УДК 533.692

ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ, БЕЗОТРЫВНО ОБТЕКАЕМЫХ СЖИМАЕМЫМ ПОТОКОМ В ЗАДАННОМ ДИАПАЗОНЕ УГЛОВ АТАКИ

О. С. Дунаева, Н. Б. Ильинский

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета, 420008 Казань
E-mails: oneberova@yandex.ru, nikolay.ilinskiy@ksu.ru

С использованием численно-аналитического метода, основанного на квазирешении обратных краевых задач аэрогидродинамики и формулах Кармана — Цзяна, решена задача модификации классических крыловых профилей, безотрывно обтекаемых дозвуковым потоком идеального газа в заданном диапазоне углов атаки. Для определения точки отрыва пограничного слоя применялся критерий безотрывности Лойцянского.

Ключевые слова: обратная краевая задача аэрогидродинамики, метод квазирешений, безотрывность обтекания, учет сжимаемости.

Введение. В настоящее время при решении задач проектирования и модификации крыловых профилей широко применяются методы, состоящие в целенаправленном поиске и коррекции формы профиля путем решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики. Суть этой задачи заключается в определении формы крылового профиля по заданному на его контуре распределению скорости либо давления потока жидкости или газа, обеспечивающему необходимые аэродинамические характеристики: максимальный коэффициент подъемной силы, минимальное профильное сопротивление, максимальное аэродинамическое качество, условие безотрывного обтекания и др. Численно-аналитическое решение задачи построения крыловых профилей, безотрывно обтекаемых потоком идеальной несжимаемой жидкости при расчетном угле атаки, получено в работе [1].

В данной работе решена задача модификации классических крыловых профилей, в частности профилей Жуковского и Clark, с целью обеспечения их безотрывного обтекания в заданном диапазоне углов атаки с учетом сжимаемости потока при числе Маха $\mathrm{M}_\infty < 1$.

Постановка задачи. В плоскости $z = x + iy$ непроницаемый крыловой профиль обтекается под углом атаки α плоским установившимся потоком идеального газа с заданным числом Маха на бесконечности M_∞ (рис. 1,a). Контур L_z профиля с периметром L замкнутый и гладкий всюду, за исключением задней кромки B, где внутренний по отношению к области течения угол равен 2π. Начало выбранной системы координат совпадает с точкой B, направление оси абсцисс параллельно направлению скорости на бесконечности. Дуговая координата s контура L_z отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в той же точке, так чтобы при возрастании s вдоль L_z область течения оставалась слева. Известен диапазон углов атаки $[\alpha_1^*, \alpha_2^*]$, в котором профиль обтекается без отрыва потока. Задано число Рейнольдса на бесконечности Re_∞.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-08-01153).

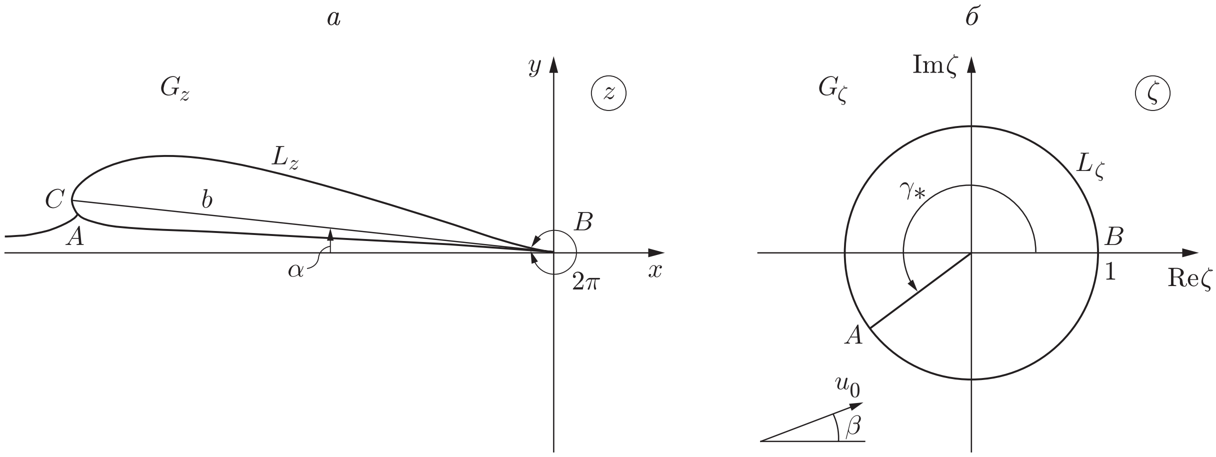

Рис. 1. Схема задачи:
а — заданный крыловой профиль; *б* — каноническая область

Требуется модифицировать профиль, обеспечив его безотрывное обтекание в большем диапазоне углов атаки $[\alpha_1, \alpha_2]$, где $\alpha_1 < \alpha_1^*$, $\alpha_2 > \alpha_2^*$, вычислить аэродинамические характеристики и сравнить их с характеристиками исходного профиля, найти распределение приведенной скорости $\lambda = \lambda(s)$, $s \in [0, L]$ на контуре модифицированного крылового профиля при углах атаки α_1, α_2 и подтвердить безотрывность обтекания этого профиля путем решения прямой задачи с использованием пакета программ "Fluent".

Модели и методы. В работе используется модель чисто турбулентного течения, в которой дуговая абсцисса точки s_{tj} перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный совпадает с точкой s_* разветвления потока (индекс $j = 1$ соответствует верхней поверхности профиля, $j = 2$ — нижней). Для определения точки s_s отрыва турбулентного пограничного слоя применялся критерий безотрывности Лойцянского [2] в виде

$$f(s) \geqslant f_0, \qquad f_0 = -2, \tag{1}$$

где $f(s)$ — формпараметр:

$$f(s) = \frac{a\lambda'(s)}{|\lambda(s)|^b}\Big|\int\limits_{s_{tj}}^{s} |\lambda(\tau)|^{b-1}\,d\tau\Big|,$$

$a = 1{,}17$, $b = 4{,}57$ — эмпирические постоянные; λ_{tj} — модуль скорости в точках s_{tj}.

Формулы Кармана — Цзяна [3] позволяют приближенно пересчитать распределение коэффициента давления на контуре профиля в несжимаемой жидкости для течения газа при любом числе Маха набегающего потока $\mathrm{M}_\infty < 1$ и неизменном угле атаки. Зависимость между скоростями $V(s)$ и $\lambda(s)$ на контуре крылового профиля в несжимаемом и сжимаемом потоках выражается формулой

$$V(\lambda) = \begin{cases} V_\infty\Big(\dfrac{1-(1-\mathrm{M}_\infty^2)^{1/2}c_p}{1-[1-(1-\mathrm{M}_\infty^2)^{1/2}]c_p/2}\Big)^{1/2}, & |\lambda| \geqslant \lambda_\infty, \\ 2\lambda[1+(1+4c^2\lambda^2)^{1/2}]^{-1}, & |\lambda| < \lambda_\infty, \end{cases} \tag{2}$$

где c_p — коэффициент давления в газе:

$$c_p = \frac{2}{k\,\mathrm{M}_\infty^2}\Big[\Big(\frac{1-\lambda^2/h^2}{1-\lambda_\infty^2/h^2}\Big)^{k/(k-1)} - 1\Big],$$

$c^2 = 0{,}296$; $k = 1{,}41$; $h^2 = (k+1)/(k-1)$.

Результатом пересчета является распределение скорости на искомом профиле в потоке несжимаемой жидкости, движущемся со скоростью V_∞. Форму профиля можно определить, решив обратную краевую задачу аэрогидродинамики с использованием модели идеальной несжимаемой жидкости и метода квазирешений для обеспечения выполнения условий разрешимости [4]. Распределение приведенной скорости, измененное при построении квазирешения, можно восстановить по формулам

$$\lambda(V) = \begin{cases} V/(1-c^2V^2), & V \leqslant V_\infty, \\ h[1-(1-\lambda_\infty^2/h^2)/(kM_\infty^2 c_p/2+1)^{(1-k)/k}]^{1/2}, & V \geqslant V_\infty, \end{cases} \tag{3}$$

где $c_p = c_p^0\{(1-\mathrm{M}_\infty^2)^{1/2} + [1-(1-\mathrm{M}_\infty^2)^{1/2}]c_p^0/2\}^{-1}$; $c_p^0 = 1-(V/V_\infty)^2$ — коэффициент давления в несжимаемой жидкости.

Построение безотрывного распределения скорости на диффузорном участке основано на задании на нем распределения формпараметра $f(s)$. Очевидно, что если функция $f(s)$ удовлетворяет критерию безотрывности (1), то соответствующая функция $\lambda(s)$ также удовлетворяет условию безотрывности.

Замена распределения скорости на диффузорном участке на безотрывное выполняется следующим образом. Вводится безразмерная координата $\sigma = (s-s_*)/(L-s_*)$, $\sigma \in [0,1]$. На участке $[0,\sigma_s]$, где σ_s — точка отрыва потока, распределение скорости известно: $\lambda = \lambda(\sigma)$, $\lambda(\sigma_s) = \lambda_{\max}$. Тогда начиная с точки σ_s на участке $[\sigma_s, 1]$ распределение скорости может быть достроено по формуле [4, § 39]

$$\lambda(\sigma) = \lambda_{\max} \exp\Big(a^{-1}\int\limits_{\sigma_s}^{\sigma} g(\tau)[Q(\tau)]^{-1}\,d\tau\Big), \tag{4}$$

где $Q(\sigma) = \int\limits_{\sigma s}^{\sigma}[1-(b-1)g(\tau)/a]\,d\tau$; функция $g = g(\sigma) = -2$ соответствует заданному закону изменения формпараметра.

Для заданного распределения скорости несжимаемого потока $V(s)$ на искомом контуре L_z крылового профиля решается обратная краевая задача аэрогидродинамики с использованием метода квазирешения. Функция, конформно отображающая каноническую область G_ζ (внешность круга единичного радиуса (рис. 1,*б*)) с границей L_ζ на внешность искомого профиля, имеет вид

$$z(\zeta) = u_0 \exp(-i\beta)\int\limits_1^{\zeta} \exp(-\tilde{\chi}(\zeta))(1-1/\zeta)\,d\zeta, \tag{5}$$

где $u_0 = \Gamma/(4\pi\sin\beta)$ — скорость потока на бесконечности в плоскости ζ; $\Gamma = \int\limits_0^L V(s)\,ds$ — циркуляция скорости по контуру профиля; β — теоретический угол атаки, определяемый из уравнения $\beta + \operatorname{ctg}\beta = \pi\varphi_1/\Gamma - \pi/2$; $\varphi_1 = \int\limits_{s_*}^{L} V(s)\,ds$; $\tilde{\chi}(\zeta)$ — аналитическая в области G_ζ и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}_\zeta$ функция:

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} - i\tilde{\theta} = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau)\,\frac{\exp(i\tau)+\zeta}{\exp(i\tau)-\zeta}\,d\tau,$$

$\chi(\zeta) = \ln(dw/dz) = S - i\theta$ — функция Жуковского — Митчела; $\chi_0(\zeta) = \ln(1 - \zeta_*/\zeta)$; $\zeta_* = \exp(i\gamma_*)$ — образ передней критической точки A на границе L_ζ; γ_* — угловая координата. Действительная часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на контуре L_ζ известна:

$$\tilde{S}(\gamma) = \operatorname{Re}\tilde{\chi}(\exp(i\gamma)) = \ln|V(s(\gamma))/[2\sin((\gamma - \gamma_*)/2)]|,$$

ее мнимая часть на L_ζ находится по формуле

$$\tilde{\theta}(\gamma) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - \gamma}{2}\,d\tau.$$

Параметрические уравнения искомого контура L_z крылового профиля получаются путем перехода в формуле (5) к предельным значениям при $\zeta = \exp(i\gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$.

Под условиями разрешимости обратной краевой задачи аэрогидродинамики понимаются условия замкнутости искомого контура L_z и условие совпадения заданного значения скорости на бесконечности со значением, определяемым в процессе решения.

В результате замены распределения скорости по контуру L_z крылового профиля на безотрывное по формуле (4) для модифицированного профиля значения скорости на задней кромке B при подходе к ней по верхней и нижней поверхностям могут оказаться различными, т. е. $|\lambda(0)| \neq |\lambda(L)|$. Это приводит к появлению в точке B особенности, а именно логарифмической спирали. Для устранения этой особенности при решении обратной краевой задачи аэрогидродинамики методом квазирешения к аналитической функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ следует добавить функцию $\Delta\chi(\zeta) = (im/\pi)\ln(1 - 1/\zeta)$, где $m = \operatorname{Re}\tilde{\chi}(0) - \operatorname{Re}\tilde{\chi}(2\pi)$. Полученное квазирешение

$$\tilde{\chi}_1(\zeta) = \tilde{\chi}(\zeta) - \Delta\chi(\zeta) \tag{6}$$

подставляется в формулу (5), а затем строится контур крылового профиля, для которого не только выполняются условия разрешимости обратной краевой задачи аэрогидродинамики, но и совпадают значения скорости на задней кромке B: $|\lambda_1(0)| = |\lambda_1(L)|$ ($\lambda_1(s)$ — скорость на контуре крылового профиля, полученная в результате квазирешения).

Итерационный метод решения. С учетом изложенного выше построение крылового профиля, обтекаемого безотрывно сжимаемым потоком в заданном диапазоне углов атаки, можно свести к следующему итерационному процессу.

Решается прямая краевая задача аэрогидродинамики для исходного крылового профиля в сжимаемом потоке при угле атаки α_2 и находится распределение приведенной скорости $\lambda = \lambda(s)$, $s \in [0, L]$ на контуре этого профиля. Для распределения приведенной скорости $\lambda(s)$ при угле атаки α_2 проверяется критерий безотрывности (1). Если критерий не выполняется, то $\lambda(s)$ изменяется по формуле (4) с учетом условия безотрывности обтекания начиная с точки отрыва потока s_s. Затем распределение скорости $\lambda(s)$ пересчитывается для идеальной несжимаемой жидкости по формулам (2), профиль поворачивается на угол атаки α_1 и по формуле (3) находится распределение $\lambda(s)$ при α_1. Проверяется выполнение критерия безотрывности (1) для $\lambda(s)$ при α_1. Если критерий не выполняется, то распределение $\lambda(s)$ изменяется по формуле (4) на безотрывное. После этого форма профиля находится путем решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики с использованием квазирешения (6). Если в результате распределение $\lambda(s)$ изменяется таким образом, что возникает отрыв потока, необходимо вернуться к началу итерационного процесса. Если при углах атаки α_1, α_2 отрыва не наблюдается, то модификация окончена, поставленная задача решена.

Результаты численных расчетов. В качестве исходного профиля для модификации был выбран крыловой профиль Жуковского, контур которого показан на рис. 2,*а*

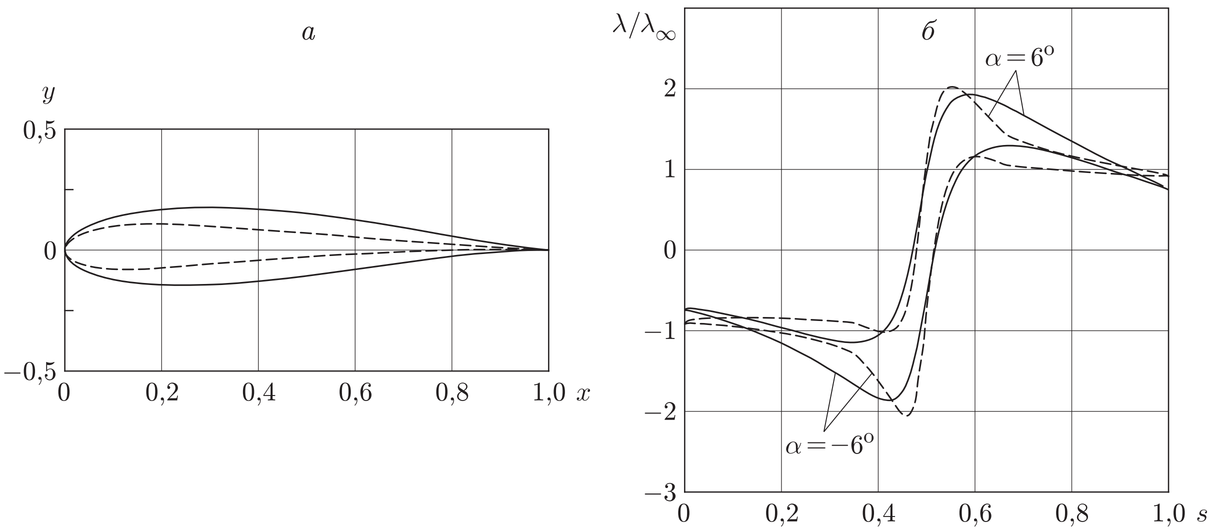

Рис. 2. Модификация профиля Жуковского:
а — исходный и модифицированный контуры; *б* — распределение приведенной скорости на контурах; сплошные линии — исходный профиль; штриховые — модифицированный профиль

сплошной линией (здесь и далее координаты контура профиля отнесены к хорде профиля b, дуговые абсциссы — к периметру L контура L_z, а распределения скорости $\lambda(s)$ — к скорости λ_∞). Профиль обтекается сжимаемым потоком безотрывно лишь в диапазоне углов атаки $\alpha \in [-2^\circ, 2^\circ]$.

Результат модификации с использованием описанного итерационного метода в диапазоне углов атаки $\alpha \in [-6^\circ, 6^\circ]$ показан на рис. 2,*а* штриховой линией. Соответствующие распределения приведенной скорости на контурах исходного и модифицированного профилей представлены на рис. 2,*б*.

Для верификации полученных результатов решалась прямая задача с использованием пакета программ "Fluent". Расчет прямой задачи проводился с использованием однопараметрической модели турбулентности Спаларта — Аллмараса. Дискретизация области течения осуществлялась с помощью структурированной сетки с прямоугольными ячейками. На бесконечности дискретизация области выполнена в виде С-сетки, вложенной в О-сетку. Сетка имела следующие размеры: 10 хорд профиля вверх по потоку, 25 — вниз по потоку, по 10 хорд вверх и вниз относительно профиля. На контуре профиля задавались условия прилипания. Характеристики потока на бесконечности следующие: число Маха $\mathrm{M}_\infty = 0{,}5$, число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = 10^7$, плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3, давление $p_\infty = 101\,325$ Па, температура $T_\infty = 273$ K, динамическая вязкость $\nu = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Распределения коэффициентов давления для модифицированного профиля при углах атаки $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = -6^\circ$ представлены на рис. 3. Картины обтекания исходного и модифицированного контуров профиля Жуковского приведены на рис. 4. Видно, что при углах атаки $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = -6^\circ$ исходный профиль (рис. 4,*а,б*) обтекается с отрывом потока, а модифицированный — безотрывно (рис. 4,*в,г*).

В качестве другого примера для модификации был выбран крыловой профиль Clark-05 [5], контур которого показан на рис. 5,*а* сплошной линией. Этот профиль безотрывно обтекается сжимаемым потоком в диапазоне углов атаки $\alpha \in [-5^\circ, 5^\circ]$. Результат модификации в диапазоне углов атаки $\alpha \in [-8^\circ, 8^\circ]$ показан на рис. 5,*а* штриховой линией. Соответствующие распределения приведенной скорости на исходном и модифицированном контурах профиля Clark-05 представлены на рис. 5,*б*. Для верификации полученных результатов также решалась прямая задача с использованием пакета программ "Fluent".

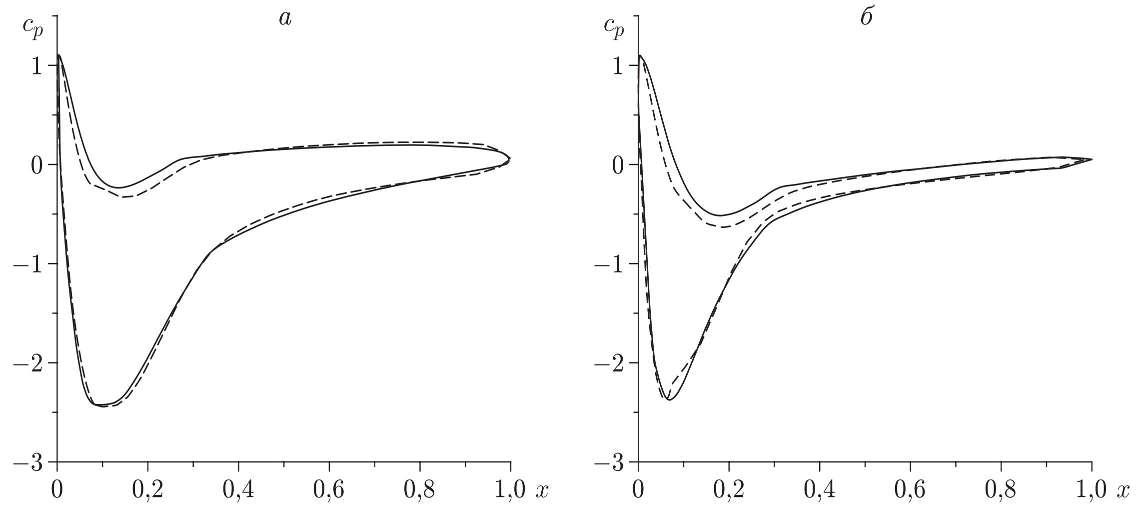

Рис. 3. Распределение коэффициента давления на контуре модифицированного профиля Жуковского, полученное численно (сплошные линии) и с использованием пакета программ "Fluent" (штриховые линии):
а — $\alpha = 6°$; *б* — $\alpha = -6°$

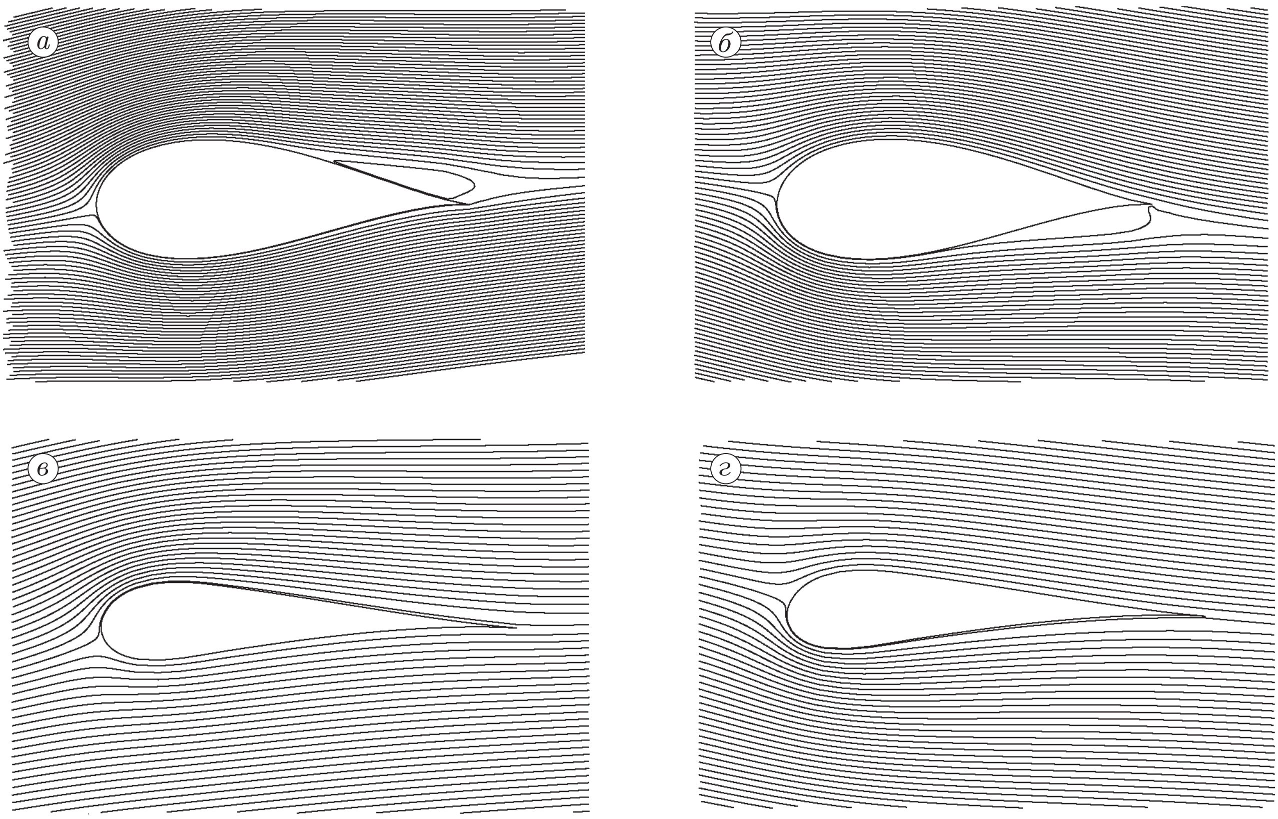

Рис. 4. Картины обтекания исходного (*а, б*) и модифицированного (*в, г*) контуров профиля Жуковского, полученные с использованием пакета программ "Fluent":
а, в — $\alpha = 6°$; *б, г* — $\alpha = -6°$

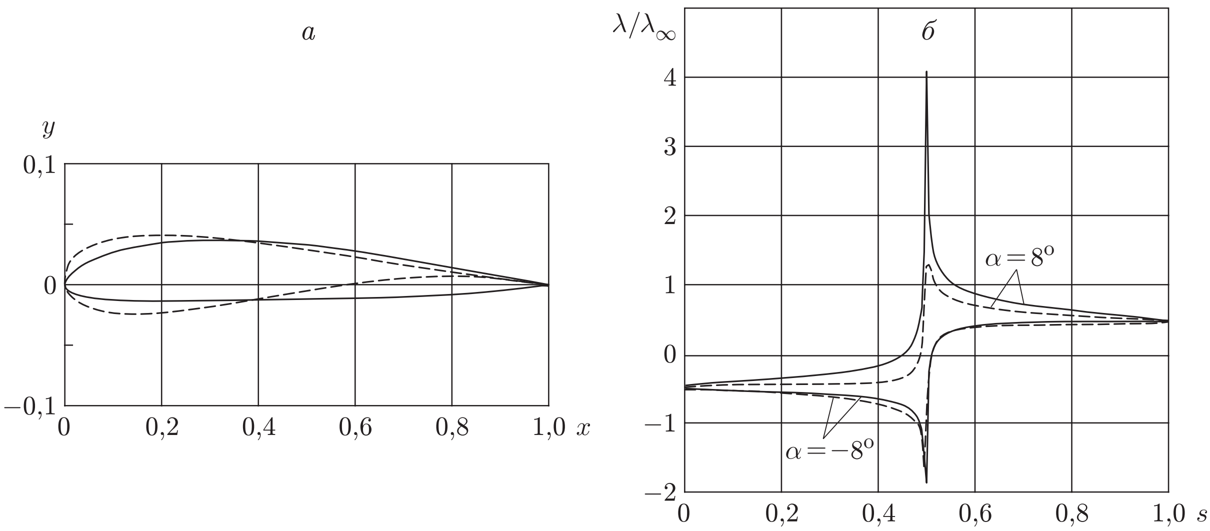

Рис. 5. Модификация профиля Clark-05:
а — исходный и модифицированный контуры; *б* — распределение приведенной скорости на контурах; сплошные линии — исходный профиль; штриховые — модифицированный профиль

Аэродинамические характеристики исходных и модифицированных крыловых профилей

Профиль	α, град	Численный расчет	Расчет с использованием пакета “Fluent”		
		C_y	C_y	C_x	K
Жуковского:					
исходный	6	0,678	0,556	0,124	4,48
	−6	−0,152	−0,161	0,117	−1,40
модифицированный	6	0,922	0,896	0,096	9,33
	−6	−0,450	−0,435	0,085	−5,06
Clark-05:					
исходный	8	0,845	0,837	0,104	8,04
	−8	−0,658	−0,726	0,083	−8,74
модифицированный	8	0,987	0,939	0,095	9,88
	−8	−0,702	−0,739	0,078	−9,17

Аэродинамические характеристики исходных и модифицированных профилей приведены в таблице. В результате численных расчетов с использованием описанного итерационного метода показано, что при положительных углах атаки для модифицированных профилей значение коэффициента подъемной силы C_y больше, чем для исходных профилей, а при отрицательных — меньше. Вычислительный эксперимент, проведенный с использованием пакета программ “Fluent”, подтвердил эти выводы. Анализ результатов вычислительного эксперимента показал, что в заданном диапазоне углов атаки для модифицированных крыловых профилей значение коэффициента сопротивления C_x меньше, чем у исходных, а аэродинамическое качество K выше.

Заключение. Таким образом, предложенный метод позволяет модифицировать как классические крыловые профили, так и любые другие с целью обеспечения их безотрывного обтекания сжимаемым потоком в значительно большем диапазоне углов атаки. Кроме того, из результатов вычислительных экспериментов следует, что модифицированные крыловые профили обладают меньшим сопротивлением, чем исходные, а следовательно, бо́льшим аэродинамическим качеством.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильинский Н. Б., Неберова О. С.** Об одном подходе к модификации крыловых профилей // Изв. вузов. Авиац. техника. 2006. № 3. С. 30–33.
2. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
3. **Karman Th. Y.** Compressibility effects in aerodynamics // J. Aeronaut. Sci. 1941. V. 8, N 7. P. 32–45.
4. **Елизаров А. М.** Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей / А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев. М.: Физматлит, 1994.
5. **Ушаков Б. А.** Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев / Б. А. Ушаков, П. П. Красильщиков, А. К. Волков, А. Н. Гржегоржевский. Б. м., 1940.

Поступила в редакцию 9/VIII 2007 г.,
в окончательном варианте — 18/X 2007 г.