Теплофизика и аэромеханика, 2010, том 17, № 4

УДК 536.2+53:004

Оценка погрешности термопарных измерений профиля температуры в твердых веществах при их пиролизе*

А.Д. Рычков[1,3], В.Е. Зарко[2], В.Д. Лисейкин[1], А.В. Кофанов[3]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*

[2]*Институт химической кинетики и горения СО РАН, Новосибирск*

[3]*Новосибирский государственный университет*

E-mail: rych@ict.nsc.ru

Рассматривается задача о взаимодействии термопары, впрессованной в твердое вещество, подвергающееся пиролизу внешним источником тепла, с тепловой волной, распространяющейся внутрь вещества от поверхности его пиролиза. Результаты численного моделирования показали, что из-за большой разницы в значениях коэффициентов теплопроводности топлива и материала вещества происходит сток тепла по проволочкам термопары вглубь вещества, что значительно изменяет температуру спая, искажая тем самым показания термопары.

Ключевые слова: численное моделирование, теплопередача в твердых телах, конечно-разностные методы, измерение температуры с помощью термопар.

ВВЕДЕНИЕ

Подповерхностные термопарные датчики находят широкое применение в различных технических устройствах для измерения тепловых потоков в сложных теплонапряженных конструкциях [1], а также в различных теплообменных устройствах [2] и при горении унитарных твердых топлив [3–5]. При этом возникают проблемы оценки достоверности величин, определяемых на основе показаний термопар. Источником погрешностей служит различие теплофизических свойств материала термопары и исследуемого вещества. При наличии больших градиентов температуры в нагреваемом веществе происходит, как правило, увеличенный отток тепла от поверхности, поскольку теплопроводность металлических термопар оказывается более высокой, чем теплопроводность вещества исследуемого объекта. Дополнительные сложности в эти проблемы привносит переменность расстояния до поверхности теплообмена, обусловленная пиролизом (уносом) вещества. В осесимметричной постановке подобная задача рассматривалась ранее в работе [6].

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-12023офи), Президиума РАН (проект № 1.4), Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 26, Интеграционного проекта СО РАН совместно со сторонними научными организациями № 94.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ С ТЕРМОПАРОЙ

Рассмотрим процесс измерения профиля температуры в конденсированном веществе, пиролизующемся под воздействием внешнего теплового источника. Сформулируем трехмерную нестационарную задачу о теплообмене между твердым веществом и запрессованной в него термопарой (рис. 1) в предположении, что скорость пиролиза вещества и температура его поверхности постоянны. Головка термопары представляет собой сферу радиуса R_m, которую под некоторым углом 2α пересекают два цилиндрических проводника радиусами r_m каждый. В этом случае имеются две плоскости симметрии, что позволяет уменьшить размер расчетной области до четверти от полной. Вид области решения показан на рис. 1, *a*. Значения угла α изменялись от 0 до 60°. Полагалось, что при $\alpha = 0$ проволочки расположены настолько близко друг к другу, что их можно заменить одной проволочкой с удвоенной площадью сечения. В декартовой системе координат эта область представляет собой параллелепипед $D\{x_s(y, z, t) \le x \le x_{\max}$, $0 \le y \le y_{\max}$, $0 \le z \le z_{\max}$, $t \ge 0\}$, внешние границы которого выбираются на достаточно большом расстоянии от головки термопары так, чтобы процессы теплообмена между веществом и термопарой не влияли на распределение температуры на них. Левая граница области является плоской поверхностью пиролиза, которая перемещается вглубь вещества с постоянной скоростью r_b, так что ее положение определяется соотношением $x_s(y,z,t) = x_s(y,z,0) + r_b t.$ Начало координат находится в геометрическом центре шаровой головки термопары. Уравнение теплопроводности в области D записывается в дивергентной форме

$$\frac{\partial(\rho CT)}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})\right) = 0, \qquad (1)$$

где C, ρ, λ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности.

Эти величины полагаются постоянными, но различными в областях, занятых веществом и термопарой, на границах между которыми они меняются скачком.

Запись уравнения (1) в дивергентной форме обеспечивает правильный расчет тепловых потоков в случае разрывных значений теплофизических параметров.

Для уравнения (1) задавались следующие граничные условия:

$$T(x_s,\ y,z,t) = T_s;$$

$$\left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x=x_{\max}} = 0,$$

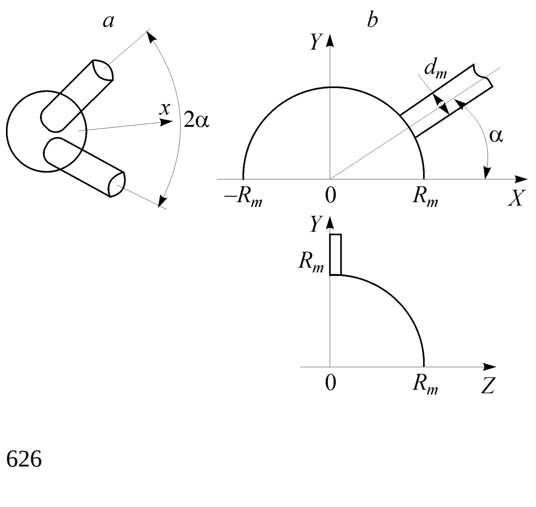

Рис. 1. Конструктивная схема термопары (*a*) и область решения (*b*).

$$\left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\max}} = \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=z_{\max}} = \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Начальные условия задавались из известного распределения Михельсона, описывающего распределение температуры в плоской тепловой волне, движущейся вдоль оси OX с постоянной скоростью r_b :

$$T(x,y,z,0) = T_0 + (T_s - T_0)\exp(-r_b(x - x_s(0))C_p\rho_p / \lambda_p),$$

где индекс *p* относится к параметрам вещества, T_s, T_0 — температура пиролиза и начальная температура, которые полагались постоянными. Начальное положение левой границы $x = x_s(0)$ выбирается достаточно далеко от вершины головки термопары так, чтобы распределение температуры в термопаре стало близко к T_0.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для численного решения уравнения (1) применялся метод конечных объемов, позволяющий проводить расчеты на произвольной конечно-разностной сетке. Уравнение записывалось в интегральной форме для произвольного фиксированного объема *V*:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} Q \quad dV + \oint_S \vec{F} \quad d\vec{S} = 0, \tag{2}$$

где $Q = C\rho T$, $\vec{F} = -\lambda \nabla T$ — поток тепла через ориентированный по нормали элемент $d\vec{S}$ поверхности *S*, ограничивающей объем *V*. В области *D* построим произвольную разностную сетку, каждая ячейка которой топологически эквивалентна параллелепипеду. Обозначим объем такой ячейки через $V_{i,j,k}$ и среднее значение величины *Q* на *n* слое по времени, отнесенное к центру такой ячейки, через $Q^n_{i,j,k}$. Тогда уравнение (2) аппроксимируется следующим разностным соотношением со вторым порядком точности по времени и по пространству:

$$\frac{4Q^{n+1}_{i,j,k} - 3Q^n_{i,j,k} + Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\tau} V_{i,j,k} +$$
$$+\left[(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{i+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{i-1/2} + (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{j+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{j-1/2} + (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{k+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1}_{k-1/2}\right] = 0, \tag{3}$$

где τ — шаг по времени. Скалярные произведения в квадратных скобках являются потоками тепла через соответствующие площади граней объема $V_{i,j,k}$, умноженными на единичные нормали к ним. Способ их вычисления описан в работе [7]. Полученная разностная схема является неявной и для ее решения можно применить следующую итерационную схему, основанную на введении псевдовремени на каждом временном слое по времени:

$$\left[\frac{Q^{n+1,s+1}_{i,j,k} - Q^{n+1,s+1}_{i,j,k}}{\tau_1} + \frac{4Q^{n+1,s}_{i,j,k} - 3Q^n_{i,j,k} + Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\tau}\right] V_{i,j,k} +$$
$$+\left[(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{i+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{i-1/2} + (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{j+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{j-1/2} + (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{k+1/2} - (\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{k-1/2}\right] = 0, \tag{4}$$

где τ_1 — шаг по псевдовремени, *s* — номер итерации по псевдовремени.

Для реализации (4) используется схема расщепления по пространственным переменным [8] (нижние индексы частично опущены):

$$\frac{\delta^{s+1/3}-\delta^{s}}{\tau_1}V_{i,j,k}-\Lambda_1\delta^{s+1/3}=\left[\frac{4Q^{n+1,s}_{i,j,k}-3Q^{n}_{i,j,k}+Q^{n-1}_{i,j.k}}{2\tau}\right]V_{i,j.k}+$$
$$+\left[(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{i+1/2}-(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{i-1/2}+(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{j+1/2}-(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{j-1/2}+(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{k+1/2}-(\vec{F}\cdot\vec{S})^{n+1,s}_{k-1/2}\right],\tag{5}$$
$$\frac{\delta^{s+2/3}-\delta^{s+1/3}}{\tau_1}V_{i,j,k}+\Lambda_2\delta^{s+2/3}=0,$$
$$\frac{\delta^{s+1}-\delta^{s+2/3}}{\tau_1}V_{i,j,k}+\Lambda_3\delta^{s+1}=0,\ Q^{n+1,s+1}=Q^{n+1,s}+\delta^{s+1}.$$

Здесь δ^s — поправки к величине Q, Λ_1, Λ_2, Λ_3 — разностные операторы, учитывающие только вторые производные по соответствующим направлениям. После сходимости итераций по псевдовремени $\delta^s=0$ и имеет место точная аппроксимация полного исходного уравнения. Граничные условия для δ^s задаются следующим образом. На левой границе $\delta^s=0$, на остальных — “мягкие” граничные условия. Для вычисления величины Q на первом шаге по времени ($n = 0$) в схеме (5) использовалась аппроксимация по времени первого порядка точности, поскольку значения сеточной функции $Q^{-1}_{i,j,k}$ неизвестны.

Для построения криволинейной пространственной разностной сетки использовался метод, основанный на численном решении (схема стабилизирующей поправки) обращенных двумерных уравнений Бельтрами или диффузии относительно управляющей метрики [9]. Достоинство настоящего метода заключается в возможности построения адаптивных разностных сеток с заданными свойствами. В частности, используя управляющую метрику, можно контролировать сгущение узлов сетки. С помощью данной технологии в области D строилась криволинейная блочная разностная сетка, сгущающаяся к границам области, занятой термопарой и являющейся квазиортогональной вблизи границ раздела между веществом и термопарой. Такая сетка обеспечивала приемлемую точность расчетов при не слишком большом числе ее узлов.

В области между левой границей области и головкой термопары строилась неравномерная прямоугольная разностная сетка, что позволяло использовать метод “улавливания” поверхности пиролиза в узел сетки. Суть его в том, что шаг по времени выбирался так, чтобы на каждом последующем шаге по времени положение подвижной левой границы $x_s(t+\Delta t)=x_s(t)+r_b\Delta t$ совпадало с ближайшей к ней справа вертикальной линией разностной сетки. Тогда перестройки сетки в процессе решения не требуется. Положения верхней и правой границ области выбирались таким образом, чтобы они не оказывали существенного влияния на распределение температуры в области, занятой термопарой. Разностная сетка не согласовывалась с границами области, занимаемой термопарой. Поэтому значения коэффициента теплопроводности на границах ячеек вычислялись как средние геометрические между его значениями в центрах соседних ячеек. Значения величины $C\cdot\rho$ вычислялись в центрах ячеек с учетом доли значений этих величин для термопары и вещества в объеме ячейки.

Точность численного решения оценивалась расчетами на последовательно сгущающихся сетках. В результате установлено, что разностная сетка с числом узлов в области D $110\times110\times100$ по осям координат обеспечивала относительную точность расчетов температуры около 0,1 %.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились для различных радиусов головки термопары R_m, радиусы проволочек r_m определялись из соотношений r_m / R_m = 0,2 и 0,75. Использовались следующие значения теплофизических параметров:

$$\rho_p = 1,6\,[\text{г/см}^3],\;\; \rho_m = 8\,[\text{г/см}^3],\;\; C_p = 0,3\,[\text{кал/г}\cdot\text{K}],\;\; C_m = 0,2\,[\text{кал/г}\cdot\text{K}],$$
$$\lambda_p = 0,00072\,[\text{кал/(см}\cdot\text{с}\cdot\text{K)}],\;\; \lambda_m = 0,16\,[\text{кал/(см}\cdot\text{с}\cdot\text{K)}],$$

где индекс m относится к материалу термопары, индекс p — к материалу вещества. Температура поверхности пиролиза $T_s = 650\,K$, начальная температура $T_0 = 300\,K$.

Расчеты проводились до момента времени, когда поверхность пиролиза касалась головки термопары. Значения геометрических параметров термопары варьировались. Поскольку нет ясности с пространственным распределением структуры контактов металлов в спае, образующих головку термопары и формирующих ее ЭДС, в качестве точки, в которой определяется температура головки термопары, принимался ее геометрический центр. Температура в этой точке определялась осреднением по объему головки термопары V:

$$T_{av} = \iiint\limits_V T(x,y,z,t)dxdydz \,/ \iiint\limits_V dxdydz.$$

Относительная погрешность измерения температуры термопарой определялась выражением

$$\delta = \frac{T_\infty - T_{av}}{T_\infty} 100\,\%,$$

где $T_\infty = T(0, y_{\max}, z_{\max}, t)$ — температура в точке, лежащей на внешней границе области решения, достаточно далеко удаленной от термопары.

Проводились две серии расчетов. Первая из них — при скорости пиролиза $r_b = 0,1$ см/с, вторая — при $r_b = 1$ см/с. Результаты расчетов представлены в виде изменения относительной погрешности измерения температуры $\delta(\xi)$ от безразмерного расстояния между поверхностью пиролиза и головкой термопары $\xi = R_m - x_s(t)/\Delta$, где $\Delta = \lambda_p / C_p \rho_p r_b$ — ширина теплового фронта волны пиролиза. Штриховые линии соответствуют изменению отношения величин теплового потока от поверхности пиролиза в твердое вещество $q = [(-\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x})\Big|_{\substack{x=x_s\\ y=0\\ z=0}}]/[(-\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x})\Big|_{\substack{x=x_s\\ y=y_{\max}\\ z=z_{\max}}}]$ в точках на оси симметрии и на внешней границе. Ширина теплового фронта составляла $\Delta = 150\,\mu m$ при скорости пиролиза $r_b = 0,1$ см/с и $\Delta = 15\,\mu m$ — при $r_b = 1$ см/с соответственно. Поведение величины $\delta(\xi)$ при значении $r_b = 0,1$ см/с показано на рис. 2–5. Видно, что конфигурация расположения проволочек, определяемая величиной угла α, оказывает существенное влияние на величину погрешности измерения. При этом наименьшее значение погрешности измерения обеспечивает применение термопары с наименьшим радиусом головки. Наличие максимума на кривых связано с тем, что по мере приближения фронта пиролиза к термопаре увеличивается отток тепла по проволочкам в глубину твердого вещества, однако

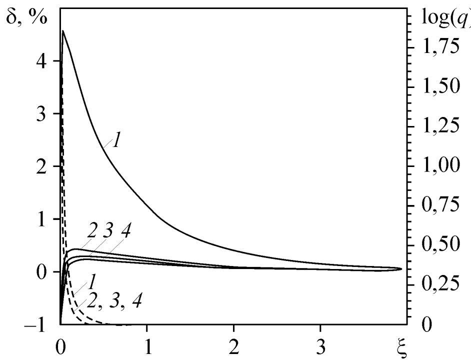

Рис. 2. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 12 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

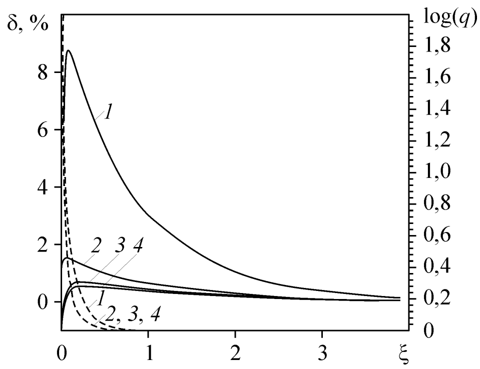

Рис. 3. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 20 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

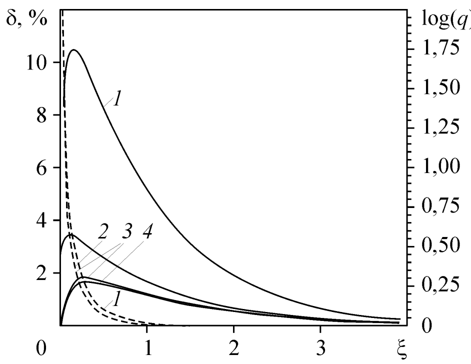

Рис. 3. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 20 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

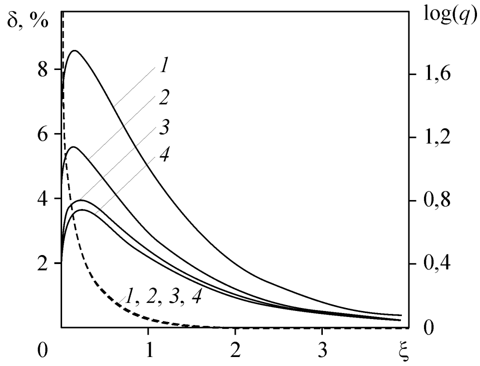

Рис. 5. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 120 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

затем при малых значениях ξ прогрев головки термопары резко возрастает, что и приводит к уменьшению величины $\delta(\xi)$.

На рис. 6–9 приведены результаты аналогичных расчетов при скорости пиролиза $r_b = 1$ см/с. Видно, что по мере увеличения радиуса головки термопары погрешность измерения уменьшается, а при $R_m > 40 \mu m$ даже становится отрицатель-

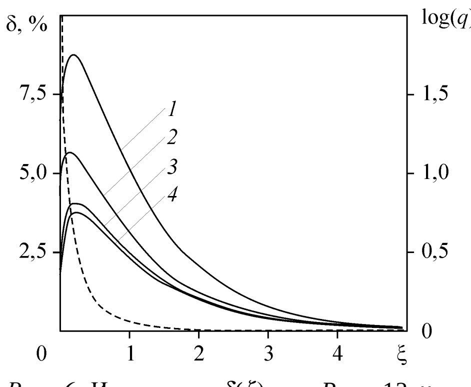

Рис. 6. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 12 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

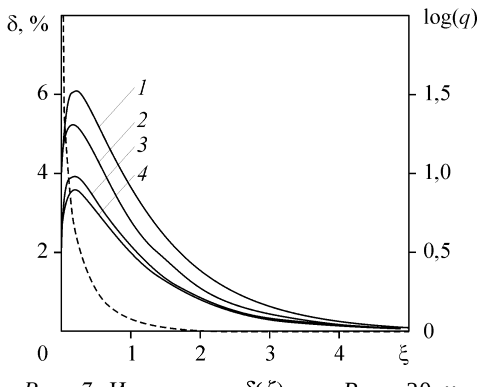

Рис. 7. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 20 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

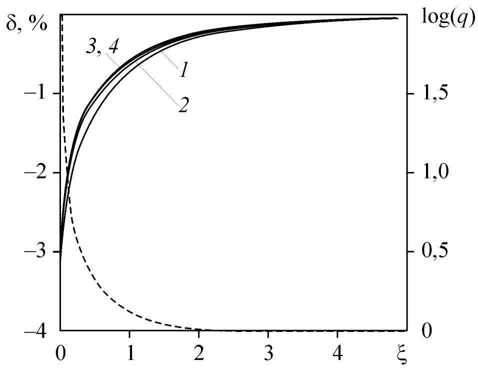

Рис. 8. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 45 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

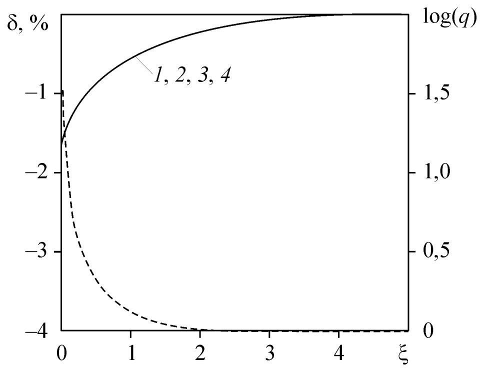

Рис. 9. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 120 μm (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

ной. Это связано с тем, что при больших размерах головки термопары ширина тепловой волны становится меньше диаметра ее головки, которая в этом случае просто не успевает прогреться, что и влияет на поведение величины погрешности.

Совершенно аналогичное поведение величины δ, показанное на рис. 10, имеет место и при малой скорости пиролиза для достаточно больших размеров головки термопары. Для термопар с относительно большими радиусами проволочек, у которых отношение $r_m / R_m = 0{,}75$, погрешность измерения оказывается существенно выше (рис. 11), что связано с увеличением стока тепла в проволочки из-за увеличения площадей их поперечных сечений.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что достоверность информации о распределении температуры в приповерхностном слое твердого вещества, толщина которого сравнима с шириной фронта тепловой волны пиролиза, может быть весьма ненадежной. Далее, теплоотвод в термопару приводит и к значительному возрастанию оттока тепла от поверхности пиролиза при ее приближении к термопаре, что может привести к значительному изменению скорости пиролиза вблизи места расположения головки термопары. Значения величины $q(\alpha)$ в момент подхода поверхности пиролиза к головке термопары для двух скоростей пиролиза приведены в таблице. Видно, что характер поведения этой величины по мере роста угла α существенно зависит от размера головки термопары и от скорости

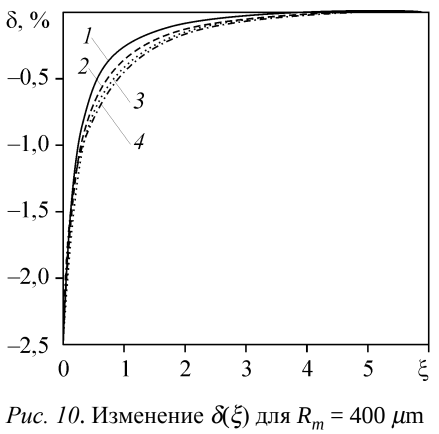

Рис. 10. Изменение $\delta(\xi)$ для R_m = 400 μm (r_b = 0,1 см/с, (r_m/R_m = 0,2).
α = 0° (*1*), 15° (*2*), 45° (*3*), 60° (*4*).

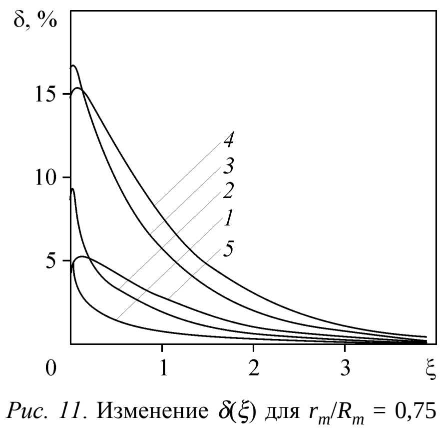

Рис. 11. Изменение $\delta(\xi)$ для r_m/R_m = 0,75 (r_b = 0,1 см/с, α = 60°).
R_m = 12 (*1*), 20 (*2*), 45 (*3*), 120 (*4*), 250 (*5*)μm.

Таблица

Зависимость величин тепловых потоков от угла α

r_b = 0,1 [см/с]					r_b = 1,0 [см/с]			
R_m [μm]	0°	15°	45°	60°	0°	15°	45°	60°
12	53,4	23,8	19,8	19,8	123,8	120,7	131,8	145,3
20	94,4	56,6	44,3	43,9	91,0	105,2	121,7	137,7
45	137,5	110,9	101,8	105,7	59,8	61,5	73,2	84,1
120	128,8	125,8	138,6	153,9	27,4	28,2	33,8	40,0
400	64,2	66,0	77,7	88,4				

пиролиза, определяющих перетоки тела между головкой и проволочками. Это обстоятельство может служить дополнительным источником погрешности измерения температуры термопарой в приповерхностном слое.

ВЫВОДЫ

1. Численное моделирование показало наличие существенной погрешности при измерении температуры с помощью термопары в твердом теле при его пиролизе, причем величина погрешности зависит как от скорости пиролиза, так и от геометрических размеров термопары.

2. Полученные результаты могут быть использованы для корректировки погрешности измерения температуры с помощью термопар при экспериментальных исследованиях пиролиза твердых тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borovkova T.V., Yeliseyev Y.N.. Lopukhov I.I.** Mathematical modeling of contact thermocouple // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2008. Vol. 5, No. 3. P. 274–277.
2. **Franco G.A., Caron E., Wells M.A.** Quantification of the surface temperature discrepancy caused by surface thermocouples and methods for compensation // Metallurgical and naterils transactions B. 2007. Vol. 338B. P. 949–956.
3. **Зенин А.А.** Об ошибках термопарных измерений пламен // Инженерно-физический журнал. 1962. Т. 5, № 5. С. 67–74.
4. **Зенин А.А.** О теплообмене термопар в волне горения твердого топлива // ПМТФ. 1963. № 5. С. 125–131.
5. **Asay B.W., Son S.F., Dickson P.M., Smilowitz L.B., Henson B.F.** An investigation of the dynamic response of thermocouples in inert and reacted condensed phase energetic materials // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2005. Vol. 30, No. 3. P. 199–208.
6. **Рычков А.Д., Гусаченко Л.К., Зарко В.Е.** Об оценке погрешности измерения температуры в твердом топливе с помощью термопары // Тр. VI совещ. Рос.-Казах. рабочей группы по вычисл. и информ. технологиям. Алматы: Казак университi. 2009. С. 282–286.
7. **Vinokur M.** An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws // J. Comput. Physics. 1989. Vol. 81. P. 1–52.
8. **Яненко Н.Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. Наука, 1967. 195 с.
9. **Liseikin V.D.** A computational differential geometry approach to grid generation. Berlin: Springer. 2007 (second edition). 220 p.

Статья поступила в редакцию 29 января 2010 г.