов в случае их полной изоляции от внешних силовых, а также температурных и концентрационных полей, находясь на расстоянии порядка их размеров, взаимно притягиваются до полного контакта (коагулируют). В опытах [6, 7] показано, что при очень слабых сдвиговых напряжениях ($\tau < \tau_*$) полярные жидкости ведут себя как упругое тело с некоторым пределом текучести τ_*, а при $\tau > \tau_*$ наблюдается переход в режим пластичности. Таким образом, вначале среда ведет себя как упругое тело, а затем переходит в состояние тела Максвелла. С учетом этого можно сформулировать следующую задачу. В вязкоупругой среде Максвелла помещен сферический дисперсный элемент, на который действует некоторая массовая сила. Цель настоящего исследования — определить поле скоростей и давлений.

Заметим, что в общем случае вязкость жидкости является величиной переменной, а поскольку время релаксации $T_{rel} = \mu/G$, где G — динамический модуль сдвига, а μ — вязкость, и оно изменяется во времени. Таким образом, эти характеристики среды могут принимать различные значения. Но при достаточно малой скорости деформации данные параметры практически не изменяются, и их можно считать константами.

С течением времени напряжение сдвига релаксирует, и модель Максвелла начинает описывать обычную ньютоновскую жидкость. Чтобы этого не происходило, для изучения свойств максвелловской среды целесообразно рассмотреть другой, немонотонный вид сил, вызывающих движение. В связи с этим в работе представлено решение задачи о движении капли максвелловской жидкости в вязкоупругой среде под действием периодических сил. Необходимым условием является сопоставимость времени релаксации среды и периода колебаний. Для многих вязкоупругих тел значение T_{rel} лежит в пределах $10^{-3} \div 10^{-1}$ с, поэтому частота колебаний в этом случае должна быть порядка $10^1 \div 10^3$ Гц. Малая же частота колебаний не позволит обнаружить сдвиговую упругость, и уравнение состояния будет лишь перегружено чисто математически.

Сведения о свойствах жидкости Максвелла можно найти в работах [3, 8, 9].

1. Постановка задачи. Требуется найти поверхность Γ_t, которая разбивает пространство $\mathbb{R}^3$ на ограниченную односвязную область Ω^+ и ее дополнение $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$, поле скоростей $\boldsymbol{v}$, давлений p, зависящих от времени t и пространственных координат $\boldsymbol{x}$ и удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P + \boldsymbol{g}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$
$$T_{rel} \frac{\tilde{d} P}{dt} + P = -pI + 2\mu D, \tag{1}$$

условиям сопряжения

$$[P \cdot \boldsymbol{n}]^{\pm} = \sigma K \boldsymbol{n},$$
$$V_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, \qquad [\boldsymbol{v}]^{\pm} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t,$$

условию на бесконечности

$$\boldsymbol{v} \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty$$

и начальным условиям

$$\boldsymbol{v} = 0, \quad \Gamma_t = \Gamma_0 = \{\boldsymbol{x}\colon |\boldsymbol{x}| = a\}, \quad P = P_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Здесь плотность ρ и вязкость $\mu = \rho\nu$ являются кусочно-постоянными с поверхностью разрыва Γ_t; ν — кинематическая вязкость; σ — коэффициент поверхностного натяжения; P — тензор напряжений; $D(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации; K — полусумма главных кривизн Γ_t (след тензора кривизны); V_n — скорость движения Γ_t вдоль внешней к Ω^+

нормали $\boldsymbol{n}$; $[f]^{\pm} = f^{+} - f^{-}$, $f^{\pm}$ — предельные значения функции $f(x,t)$ при стремлении $\boldsymbol{x}$ к точке поверхности Γ из $\Omega^{\pm}$ соответственно.

Из граничных условий видно, что поля скоростей непрерывны при переходе через Γ_t, а поля давлений и касательные напряжения претерпевают разрыв. В результате внешние массовые силы становятся причиной возникновения движения капли. Плотность этих сил $\boldsymbol{g}(t) = (0,0,g(t))$ задана, причем полагаем $g(0) = 0$. Задача о разгоне капли в вязкой жидкости под действием термокапиллярных и массовых сил была решена в работе [2].

2. Упрощающие предположения. Перейдем в неинерциальную систему координат, связанную с центром масс капли, движущимся в исходной системе со скоростью $\boldsymbol{u}(t) = (0,0,u(t))$, т. е.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t)\,dt, \qquad t' = t.$$

Введем новые искомые функции

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \qquad P' = P + \rho\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))I,$$
$$p' = p - \rho\boldsymbol{x}'[\boldsymbol{g} + T_{rel}\dot{\boldsymbol{g}} - \dot{\boldsymbol{u}}(t) - T_{rel}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)],$$

тогда в новых переменных система уравнений (1) преобразуется в систему следующего вида:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t'} + \boldsymbol{v}'\cdot\nabla\boldsymbol{v}' = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,P', \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}' = 0,$$

$$T_{rel}\Big\{\frac{\partial P'}{\partial t'} + \boldsymbol{v}'\cdot\nabla P' - \rho\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) + (P' - \rho\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)))\cdot W + {} \tag{2}$$
$$+ ((P' - \rho\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)))\cdot W)^{\mathrm{T}}\Big\} + P' = -p'I + 2\mu D'.$$

Важно отметить, что первое уравнение системы (2) инвариантно относительно указанного преобразования.

Выберем в качестве масштабов длины, времени, скорости и давления величины a, a^2/ν^-, $a^2 g_0/\nu^-$, $\rho^- a g_0$ соответственно, где a — радиус капли в начальный момент времени; g_0 — некоторое "среднее" ускорение. Тогда уравнения движения после обезразмеривания и опускания штрихов принимают вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + M\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \frac{\rho^-}{\rho}\,\mathrm{div}\,P, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

$$T\Big\{\frac{\partial P}{\partial t} + M\Big(\boldsymbol{v}\cdot\nabla P - \frac{\rho}{\rho^-}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) + (P - \rho\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)))\cdot W + {}$$
$$+ ((P - \rho\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)))\cdot W)^{\mathrm{T}}\Big)\Big\} + P = -pI + 2\,\frac{\mu}{\mu^-}\,D,$$

где $M = a^3 g_0/(\nu^-)^2$, $T = (\nu^-/a^2)T_{rel}$.

Предположим, что $a^3 g_0 \ll (\nu^-)^2$ и $\rho^- a g_0 \ll \sigma/a$. Первое соотношение обеспечивает малость параметра M, второе необходимо для значительного преобладания капиллярных сил над давлением. В этом случае капля сможет сохранять почти шарообразную форму. Разлагая формально функции $\boldsymbol{v}$, p, P в ряд по M, получим для первого приближения задачу с $M = 0$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\rho^-}{\rho}\,\mathrm{div}\,P, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
T\,\frac{\partial P}{\partial t} + P = -pI + 2\,\frac{\mu}{\mu^-}\,D,\\
[P\cdot\boldsymbol{n}]^\pm = 2\sigma/(ag_0)\cdot\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{v}^+\cdot\boldsymbol{n} = 0,\qquad \boldsymbol{v}^-\cdot\boldsymbol{n} = 0,\qquad \boldsymbol{v}^+\cdot\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v}^-\cdot\boldsymbol{\tau}\quad \text{на}\quad \Gamma,\\
\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\to 0,\qquad |\boldsymbol{x}|\to\infty,\\
\boldsymbol{v} = 0,\quad \boldsymbol{u} = 0,\quad \dot{\boldsymbol{u}} = 0,\qquad t = 0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

которая допускает точное решение со сферической границей раздела $\Gamma_t = \Gamma = \{\boldsymbol{x}\colon |\boldsymbol{x}| = 1\}$. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — касательный к Γ вектор.

Определим преобразование Лапласа по формуле

$$A^*(s) = \int\limits_0^\infty A(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt.$$

Применим его к каждому из уравнений системы (3). Тогда в силу начальных данных будем иметь

$$s\boldsymbol{v}^* = (\rho^-/\rho)\operatorname{div} P^*; \tag{4}$$

$$(Ts+1)P^* = -p^*I + 2(\mu/\mu^-)D^*. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и обозначая $\alpha^\pm = 1/(T^\pm s+1)$, где T^+ и T^- — время релаксации для внутренней и внешней жидкости соответственно, приходим к следующему уравнению:

$$s\boldsymbol{v}^* = \alpha(\rho^-/\rho)(-\nabla p^* I + (\mu/\mu^-)\Delta\boldsymbol{v}^*). \tag{6}$$

Условия сопряжения для P примут вид

$$
\begin{aligned}
&[(-\alpha^+p^+ + \alpha^-p^-)^* - (\rho^0-1)x_3(g^* - su^*)]\boldsymbol{n} +\\
&\qquad\qquad + 2(\alpha^+\mu^0 D^*(\boldsymbol{v}^+)\cdot\boldsymbol{n} - \alpha^- D^*(\boldsymbol{v}^-)\cdot\boldsymbol{n}) = 2\sigma/(ag_0 s)\cdot\boldsymbol{n},
\end{aligned}
$$

где $\rho^0 = \rho^+/\rho^-$, $\nu^0 = \nu^+/\nu^-$, $\mu^0 = \rho^0\nu^0$.

Пусть (r,φ,θ) — сферическая система координат. Будем искать решение в предположении осевой симметрии. Введем функцию $\psi^*(r,\theta,s)$ равенствами

$$v_r^* = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta},\qquad v_\theta^* = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial r}.$$

Тогда система (6) запишется так:

$$
\begin{gathered}
\alpha\,\frac{\rho^-}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{\frac{\nu}{\nu^-}\,\alpha E^2\psi^* - s\psi^*\Big\},\\
\alpha\,\frac{\rho^-}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\xi} = -\frac{1}{1-\xi^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\frac{\nu}{\nu^-}\,\alpha E^2\psi^* - s\psi^*\Big\},
\end{gathered}
$$

где $E^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1-\xi^2}{r^2}\,\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}$, $\xi = \cos\theta$. Соответственно, компоненты преобразованного тензора напряжений в терминах ψ^* имеют вид

$$
\begin{gathered}
P_{r\theta}^* = -\frac{\mu}{\mu^-}\,\frac{\alpha}{(1-\xi^2)^{1/2}}\Big[E^2\psi^* - 2r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\Big)\Big],\\
\frac{\partial}{\partial\xi}\,P_{rr}^* = \frac{\mu}{\mu^-}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[\frac{1}{1-\xi^2}\Big(\alpha E^2\psi^* - \frac{\nu^-}{\nu}\,s\psi^*\Big) + \frac{2\alpha}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}\Big].
\end{gathered}
$$

В результате возникает следующая задача для функций ψ^* и u^*:

$$\begin{aligned} E^2[\nu^0\alpha^+E^2\psi^* - s\psi^*] = 0 \qquad \text{при} \quad r < 1, \\ E^2[\alpha^-E^2\psi^* - s\psi^*] = 0 \qquad \text{при} \quad r > 1; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \psi^{*+} = 0, \qquad \psi^{*-} = 0, \qquad \psi_r^{*+} = \psi_r^{*-}, \\ \alpha^0\mu^0(\psi_{rr}^* - 2\psi_r^*)^+ - (\psi_{rr}^* - 2\psi_r^*)^- = 0 \qquad \text{при} \quad r = 1; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\psi_r^*}{r} \to u^*(1-\xi^2), \qquad \frac{\psi_\xi^*}{r^2} \to -u^*\xi \qquad \text{при} \quad r \to \infty; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} (\rho^0 - 1)(su^* - g^*) + \mu^0\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\frac{\alpha E^2\psi^* - {\nu^0}^{-1}s\psi^*}{1-\xi^2} + \frac{2}{r^2}\,\alpha\psi_{\xi\xi}^*\Big\}^+ - \\ - \frac{\partial}{\partial r}\Big\{\frac{\alpha E^2\psi^* - s\psi^*}{1-\xi^2} + \frac{2}{r^2}\,\alpha\psi_{\xi\xi}^*\Big\}^- = 0 \qquad \text{при} \quad r = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10) получено в результате дифференцирования динамического условия по ξ. Это не расширяет класс решений, так как давление внутри и вне капли по функции тока определено с точностью до аддитивной постоянной.

3. Решение задачи. Решение ищем в виде

$$\psi^*(r,\xi,s) = rf^*(r,s)(1-\xi^2).$$

Соответственно перепишем задачу (7)–(10) в терминах оператора L такого, что $L^2 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\Big) - \dfrac{2}{r^2}$:

$$\begin{aligned} L^2[\nu^0\alpha L^2f^* - sf^*] = 0 \qquad \text{при} \quad r < 1, \\ L^2[\alpha L^2f^* - sf^*] = 0 \qquad \text{при} \quad r > 1; \end{aligned} \tag{11}$$

$$r = 1: \qquad f^{*+} = 0, \quad f^{*-} = 0, \quad f_r^{*+} = f_r^{*-}, \quad \alpha^0\mu^0 f_{rr}^{*+} - f_{rr}^{*-} = 0; \tag{12}$$

$$r \to \infty: \qquad f_r^* \to u^*/2, \qquad f^*/r \to u^*/2; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} r = 1: \qquad (1-\rho^0)(su^* - g^*) + [\alpha f_{rrr}^* + \alpha f_{rr}^* - (s + 6\alpha)f_r^*]^- = \\ = \mu^0[\alpha f_{rrr}^* + \alpha f_{rr}^* - (s/\nu^0 + 6\alpha)f_r^*]^+. \end{aligned} \tag{14}$$

Из интегрального тождества

$$\int\limits_0^1 (L^2\omega)r^3\,dr = r^2(r\omega_r - \omega)_0^1$$

с функцией $\omega = L^2f^* - (s/(\nu^0\alpha))f^*$ легко устанавливается, что правая часть уравнения (14) равна нулю. Таким образом, условие (14) упрощается:

$$(1-\rho^0)(su^* - g^*) + \{\alpha f_{rrr}^* + \alpha f_{rr}^* - (s + 6\alpha)f_r^*\}^- = 0 \qquad \text{при} \quad r = 1. \tag{15}$$

Для L^2 верно представление

$$L^2\varphi = (1/r)\pounds^2 r\varphi,$$

где $\pounds^2 = \partial^2/\partial r^2 - 2/r^2$. Следовательно, уравнение

$$L^2[\nu\alpha L^2 f^* - sf^*] = 0$$

можно переписать так:

$$\pounds^2[\nu\alpha\pounds^2 rf^* - srf^*] = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$f^* = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} + \frac{1}{r}\Big[c_3\,\mathrm{e}^{rb}\Big(b - \frac{1}{r}\Big) + c_4\,\mathrm{e}^{-rb}\Big(b + \frac{1}{r}\Big)\Big],$$

где $b^2 = s/(\nu\alpha)$. После простых преобразований с учетом ограниченности поля скоростей при $r = 0$ и условия (13) решение уравнений (11) можно представить в виде

$$f^*(r,s) = C_1 F(\beta r) + C_2 r, \qquad r < 1,$$

$$f^*(r,s) = u^* r/2 + C_3/r^2 + C_4 G(\gamma r), \qquad r > 1,$$

где $F(z) = d(\operatorname{sh} z/z)/dz$, $G(z) = d(\mathrm{e}^{-z}/z)/dz$, $\beta = \sqrt{s/(\nu^0\alpha^+)}$, $\gamma = \sqrt{s/\alpha^-}$. Функции $C_1(s), \dots, C_4(s)$ определяются из уравнений (12). В результате получаем

$$f^*(r,s) = \frac{3(1+\gamma)u^*(s)/2}{3+\gamma+\mu^0 H(\beta)}\,\frac{F(\beta r) - F(\beta)r}{\beta F'(\beta) - F(\beta)}, \qquad r < 1,$$

$$f^*(r,s) = -\frac{3(2+\mu^0 H(\beta))u^*(s)/2}{3+\gamma+\mu^0 H(\beta)}\,\mathrm{e}^{\gamma}\Big(G(\gamma r) - \frac{G(\gamma)}{r^2}\Big) + \frac{1}{2}\,u^*\Big(r - \frac{1}{r^2}\Big), \quad r > 1.$$

Здесь $H(z) = \dfrac{z^2 F''(z)}{zF'(z) - F(z)} = \dfrac{z(z^2+6) - 3(z^2+2)\operatorname{th} z}{(z^2+3)\operatorname{th} z - 3z}$. Далее из уравнения (15) после громоздких вычислений находим

$$u^*(s) = \frac{(\rho^0 - 1)g^*(s)}{(1/2+\rho^0)s + \alpha^- B^*(s)}, \tag{16}$$

где

$$B^*(s) = \frac{3}{2}(2+\mu^0 H(\beta))C^*(s), \qquad C^*(s) = \frac{3(1+\sqrt{s/\alpha^-})}{3+\sqrt{s/\alpha^-}+\mu^0 H(\beta)}.$$

Имеют место асимптотические формулы:

$$H(z) = 3 + z^2/7 + O(z^4), \qquad z \to 0,$$

$$H(z) = z + 3/z + O(1/z^3), \qquad z \to \infty,$$

$$B^*(0) = \frac{3(2+3\mu^0)}{2(1+\mu^0)}, \qquad B^*(s) \approx \frac{9\rho^0\sqrt{\nu^0}T^0}{2(1+\rho^0\sqrt{\nu^0}T^0)}\sqrt{s(T^- s+1)}, \quad s \to \infty,$$

где $T_0 = T^+/T^-$. Функцию $B^*(s)$ можно представить в виде $B^*(s) = B^*(0) + sb^*(s)$, где главные члены в разложении $b^*(s)$ в окрестности нуля и бесконечности имеют вид

$$b^*(s) \approx \frac{1}{2}\Big(\frac{2+3\mu^0}{1+\mu^0}\Big)^2\sqrt{\frac{T^- s+1}{s}}, \qquad s \to 0,$$

$$b^*(s) \approx \frac{9\rho^0\sqrt{\nu^0}T^0}{2(1+\rho^0\sqrt{\nu^0}T^0)}\sqrt{\frac{T^- s+1}{s}}, \qquad s \to \infty.$$

Перепишем уравнение (16) в виде

$$(1/2+\rho^0)(T^- s+1)su^* + B^*(0)u^* + sb^*(s)u^* = (\rho^0 - 1)(T^- s+1)g^*(s).$$

Очевидно, что $su^*(s)$ есть изображение от $u'(t)$. Выражение $sb^*(s)u^*(s)$ является изображением от $\int\limits_0^t u'(t_1)b(t-t_1)\,dt_1$. Действительно, имеем

$$sb^*(s)u^*(s) = s\int\limits_0^\infty b(t)\,\mathrm{e}^{-st}\ dt\int\limits_0^\infty u(t_1)\,\mathrm{e}^{-st_1}\ dt_1 =$$

$$= \int\limits_0^\infty b(t-t_1)\,\mathrm{e}^{-s(t-t_1)}\ d(t-t_1)\int\limits_0^\infty u'(t_1)\,\mathrm{e}^{-st_1}\ dt_1 =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^t b(t-t_1)u'(t_1)\,\mathrm{e}^{-s(t-t_1)}\,\mathrm{e}^{-st_1}\ dt_1\,dt = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^t b(t-t_1)u'(t_1)\,dt_1\,\mathrm{e}^{-st}\ dt.$$

Таким образом, из уравнения (16) получаем интегродифференциальное уравнение

$$\Big(\frac{1}{2}+\rho^0\Big)[T^-u''(t)+u'(t)]+B^*(0)u(t)+\int\limits_0^t u'(t_1)b(t-t_1)\,dt_1 = (\rho^0-1)(T^-g'(t)+g(t)). \quad (17)$$

Устремляя T^+ и T^- к нулю, из (16) или (17) получим скорость, равную аналогичной в работе [2] для ньютоновской жидкости.

Предположим, что существует предел функции $g(t)$ при $t\to\infty$. Тогда в силу равенства

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0} su^*(s)$$

из (16) найдем формулу для предельной скорости

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0}\frac{(\rho^0-1)sg^*(s)}{(1/2+\rho^0)s+\alpha^-B^*(s)} = \frac{2(1+\mu^0)}{3(2+3\mu^0)}\,(\rho^0-1)\lim_{t\to\infty} g(t).$$

Полученное выражение в точности совпадает со скоростью движения капли под действием архимедовых сил, представляемой формулой Адамара — Рыбчинского [10]. Вполне закономерно, что данный результат не зависит от времени релаксации T_{rel}. Это согласуется с физическими законами поведения жидкости Максвелла.

4. Переход к дифференциальному уравнению. В некоторых предельных случаях можно от уравнений (16), (17) перейти к дифференциальному уравнению. Рассмотрим движение газового пузырька в жидкости Максвелла в случае воздействия на систему некоторого удара, или толчка. Положим $\mu^0 = 0$, а $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$, чему соответствует $g^*(s) = 1/(s+1)^2$. Уравнение (16) примет вид

$$[(1/2+\rho^0)s(T^-s+1)(3+\sqrt{s(T^-s+1)}\,)+9(1+\sqrt{s(T^-s+1)}\,)]u^*(s) =$$
$$= (T^-s+1)(3+\sqrt{s(T^-s+1)}\,)(\rho^0-1)/(s+1)^2 \equiv q^*(s).$$

Умножая обе части равенства на

$$r^*(s) = (1/2+\rho^0)s(T^-s+1)(\sqrt{s(T^-s+1)}-3)+9(\sqrt{s(T^-s+1)}-1)$$

и вводя обозначение

$$P^*(s) = (1/2+\rho^0)^2 s^2 (T^- s+1)^2 (s(T^- s+1)-9) + \\ + 18(1/2+\rho^0) s(T^- s+1)(s(T^- s+1)-3) + 81(s(T^- s+1)-1)$$

или

$$P^*(s) = (1/2+\rho^0)^2 (T^-)^3 s^6 + 3(1/2+\rho^0)^2 (T^-)^2 s^5 + (18(1/2+\rho^0)(T^-)^2 + 3(1/2+\rho^0)^2 T^- - \\ -9(1/2+\rho^0)^2 (T^-)^2) s^4 + (36(1/2+\rho^0)T^- + (1/2+\rho^0)^2 - 18(1/2+\rho^0)^2 T^-) s^3 + \\ +(-9(1/2+\rho^0)^2 + 9 + 18\rho^0 - 54(1/2+\rho^0)T^- + 81T^-) s^2 + (54-54\rho^0)s - 81,$$

получаем

$$P(s)u^*(s) = F^*(s), \qquad F^*(s) = r^*(s)q^*(s).$$

В итоге легко осуществляется переход к дифференциальному уравнению 6-го порядка

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)u(t) = F(t),$$

где $F(t)$ — оригинал изображения $F^*(s)$. Встает вопрос о начальных данных для полученного уравнения. Их можно определить, воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа для разложения функции $u^*(s)$ в ряд Тейлора на бесконечности. Имеем

$$u^*(s) = \frac{a_3}{s^3} + \frac{a_4}{s^4} + \frac{a_5}{s^5} + \frac{a_6}{s^6} + O\Big(\frac{1}{s^7}\Big),$$

где

$$a_3 = \frac{\rho_0 - 1}{1/2+\rho_0}, \qquad a_4 = \frac{-2\rho_0 + 2}{1/2+\rho_0}, \qquad a_5 = \frac{3\rho_0 - 3 - 18(\rho_0-1)/((1+2\rho_0)T^-)}{1/2+\rho_0},$$

$$a_6 = \frac{2(\rho_0-1)(36/\sqrt{T^-} + 18/T^- - 8T^-(1+2\rho_0) + 36)}{(1+2\rho_0)^2 T^-}.$$

Обозначим через Z^{-1} обратное преобразование Лапласа. Тогда $Z^{-1}[1/s^n] = t^{n-1}/(n-1)!$, откуда получаем $u(t) = a_3t^2/2 + a_4t^3/6 + a_5t^4/24 + a_6t^5/120 + O(t^6)$. В результате определяются дополнительные начальные данные:

$$u''(0) = a_3, \qquad u'''(0) = a_4, \qquad u^{IV}(0) = a_5, \qquad u^V(0) = a_6.$$

Аналогичное сведе́ние выполняется и для твердого шарика, когда $\mu^0 = \infty$. Уравнение (16) в этом случае принимает вид

$$[(1/2+\rho^0)s(T^- s+1) + (9/2)(1+\sqrt{s(T^- s+1)}\,)]u^*(s) = (T^- s+1)(\rho^0-1)/(s+1)^2 \equiv q^*(s).$$

При этом регуляризуемым символом является выражение $r^*(s) = (1/2+\rho^0)s(T^- s+1) - (9/2)(\sqrt{s(T^- s+1)} - 1)$.

5. Движение под действием периодических массовых сил. Далее рассмотрим задачу о движении капли, возникающем под действием периодических сил. Например, такие воздействия на тела являются определяющими внутри космического корабля в невесомости, в отсутствие гравитации. Задачи такого типа называются "g-jitter" задачами.

Полагаем, что $g(t) = A\,\mathrm{e}^{i\omega t}$. В этом случае функции $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, P, p могут быть найдены в виде

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}\,\hat{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad \boldsymbol{v} = \mathrm{Re}\,\hat{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad P = \mathrm{Re}\,\hat{P}\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad p = \mathrm{Re}\,\hat{p}\,\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений движения и состояния (3) и опуская "крышки", получим следующие уравнения:

$$i\omega \boldsymbol{v} = (\rho^-/\rho)\,\mathrm{div}\,P; \tag{18}$$

$$(i\omega T + 1)P = -pI + 2(\mu/\mu^-)D. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и обозначая $\hat{\alpha}^{\pm} = 1/(T^{\pm}s+1)$, приходим к следующему уравнению:

$$i\omega \boldsymbol{v} = \hat{\alpha}(\rho^-/\rho)(-\nabla pI + (\mu/\mu^-)\Delta\boldsymbol{v}).$$

Условия сопряжения для P примут вид

$$\{(-\hat{\alpha}^+p^+ + \hat{\alpha}^-p^-) - (\rho^0-1)x_3[A - i\omega u]\}\boldsymbol{n} + \\ + 2(\hat{\alpha}^+\mu^0 D(\boldsymbol{v}^+)\cdot\boldsymbol{n} - \hat{\alpha}^- D(\boldsymbol{v}^-)\cdot\boldsymbol{n}) = -2i\sigma/(ag_0\omega)\cdot\boldsymbol{n},$$

где $\rho^0 = \rho^+/\rho^-$, $\nu^0 = \nu^+/\nu^-$, $\mu^0 = \rho^0\nu^0$.

Вводя сферическую систему координат и применяя процедуру, аналогичную решению задачи с монотонной функцией $g(t)$, получим выражение для скорости:

$$u(t) = \mathrm{Re}\,U(t), \qquad U(t) = \frac{(\rho^0-1)A\,\mathrm{e}^{i\omega t}}{(1/2+\rho^0)i\omega + \alpha^-\hat{B}(i\omega)}. \tag{20}$$

Переходя к пределу по плотности и вязкости, из выражения (20) несложно получить результат для скорости пузырька газа или твердого шарика.

Представляет интерес анализ зависимости скорости капли и сдвига фазы колебаний от параметров времени релаксации T_{rel} окружающей среды и капли. Для построения соответствующих зависимостей будем теоретически варьировать свойства или виды жидкостей таким образом, чтобы изменялось время релаксации и сохранялись остальные характеристики. В качестве "точки отсчета" рассмотрим 0,5 %-й раствор полиакриламида. Раствор является типичным представителем жидкости Максвелла с достаточно большим временем релаксации (от 0,1 до 5 с). Его динамическая вязкость $\mu = 5$ П.

На рис. 1, 2 представлены амплитуды скорости $u = |U(t)|$ и сдвига фазы колебаний капли $\varphi = \arg U(t)$ соответственно (скорость указана в сотых см/с). Положено, что частота колебаний вынуждающей силы $\omega = 500$ Гц, амплитуда ускорения $g = 5$ см/с^2, что почти в 200 раз меньше ускорения свободного падения на поверхности Земли; отношение плотности внутренней жидкости к внешней $\rho^0 = 2$, отношение динамических вязкостей

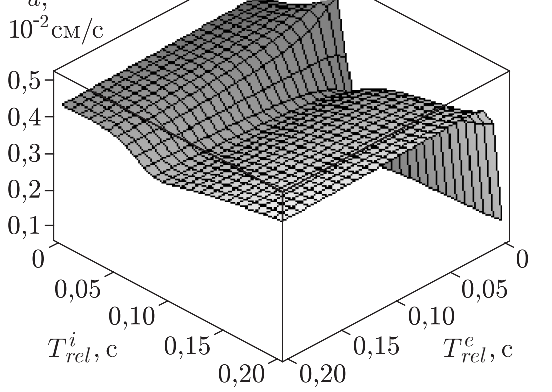

Рис. 1

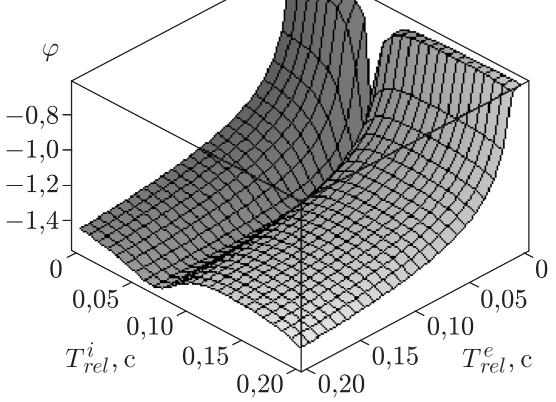

Рис. 2

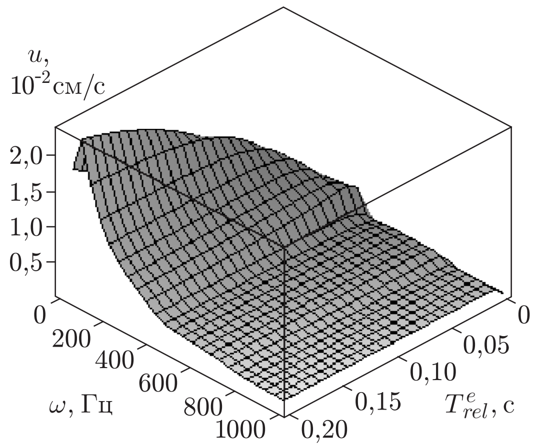

Рис. 3

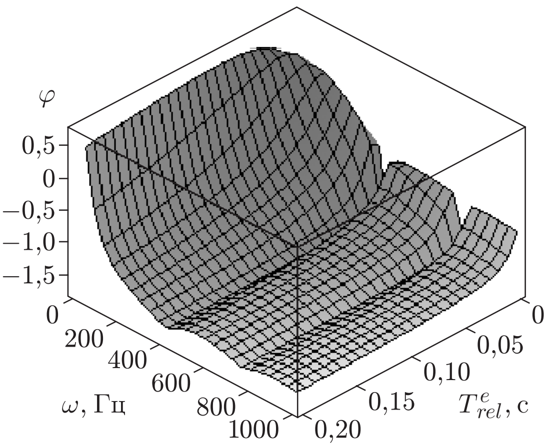

Рис. 4

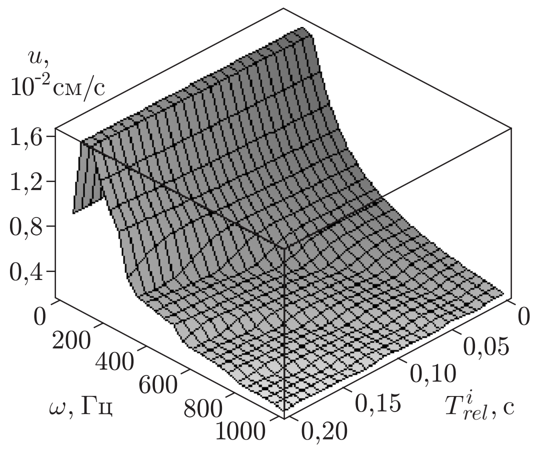

Рис. 5

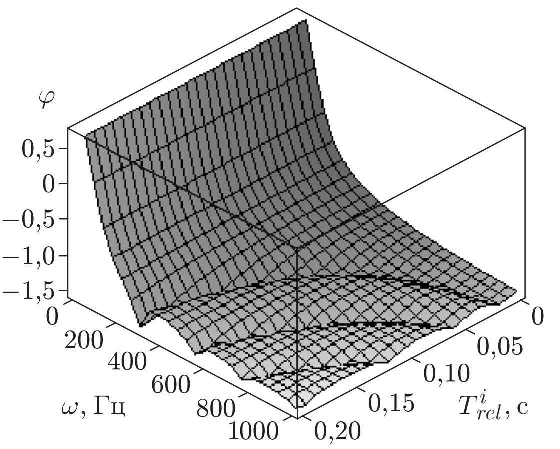

Рис. 6

$\mu^0 = 4$. Видно, что зависимость рассматриваемых величин от времени релаксации внешней жидкости более значительная. Кроме того, с ростом времени релаксации внешней жидкости T^e_{rel} снижается влияние времени релаксации внутренней жидкости T^i_{rel} на картину движения. Интересным и неожиданным результатом явилось наличие на графиках пиков и впадин. На данный момент это не получило точного обоснования, но по всей видимости, является следствием резонанса собственных колебаний капли и колебаний вынуждающей силы.

Далее рассмотрим в качестве параметров время релаксации внешней жидкости T^e_{rel} и частоту ω. Фиксируем значение $T^i_{rel} = 0{,}1$ с.

В этом случае (рис. 3) при достаточно малой частоте колебаний (порядка 100 Гц) амплитуда скорости капли растет с увеличением времени релаксации среды T^e_{rel}. С ростом частоты до 500 Гц такая зависимость исчезает и величина T^e_{rel} практически не оказывает влияния на скорость капли. При $\omega \approx 100$ Гц сдвиг фазы колебаний близок к нулю (рис. 4). При $\omega = 300$ Гц и выше, напротив, сдвиг фазы достигает $\pi/2$. Заметим, что с увеличением T^e_{rel} на обоих графиках уменьшается "бугристость", что говорит о снижении относительного влияния T^i_{rel}.

На рис. 5, 6 приведены графики зависимости исследуемых величин от времени релаксации внутренней жидкости и частоты колебаний внешней силы ($T^e_{rel} = 0{,}1$ с). Очевидно, что более существенное влияние на картину течения оказывает время релаксации внешней среды.

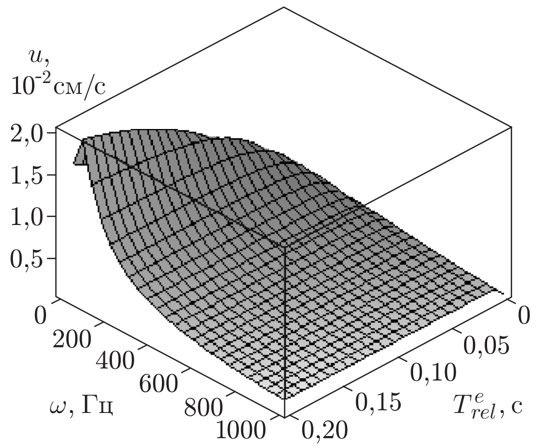

Рис. 7

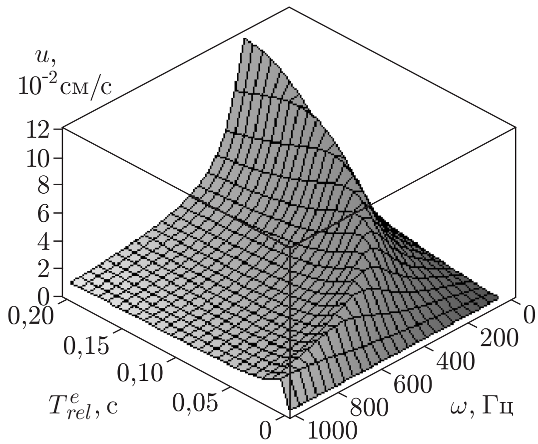

Рис. 8

На рис. 7, 8 представлены графики амплитуды скорости как функций от времени релаксации внешней среды и частоты колебаний вынуждающей силы при движении твердого шарика и газового пузырька соответственно.

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и внимание к работе и С. В. Стебновскому за ценные консультации и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Balasubramaniam R., Subramanian R. S.** Thermocapillary bubble migration — thermal boundary layers for large marangoni numbers // Intern. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22. P. 593–612.
2. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 59–64.
3. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
4. **Стебновский С. В.** Термодинамическая неустойчивость дисперсных сред, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 53–58.
5. **Стебновский С. В.** О механизме коагуляции дисперсных элементов в средах, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 156–161.
6. **Стебновский С. В.** Динамооптический эффект в гомогенных жидкостях // Журн. техн. физики. 2002. Т. 72, № 11. С. 24–27.
7. **Стебновский С. В.** О сдвиговой прочности структурированной воды // Журн. техн. физики. 2004. Т. 74, № 1. С. 21–25.
8. **Астарита Дж., Марруччи Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
9. **Рейнер М.** Реология. М.: Наука, 1965.
10. **Бэтчелор Дж.** Введение в механику жидкости. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 6/VII 2004 г.