

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956.
3. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Об аппроксимации уравнений упругопластического деформирования // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1989. — Вып. 92.
4. Койтер В.Г. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М.: ИЛ, 1961.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.
6. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.В. Итерационное решение задач для уравнения Пуассона методом самоуравновешенных невязок // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1991. — Вып. 102.
7. Hennart J.P. A general family of nodal schemes // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.
8. Иванов Г.В. Расщепление задач упругости на основе минимизации функционала Лагранжа // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюз. конф. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
9. Phillips T.N., Rose M.E. A finite difference scheme for the equilibrium equations of elastic bodies // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.
10. Качанов Л.М. Сдвиг и сжатие тонкого пластичного слоя // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 2.

г. Новосибирск

Поступила 10/1 1994 г.

УДК 539.3

Ю.М. Волчков, Л.А. Дергилева, Г.В. Иванов

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ СЛОЕВ

Рассматривается итерационное решение задач упругости на основе представления области, где ищется решение, в виде пакета слоев. Используются уравнения слоя [1—3], имеющие один и тот же порядок при любых условиях для смещений и напряжений на поверхностях слоя. В процессе итераций число слоев последовательно удваивается. В первом приближении область представляется в виде одного слоя.

В качестве примеров рассматриваются моделирование напряженного состояния вблизи разреза и краевые эффекты в напряженном состоянии упругих прослоек между жесткими плитами.

1. Уравнения слоя. Ниже используются уравнения слоя в первом приближении [1], при выводе которых уравнения плоской задачи теории упругости

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad \sigma_{12} = a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\
 & \sigma_{22} = a \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \\
 & x_1 \in [0, L], \quad x_2 \in \left[ x_2^0 - \frac{h_2}{2}, x_2^0 + \frac{h_2}{2} \right], \\
 & a_i^- \sigma_{i1} + b_i^- u_i = r_i^-, \quad x_1 = 0, \quad a_i^+ \sigma_{i1} + b_i^+ u_i = r_i^+, \quad x_1 = L, \\
 & c_i^* \sigma_{i2} + d_i^* u_i = g_i^*, \quad x_2 = x_2^0 \pm \frac{h_2}{2}, \quad i, j = 1, 2
 \end{aligned}$$

аппроксимируются уравнениями [1, 2]

$$\begin{aligned}
(1.2) \quad \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + f'_i &= \hat{G}, \quad \sigma'_{11} = \sum_{k=0}^1 \sigma_{11}^{(k)} P_k, \quad \sigma'_{12} = \sum_{k=0}^2 \sigma_{12}^{(k)} P_k, \\
\sigma'_{21} &= \sigma_{12}^{(0)}, \quad \sigma'_{22} = \sum_{k=0}^1 \sigma_{22}^{(k)} P_k, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (1 + 2k) \int_{-1}^1 \sigma_{ij}^{(k)} P_k d\zeta, \\
\zeta &= \frac{2}{h_2} (x_2 - x_2^0), \quad \sigma_{11} = a \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + b \frac{\partial u''_2}{\partial x_2}, \\
\sigma_{22} &= a \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} + b \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u''_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \right), \\
u'_1 &= \sum_{k=0}^1 u_1^{(k)} P_k, \quad u''_1 = \sum_{k=0}^3 u_1^{(k)} P_k, \quad u'_2 = u_2, \quad u''_2 = \sum_{k=0}^2 u_2^{(k)} P_k, \\
f'_1 &= \sum_{k=0}^1 (f_1)^{(k)} P_k, \quad f'_2 = (f_2)^{(0)};
\end{aligned}$$

$$(1.3) \quad c_i^{\pm} \sigma'_{i2} + d_i^{\pm} u''_i = g_i^{\pm}, \quad x_2 = x_2^0 \pm \frac{h_2}{2};$$

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad a_i^- \sigma'_{i1} + b_i^- u'_i &= r_i^-, \quad x_1 = 0, \quad a_i^+ \sigma'_{i1} + b_i^+ u'_i = r_i^+, \quad x_1 = L, \\
r_1^- &= \sum_{k=0}^1 (r_1^-)^{(k)} P_k, \quad r_1^+ = \sum_{k=0}^1 (r_1^+)^{(k)} P_k, \quad r_2'^- = (r_2^-)^{(0)}, \quad r_2'^+ = (r_2^+)^{(0)}.
\end{aligned}$$

Здесь  $L, h_2$  — длина и толщина слоя;  $x = x_2^0$  — срединная плоскость слоя;  $a_i^{\pm}, b_i^{\pm}$  — постоянные, удовлетворяющие условиям  $a_i^+ b_i^+ \geq 0, a_i^- b_i^- \leq 0$ ;  $c_i^{\pm}, d_i^{\pm}$  — кусочно-постоянные функции, равные нулю или единице;  $r_i^{\pm}(x_2), g_i^{\pm}(x_1), f_i^{\pm}(x_1, x_2)$  — заданные функции;  $P_k$  — полиномы Лежандра по  $\zeta$ ;  $k$  — степень полинома; символ  $( )^k$  означает  $k$ -й коэффициент разложения в ряд по полиномам Лежандра. В задачах плоской деформации

$$a = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad b = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

в задачах плоского напряженного состояния

$$a = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad b = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}$$

( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона).

Условимся называть основными те из функций  $\sigma_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}$  в (1.2)—(1.4), производные которых по  $x_1$  содержатся в (1.2), а дополнительными — все остальные  $\sigma_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}$ . Основными являются функции

$$(1.5) \quad \sigma_1^{(0)}, \sigma_{21}^{(0)}, \sigma_{11}^{(1)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_1^{(1)},$$

где  $h_2 \sigma_{11}^{(0)}, h_2 \sigma_{21}^{(0)}, (2/3) h_2^2 \sigma_{11}^{(1)}$  — усилия и изгибающий момент в сечениях слоя;  $u_1, u_2, u_1/h_2$  — осредненные по толщине слоя смещения и угол поворота сечений.

Решение уравнений (1.2), (1.3) сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений шестого порядка относительно основных функций. Общее решение этой системы при различных видах условий на поверхностях слоя приведено в [3]. Использование общего решения совместно с граничными условиями (1.4) позволяет получать решения широкого класса задач, в том числе контактных [2, 3], удовлетворяющие всем условиям непрерывности усилий, моментов, смещений и углов поворота на

границах раздела участков слоя с различными условиями для напряжений и смещений на его поверхностях.

Систему дифференциальных уравнений относительно основных функций (1.5), имеющую один и тот же порядок при любом виде условий для смещений и напряжений на поверхностях слоя, можно получить не только как следствие уравнений (1.2), но и другими методами, например методом, изложенным в [4].

2. Матрица жесткости элемента слоя. Рассмотрим элемент слоя  $-1 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi = (2/h_1)(x_1 - x_1^0)$ ,  $h_1$  — длина элемента,  $x_1^0$  — координата его середины. Обозначим

$$(2.1) T_1 = \begin{bmatrix} h_2 \sigma_{11}^{(0)} \\ h_2 \sigma_{21}^{(0)} \\ \frac{2}{3} h_2 \sigma_1^{(1)} \end{bmatrix}_{\xi=1}, T_2 = \begin{bmatrix} h_1 \sigma'_{22} \\ h_1 \sigma'_{12} \end{bmatrix}_{\xi=1}, -T_3 = \begin{bmatrix} h_2 \sigma_{11}^{(0)} \\ h_2 \sigma_{21}^{(0)} \\ \frac{2}{3} h_2 \sigma_1^{(1)} \end{bmatrix}_{\xi=-1}, -T_4 = \begin{bmatrix} h_1 \sigma'_{22} \\ h_1 \sigma'_{12} \end{bmatrix}_{\xi=-1};$$

$$(2.2) U_1 = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ u_1^2/h_2^{(1)} \end{bmatrix}_{\xi=1}, U_2 = \begin{bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \end{bmatrix}_{\xi=1}, U_3 = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ u_1^2/h_2^{(1)} \end{bmatrix}_{\xi=-1}, U_4 = \begin{bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \end{bmatrix}_{\xi=-1}.$$

Заменяя в (1.2) основные функции полусуммой их значений при  $\xi = -1$  и  $1$ , а производные по  $x_1$  — разностью этих значений, деленной на  $h_1$ , и полагая дополнительные функции постоянными в пределах элемента, получим систему алгебраических уравнений относительно величин (2.1), (2.2). Эту систему можно разрешить относительно  $T_i$ :

$$T_i = A_{ik} U_k + F_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Матрицы  $A_{ik}$  образуют симметричную положительно-определенную матрицу жесткости  $K$  элемента слоя:

$$(2.3) [T_1, T_2, T_3, T_4]^T = [K][U_1, U_2, U_3, U_4]^T + F.$$

Наряду с изложенным возможен и другой способ вывода уравнений (2.3) [5].

3. Алгебраические уравнения пакета слоев. Пусть область, в которой ищется решение плоской задачи упругости, — прямоугольник. Будем рассматривать его как пакет  $M$  слоев, каждый из которых состоит из  $N$  элементов (рис. 1, а). Нумерация элементов и их сторон показана на рис. 1, б. Величины в (2.1), (2.2), относящиеся к элементу  $(n-1/2, m-1/2)$ , будем отмечать нижним индексом  $n-1/2$  и верхним  $m-1/2$ . Введем обозначения:

$$U_1^{m-1/2} = (U_3)_{n-1/2}^{m-1/2}, U_n^{m-1/2} = (U_1)_{n-1/2}^{m-1/2} = (U_3)_{n+1/2}^{m-1/2}, U_{N+1}^{m-1/2} = (U_1)_{N+1}^{m-1/2},$$

$$n = 2, \dots, N, m = 2, \dots, M+1,$$

$$U_{n-1/2}^1 = (U_4)_{n-1/2}^{1/2}, U_{n-1/2}^m = (U_2)_{n-1/2}^{m-1/2} = (U_4)_{n-1/2}^{m+1/2}, U_{n-1/2}^{M+1/2} = (U_2)_{n-1/2}^{M+1/2},$$

$$n = 2, \dots, N+1, m = 2, \dots, M.$$

Условия непрерывности усилий и моментов на общих гранях соседних элементов

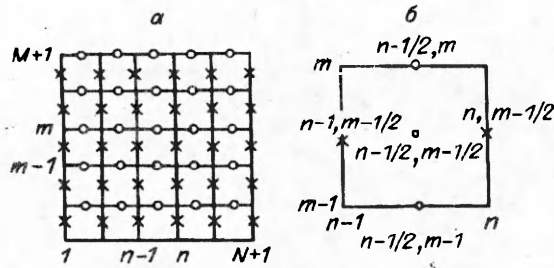
$$(3.1) (T_1)_{n-1/2}^{m-1/2} + (T_3)_{n+1/2}^{m-1/2} = 0, \quad n = 2, \dots, N, m = 2, \dots, M+1;$$

$$(3.2) (T_2)_{n-1/2}^{m-1/2} + (T_4)_{n-1/2}^{m+1/2} = 0, \quad n = 2, \dots, N+1, m = 2, \dots, M,$$

условия, следующие из (1.3),

$$(3.3) C_{n-1/2}^+ (T_1)_{n-1/2}^{M+1/2} + D_{n-1/2}^+ U_{n-1/2}^{M+1/2} = G_{n-1/2}^{M+1/2},$$

$$C_{n-1/2}^- (T_4)_{n-1/2}^{1/2} + D_{n-1/2}^- U_{n-1/2}^{1/2} = G_{n-1/2}^{1/2}, \quad n = 2, \dots, N+1$$



Р и с. 1

и условия, вытекающие из (1.4),

$$(3.4) \quad C_0^{m-1/2} (T_3)_{1/2}^{m-1/2} + D_0^{m-1/2} U_{1/2}^{m-1/2} = G_0^{m-1/2},$$

$$C_L^{m-1/2} (T_1)_{N+1/2}^{m-1/2} + D_L^{m-1/2} U_{N+1/2}^{m-1/2} = G_L^{m-1/2}, \quad m = 2, \dots, M+1$$

образуют систему алгебраических уравнений относительно величин  $U_n^{m-1/2}$ ,  $U_{n-1/2}^m$  — векторов смещений сторон элементов, отмеченных на рис. 1, а соответственно крестиками и кружками.

Уравнения (3.1) — (3.4) являются уравнениями Эйлера положительно-определенного квадратичного функционала энергии. Можно показать, что при  $N, M \rightarrow \infty$  и одновременном стремлении к нулю линейных размеров элементов решение системы (3.1) — (3.4) сходится в энергетической норме к решению плоской задачи теории упругости. Излагаемую ниже процедуру итерационного решения уравнений (3.1) — (3.4) можно интерпретировать как процесс последовательной минимизации функционала энергии.

**4. Итерационное решение уравнений пакета слоев.** Последовательность  $(U_{n-1/2}^m)^k$ ,  $(U_n^{m-1/2})^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , минимизирующая функционал энергии, строится следующим образом. Пусть векторы  $(U_{n-1/2}^m)^k$  известны. Тогда векторы  $(U_n^{m-1/2})^k$  находятся как решение уравнений (3.1), (3.3), (3.4). При этом система уравнений распадается на  $M$  независимых систем относительно величин  $U_n = (U_n^{m-1/2})^k$ ,  $n = 1, \dots, N+1$ ,  $m = 2, \dots, M+1$ , каждую из которых можно записать в виде

$$(4.1) \quad A_n U_{n-1} + B_n U_n + C_n U_{n+1} = F_n, \quad n = 2, \dots, N, \\ B_1 U_1 + C_1 U_2 = F_1, \quad A_{N+1} U_N + B_{N+1} U_{N+1} = F_{N+1}.$$

Решение (4.1) можно вычислить матричной прогонкой. Определенные таким образом векторы  $(U_n^{m-1/2})^k$  и  $(U_{n-1/2}^m)^k$  удовлетворяют уравнениям (3.1), (3.3), (3.4), но могут не удовлетворять уравнениям (3.2). Возникающие при этом невязки уравнений (3.2)  $Q_{n-1/2}^m = (T_2)_{n-1/2}^{m-1/2} + (T_4)_{n-1/2}^{m+1/2}$  представляют собой сосредоточенные силы на сторонах элементов, принадлежащих линиям раздела слоев. Векторы  $(U_{n-1/2}^m)^{k+1}$  находятся из уравнений  $Q_{n-1/2}^m = 0$ , в которых полагается  $U_{n-1/2}^m = (U_{n-1/2}^m)^{k+1}$ ,  $U_n^{m-1/2} = (U_n^{m-1/2})^k$ .

В конкретных численных расчетах итерации продолжались до тех пор, пока максимальная по области величина невязок  $Q_{n-1/2}^m$ , отнесенная к характерному напряжению, не становилась меньше наперед заданного числа  $\epsilon$ . Вычисление решения начиналось с представления области в виде одного слоя, состоящего из  $N$  элементов. Затем проводилось последовательное удвоение числа слоев путем деления каждого слоя на два. При представлении области в виде пакета слоев из  $2M$  слоев в качестве нулевого приближения для  $U_{n-1/2}^m$  принимались соответствующие величины, вычисленные при представлении области в виде пакета из  $M$  слоев.

**4. Примеры решения плоских задач упругости методом слоев.** Численное решение задач с особенностями в напряженном состоянии вызывает определенные трудности из-за резкого снижения скорости сходимости численных процедур в окрестности концентрации напряжений. Ниже приводятся результаты численных экспериментов по решению такого рода задач изложенным итерационным методом.

*Растяжение плоскости с разрезом.* В качестве одного из примеров итерационного решения методом слоев рассматривалось определение напря-

женно-деформированного состояния в плоскости с разрезом (рис. 2, а). Упругое пространство разрезано по отрезку  $-a \leq x_1 \leq a$ ,  $x_2 = 0$ . На бесконечности  $\sigma_{22} = \sigma$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ . Задача имеет аналитическое решение. По этому решению напряжения и перемещения на линии  $x_2 = 0$  вычисляются по формулам

$$\sigma_{22} = 0, u = \sigma(1 - \nu)\sqrt{a^2 - x_1^2}/\mu, \quad |x_1| \leq a,$$

$$\sigma_{22} = \sigma x_1/\sqrt{x_1^2 - a^2}, \quad |x_1| > a.$$

Численное решение строилось в прямоугольной области  $\{0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H\}$  (рис. 2, а). На участке границы  $AE$  и  $BC$  ставились условия симметрии:  $\sigma_{12} = u_1 = 0$  на  $AE$  и  $\sigma_{12} = u_2 = 0$  на  $BC$ . На участке  $AB$  (линии разреза) полагались равными нулю нормальные и касательные напряжения. На участках  $ED$  и  $DC$  задавались напряжения и перемещения как функции точки границы, соответствующие аналитическому решению. Вычисление решения начиналось с представления области в виде одного слоя, затем число слоев последовательно удваивалось. Были проведены вычисления при различном числе конечных элементов в направлении оси  $x_1$  и при различных значениях их линейных размеров в этом направлении.

Некоторые из результатов численного решения представлены на рис. 2, б. Эти результаты получены при  $L/L_0 = 5$ ,  $H/L_0 = 5$ ,  $E/\sigma_0 = 1$ ,  $\epsilon_0 = \sigma_0/\mu$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma/\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $a/L_0 = 1$ ,  $L_0 = 1$ . Размеры конечных элементов в направлении оси  $x_1$  показаны на рис. 2, а. Самые мелкие элементы расположены у края разреза, и их линейный размер равен 0,04. В численном решении определяются средние по граням элементов значения напряжений и смещений.

На рис. 2, б представлены графики распределения средних по граням элементов нормальных напряжений  $\sigma_{22}$  на продолжении линии разреза и средних по граням элементов нормальных смещений  $u_2$  на линии разреза. Крестиками отмечены значения, соответствующие аналитическому решению. Сплошная линия — численное решение при разбиении области на 32 слоя, штриховая — на 16 слоев, штрихпунктирная — на 4 слоя. При разбиении на 32 слоя среднее значение нормального напряжения на нижней

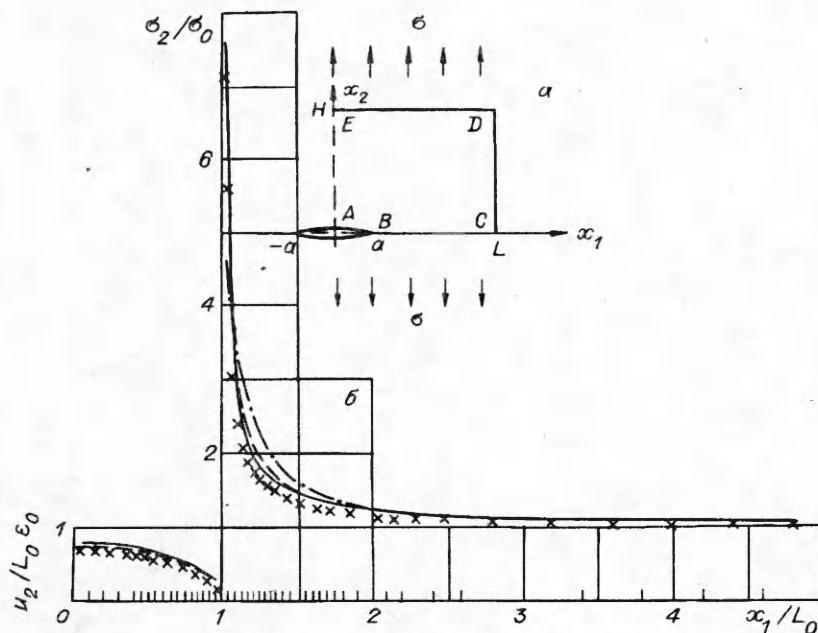


Рис. 2

Итерация	$\sigma_{22}/\sigma_0$			$\delta$
1	7,6425	4,1991	3,0580	0,2909
2	7,5348	4,1801	3,0124	0,1075
3	7,4221	4,1443	2,9698	0,2469
4	7,3934	4,1288	2,9580	0,1497
5	7,3724	4,1162	2,9489	0,1061
6	7,3436	4,0980	2,9361	0,0817
7	7,3329	4,0913	2,9315	0,0483

границы элемента, примыкающего к разрезу, отличается от точного на 2,5%. При каждом разбиении требовалось не более семи итераций для того, чтобы максимальная в области величина невязки  $Q_{n-1/2}^n$  не превышала 0,05.

В таблице приведены значения нормальных напряжений на нижних гранях трех соседних

элементов, примыкающих к разрезу, и максимальная по области невязка  $\delta$  на последовательных семи итерациях при разбиении области на 32 слоя. Таблица дает представление о скорости сходимости итераций. Результаты решения тестовой задачи показывают, что используемые конечные элементы позволяют вполне удовлетворительно описывать напряженное состояние в окрестности разреза.

Большой теоретический и практический интерес представляют задачи исследования напряженных состояний с особенностями типа погранслоев. Такие особенности возникают, например, вблизи свободной поверхности на границе раздела слоев из материалов с различными свойствами. Ниже приводятся результаты решения двух задач о краевых эффектах в напряженном состоянии в упругих прослойках между жесткими плитами.

**Задача о растяжении упругой прослойки.** Прослойка толщины  $2H$  растягивается абсолютно жесткими плитами (рис. 3, а). На поверхностях прослойки задаются нормальные смещения  $u_2 = \pm V$ , тангенциальное смещение полагается равным нулю. Вблизи свободной поверхности ( $x_1 = 0$ ) возникает концентрация нормальных и касательных напряжений, которые могут привести к отрыву прослойки от жестких плит. На рис. 3, б приведено распределение касательных напряжений по поверхности  $x_2 = H$  прослойки, на рис. 4 — нормальных напряжений. На этих рисунках представлены результаты, полученные при разбиении прослойки на один, два, четыре и восемь слоев. Распределение касательных и нормальных напряжений, вычисленное при представлении прослойки в виде одного слоя, практически не отличается от распределений, вычисленных при разбиении на большее число слоев.

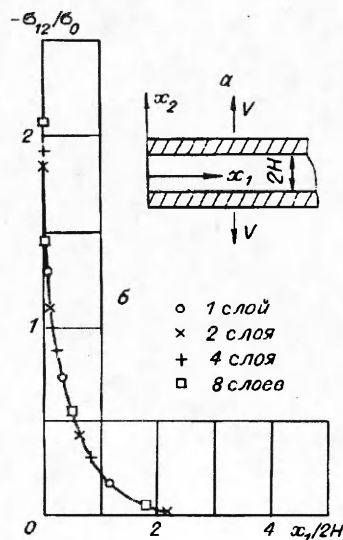


Рис. 3

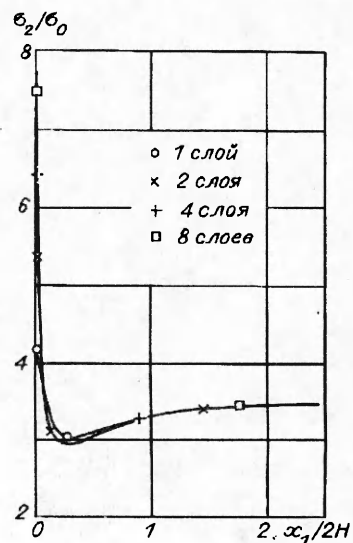
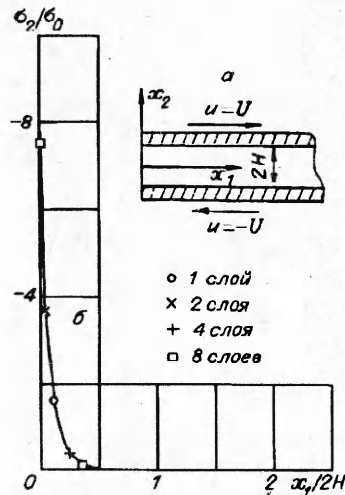


Рис. 4

Рис. 5

Задача о сдвиге упругой прослойки. Прослойка толщины  $2H$  сдвигается абсолютно жесткими плитами (рис. 5, а). На поверхностях прослойки задаются тангенциальные смещения  $u_1 = \pm U$ , нормальные смещения полагаются равными нулю. Вблизи свободной поверхности ( $x_1 = 0$ ) возникает концентрация нормальных и касательных напряжений. На рис. 5, б приведено распределение нормальных напряжений по поверхности  $x_2 = H$  прослойки при разбиении ее на различное число слоев (от одного до восьми). И в этой задаче для определения нормальных напряжений по поверхности прослойки достаточно представления ее в виде одного слоя.



Приведенные результаты, а также результаты решения ряда контактных задач [2, 3] указывают на эффективность применения метода слоев для исследования краевых эффектов в упругих прослойках и в других плоских задачах упругости с сингулярными эффектами в напряженном состоянии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г.В. Теория пластин и оболочек. — Новосибирск: НГУ, 1980.
2. Дергилева Л.А. Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1976. — Вып. 25.
3. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1977. — Вып. 28.
4. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи упругих анизотропных оболочек. — Киев: Наук. думка, 1980.
5. Hennart J.P. A general family of nodal schemes // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.

г. Новосибирск

Поступила 31/1 1994 г.

УДК 539.3

В.Д. Бондарь

#### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

В ряде актуальных задач упругости линейная теория уже не обеспечивает требуемой точности, поэтому ее заменяют одной из нелинейных теорий. Нелинейность связывают как с законом механического поведения материала (физическая нелинейность), так и с зависимостью деформаций от градиентов перемещений (геометрическая нелинейность). В работе рассматривается плоская динамическая задача в варианте Новожилова геометрически нелинейной упругости. Выводятся уравнения движения в напряжениях и поворотах. Даются представления этих величин через потенциалы и устанавливаются уравнения для потенциалов.

© В.Д. Бондарь, 1994