УДК 532.59:539.3

# РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА ВЕРТИКАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОМ НА ДНЕ ВОДОЕМА ТОЛСТОМ ПРЕПЯТСТВИИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДОЕМА ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

С. Рэй, С. Де, Б. Н. Мандал*

Университет Калькутты, 700009 Калькутта, Индия
* Индийский институт статистических исследований, 700108 Калькутта, Индия
E-mails: ray.swagata.06@gmail.com, soumenisi@gmail.com, bnm2006@rediffmail.com

Рассматривается задача о рассеивании волн на толстом препятствии с прямоугольным поперечным сечением, вертикально расположенном на дне водоема конечной глубины при наличии ледяного покрова. Ледяной покров моделируется однородной тонкой упругой пластиной. Задача сведена к решению сингулярных интегральных уравнений первого рода. Интегральные уравнения решены с использованием аппроксимаций Галеркина полиномами, умноженными на весовые функции, учитывающие характер течения в окрестности препятствия. Определены зависимости коэффициентов отражения и пропускания от волнового числа при различных значениях параметров задачи. Установлено, что толщина препятствия оказывает существенное влияние на характер течения, поэтому при моделировании волнорезов необходимо учитывать их толщину.

Ключевые слова: рассеивание волн, ледяное покрытие, толстые препятствия, интегральные уравнения, аппроксимация Галеркина, коэффициенты отражения и пропускания.

DOI: 10.15372/PMTF20200311

**Введение.** В последнее время интенсивно исследуются задачи о распространении волн при наличии препятствий различной формы в водоемах, на поверхности которых расположены тонкие упругие пластины. Эти задачи возникают при строительстве в полярных водах аэродромов и прочих сооружений.

Задача о рассеивании волн в водоеме конечной глубины при наличии в нем вертикально расположенного толстого препятствия с поперечным сечением прямоугольной формы впервые исследована в работе [1]. В [2] рассматривались препятствия четырех различных геометрических конфигураций. С использованием разложений потенциала скоростей по собственным функциям задача сведена к решению интегральных уравнений первого рода относительно горизонтальной компоненты скорости потока в зазоре как над препятствием, так и под ним. Задача решалась с использованием аппроксимаций Галеркина, содержа-

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по научным и промышленным исследованиям (CSIR, Нью-Дели) (грант № 09/028(1018)/2017-EMR-I) и Научно-технического исследовательского совета (SERB, Нью-Дели) (код проекта EMR/2016/005315).

щих полиномы Гегенбауэра. В результате численного решения интегральных уравнений получены оценки для коэффициентов отражения и прохождения при различных значениях параметров задачи.

Задача об отражении волн от плавающего ледяного покрова в водоеме конечной глубины рассматривалась в работе [3]. В [4, 5] изучалось взаимодействие океанских волн с прибрежным ледяным покровом, моделируемым упругой тонкой пластиной. Рассеяние косой волны, инициированной узкой трещиной в ледяном покрове, исследовалось в работе [6]. С использованием интерполяции кусочными полиномами низкого порядка в [7] изучалось распространение волн под льдиной переменной толщины. С помощью метода мультипольных разложений в работе [8] решена задача об излучении волн сферой, погруженной как на большую, так и на небольшую глубину в водоеме с ледяным покрытием. Обзор работ, посвященных математическому моделированию распространения океанских волн и изучению их взаимодействия с льдинами, приведен в [9]. В [10] в приближении Буссинеска исследованы установившиеся колебания горизонтального цилиндра, погруженного в линейно стратифицированную жидкость, при наличии ледяного покрова. В [11] в рамках линейной теории волн изучены изгибные гравитационные волны, распространяющиеся в полубесконечной плавающей льдине.

В работе [12] получено выражение для потенциала скоростей для случая неустановившихся режимов работы трехмерных источников, расположенных в воде на большой глубине, при наличии на ее поверхности упругой пластины. С использованием метода мультиполей и разложения по собственным функциям в [13] решена линейная задача об установившихся колебаниях горизонтального цилиндра, погруженного в жидкость, верхняя граница которой является неоднородной. В [14] с помощью функции Грина решена задача об излучении волн цилиндром, погруженным в воду с плавающей на ее поверхности льдиной. В работе [15] с использованием преобразования Фурье решена линейная квазистатическая задача о действии периодического давления на ледяной покров вблизи вертикальной стенки. Плоская линейная задача о колебаниях эллиптического цилиндра, находящегося в идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины при наличии на ее поверхности ледяного покрова, решена в работе [16]. В [17] методом Винера — Хопфа решена задача о колебаниях полубесконечного ледяного покрова под действием локального периодического воздействия, в работе [18] та же задача решена с учетом наличия в ледяном покрове прямолинейной трещины. В [19] также с использованием метода Винера — Хопфа решена задача о распространении в жидкости и ледяном покрове волн, инициированных движущейся вблизи полубесконечного ледяного покрова нагрузкой.

В данной работе исследуется рассеяние волн на вертикально расположенном на дне препятствии с прямоугольным сечением. Препятствие находится под ледяным покровом, моделируемым тонкой упругой пластиной. Как и в работе [2], задача сводится к системе интегральных уравнений первого рода, которая решается численно методом Галеркина с использованием полиномов с весами, учитывающими характер течения вблизи препятствия. Вычисляются коэффициенты отражения и пропускания при различных значениях параметров задачи. Рассмотрен случай малых значений параметров ледяного покрова, при которых его можно приближенно моделировать свободной поверхностью [1].

**1. Математическая формулировка задачи.** Используется прямоугольная декартова система координат. Ось $y$ направлена вертикально вниз и расположена в плоскости симметрии толстого препятствия с прямоугольным сечением шириной $2b$, которое находится в водоеме постоянной глубины $h$ в области $-b \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant h$ $(0 < c < h)$. Плоскость $(x, z)$ совпадает со срединной плоскостью льдины (рис. 1).

Задача решается в рамках линейной теории. Движение жидкости полагается безвихревым, не зависящим от координаты $z$, временная гармоника содержит угловую скорость $\omega$.

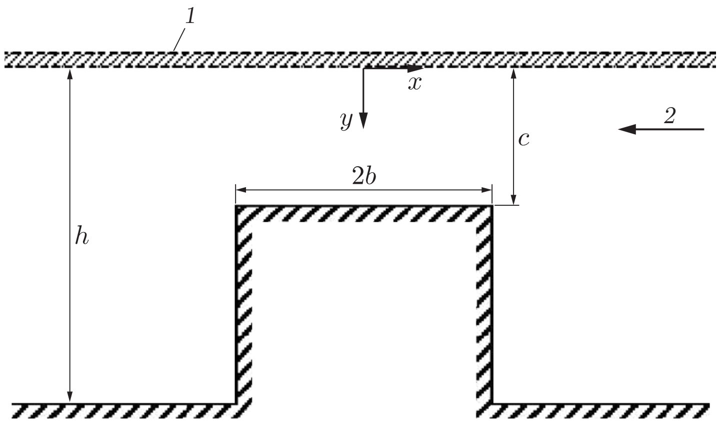


Рис. 1. Схема задачи:
*1* — ледяной покров, *2* — падающая волна

В этом случае последовательность поверхностных волн, набегающих справа из бесконечности по нормали к препятствию, определяется потенциалом скоростей $\operatorname{Re}\{\varphi^{inc}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\}$, где

$$\varphi^{inc}(x,y) = \frac{2\operatorname{ch}\lambda_0(h-y)\,\mathrm{e}^{-i\lambda_0(x-b)}}{\operatorname{ch}\lambda_0 h},$$

$\lambda_0$ — единственный положительный корень трансцендентного уравнения

$$k(Dk^4 + 1 - \varepsilon K)\operatorname{th} kh = K, \tag{1.1}$$

$K = \omega^2/g$; $g$ — ускорение свободного падения; $\varepsilon = \rho_i d/\rho$; $D = Ed^3/(12(1-\nu^2)\rho g)$ — изгибная жесткость льдины; $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала упругой пластины; $\rho$ — плотность воды; $\rho_i$ — плотность льда; $d$ — толщина части ледяного покрова, погруженной в воду, настолько малая, что во всех реализуемых на практике случаях $\varepsilon K < 1$.

Заметим, что уравнение (1.1) имеет положительный вещественный корень $\lambda_0$, четыре комплексных корня $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ ($\lambda_1$ имеет положительную и мнимую части, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$) и счетное множество чисто мнимых корней $\pm i\lambda_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$ ($\lambda_n^* > 0$), причем $(n-1/2)\pi < \lambda_n^* h < n\pi$ и $\lambda_n^* h \to n\pi$ при $n \to \infty$ (см., например, [20]).

Пусть движение жидкости описывается потенциалом скорости $\operatorname{Re}\{\varphi(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\}$. Тогда в области, занятой жидкостью, $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{1.2}$$

Условие на ледяном покрове записывается в виде

$$K\varphi + (D\,\partial_x^4 + 1 - \varepsilon K)\varphi_y = 0 \qquad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.3}$$

Условия на поверхностях препятствия имеют вид

$$\varphi_x = 0 \qquad \text{при} \quad x = \pm b, \quad c < y < h, \tag{1.4}$$

условия на дне —

$$\begin{aligned} &\varphi_y = 0 \qquad \text{при } y = c, \ |x| < b, \\ &\varphi_y = 0 \qquad \text{при } y = h, \ |x| > b, \end{aligned} \tag{1.5}$$

краевое условие —

$$r^{1/3}\nabla\varphi \leqslant \text{const} \quad \text{при} \quad r \to 0, \tag{1.6}$$

где $r$ — расстояние от точки $(x, y)$ до верхней поверхности препятствия. С учетом (1.3)–(1.6) имеем

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi^{inc}(x,y) + R\varphi^{inc}(-x,y), & x \to \infty, \\ T\varphi^{inc}(x,y), & x \to -\infty, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $R$, $T$ — неизвестные коэффициенты отражения и пропускания. Вывод краевого условия (1.6) приведен в работе [21. P. 24].

**2. Сведение задачи к интегральным уравнениям.** В силу геометрической симметрии относительно оси $y$ функцию $\varphi(x, y)$ можно представить в виде

$$\varphi(x,y) = \varphi^s(x,y) + \varphi^a(x,y),$$

где $\varphi^s(x, y)$, $\varphi^a(x, y)$ — симметричная и антисимметричная относительно плоскости $x = 0$ составляющие функции $\varphi(x, y)$:

$$\varphi^s(-x,y) = \varphi^s(x,y), \qquad \varphi^a(-x,y) = -\varphi^a(x,y). \tag{2.1}$$

Можно ограничиться анализом решения в области $x \geqslant 0$. Из (2.1) следует

$$\varphi^s_x(0,y) = \varphi^a(0,y) = 0. \tag{2.2}$$

Тогда функции $\varphi^{s,a}(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1.2), условиям (1.3)–(1.6) и (2.2) в области $x \geqslant 0$.

Пусть в дальнем поле поведение функций $\varphi^{s,a}(x, y)$ определяется соотношением

$$\varphi^{s,a} \simeq (\mathrm{e}^{-i\lambda_0(x-b)} + R^{s,a}\,\mathrm{e}^{i\lambda_0(x-b)})\frac{\operatorname{ch}\lambda_0(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_0 h} \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

где $R^s$, $R^a$ — неизвестные константы. Из (1.7) следует, что выражения для коэффициентов $R$ и $T$ можно записать в следующем виде:

$$R = \frac{1}{2}\,(R^s + R^a)\,\mathrm{e}^{-2i\lambda_0 b}, \qquad T = \frac{1}{2}\,(R^s - R^a)\,\mathrm{e}^{-2i\lambda_0 b}\,. \tag{2.3}$$

Выражение для симметричной части потенциала скоростей имеет вид

$$\varphi^s(x,y) = \begin{cases} (\mathrm{e}^{-i\lambda_0(x-b)} + R^s\,\mathrm{e}^{i\lambda_0(x-b)})\dfrac{\operatorname{ch}\lambda_0(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_0 h} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{n=1}^{2} A_n^s\,\mathrm{e}^{i\xi_n\lambda_n(x-b)}\ \frac{\operatorname{ch}\lambda_n(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_n h} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{*s}\,\mathrm{e}^{-\lambda_n^*(x-b)}\ \frac{\cos\lambda_n^*(h-y)}{\cos\lambda_n^* h}, & x > b, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{2} B_n^s\cos\alpha_n x\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(c-y)}{\operatorname{ch}\alpha_n c} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{*s}\operatorname{ch}\alpha_n^* x\,\frac{\cos\alpha_n^*(c-y)}{\cos\alpha_n^* c}, & 0 < x < b, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\alpha_0$ — положительный вещественный корень трансцендентного уравнения

$$k(Dk^4 + 1 - \varepsilon K)\operatorname{th} kc = K. \tag{2.5}$$

Как и уравнение (1.1), уравнение (2.5) имеет четыре комплексных корня $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ (корень $\alpha_1$ имеет положительные вещественную и мнимую части, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$) и счетное множество чисто мнимых корней $\pm i\alpha_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$ $(\alpha_n^* > 0)$ (см., например, [20]).

В (2.4) $A_n^s$, $B_n^s$ $(n = 1, 2)$ и $A_n^{*s}$, $B_n^{*s}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — неизвестные константы,

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ -1, & n = 2. \end{cases}$$

Выражение для антисимметричной части потенциала скорости $\varphi^a(x,y)$ представляется в виде (2.4) после замены $\cos\alpha_n x$, $\operatorname{ch}\alpha_n x$, $R^s$, $A_n^s$, $A_n^{*s}$, $B_n^s$, $B_n^{*s}$ на $\xi_n\sin\alpha_n x$, $\operatorname{sh}\alpha_n x$, $R^a$, $A_n^a$, $A_n^{*a}$, $B_n^a$, $B_n^{*a}$ соответственно.

Пусть

$$f^{s,a}(y) = \varphi_x^{s,a}(b+0,y), \qquad 0<y<h.$$

Тогда из условия (1.4) следует

$$\varphi_x^{s,a}(b-0,y) = \begin{cases} f^{s,a}(y), & 0<y<c,\\ 0, & c<y<h. \end{cases}$$

Из краевого условия (1.6) получаем

$$f^{s,a}(y) = O(|c-y|^{-1/3}) \quad \text{при} \quad y\to c-0. \tag{2.6}$$

Условия сопряжения на линии $x=b$ записываются в следующем виде:

$$\varphi^{s,a}(b-0,y) = \varphi^{s,a}(b+0,y), \qquad 0<y<c. \tag{2.7}$$

Выражения для неизвестных констант $A_n^{s,a}$ $(n=0,1,2)$ и $A_n^{*s,a}$ $(n=1,2,\ldots)$, входящих в (2.4), можно записать в виде (см., например, [22])

$$A_n^{s,a} = i\xi_n U(\lambda_n,h)\int\limits_0^c f^{s,a}(y)\frac{\operatorname{ch}\lambda_n(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_n h}\,dy, \qquad n=0,1,2, \tag{2.8}$$

где

$$\xi_0=1, \qquad A_0^{s,a} = 1-R^{s,a};$$

$$A_n^{*s,a} = iU(i\lambda_n^*,h)\int\limits_0^c f^{s,a}(y)\,\frac{\cos\lambda_n^*(h-y)}{\cos\lambda_n^* h}\,dy, \qquad n=1,2,\ldots; \tag{2.9}$$

$$U(k,h) = \frac{4(Dk^4+1-\varepsilon K)\operatorname{ch}^2 kh}{(Dk^4+1-\varepsilon K)2kh + (5Dk^4+1-\varepsilon K)\operatorname{sh}2kh}.$$

Аналогично выражения для неизвестных констант $B_n^{s,a}$ $(n=0,1,2)$ и $B_n^{*s,a}$ $(n=1,2,\ldots)$, входящих в (2.4), имеют вид

$$\begin{gathered} B_n^{s,a} = U(\alpha_n,c)\Big(-\frac{1}{\sin\alpha_n b},\frac{1}{\cos\alpha_n b}\Big)\int\limits_0^c f^{s,a}(y)\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(c-y)}{\operatorname{ch}\alpha_n c}\,dy, \qquad n=0,1,2,\\ B_n^{*s,a} = iU(i\alpha_n^*,c)\Big(-\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n^* b},\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_n^* b}\Big)\int\limits_0^c f^{s,a}(y)\,\frac{\cos\alpha_n^*(c-y)}{\cos\lambda_n^* c}\,dy, \qquad n=1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8)–(2.10) в уравнение (2.4) и используя условие сопряжения (2.7), получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^c g^{s,a}(u)L^{s,a}(y,u)\,du = \frac{\operatorname{ch}\lambda_0(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_0 h}, \qquad 0<y<c,$$

где

$$g^{s,a}(y) = -\frac{f^{s,a}(y)}{1+R^{s,a}}; \tag{2.11}$$

$$L^{s,a}(y,u) = \sum_{n=0}^{2} U(\alpha_n, c)(-\operatorname{ctg}\alpha_n b, \operatorname{tg}\alpha_n b)\,\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(c-y)\operatorname{ch}\alpha_n(c-u)}{\operatorname{ch}^2\alpha_n c} -$$

$$- i\sum_{n=1}^{2}\xi_n U(\lambda_n, h)\,\frac{\operatorname{ch}\lambda_n(h-y)\operatorname{ch}\lambda_n(h-u)}{\operatorname{ch}^2\lambda_n h} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(U(i\lambda_n^*, c)(-\operatorname{cth}\alpha_n^* b, \operatorname{th}\alpha_n^* b)\,\frac{\cos\alpha_n^*(c-y)\cos\alpha_n^*(c-u)}{\cos^2\alpha_n^* c} -$$

$$- U(i\lambda_n^*, h)\,\frac{\cos\lambda_n^*(h-y)\cos\lambda_n^*(h-u)}{\cos^2\lambda_n^* h}\Big). \qquad (2.12)$$

**3. Численное решение интегрального уравнения.** Для получения численного решения интегрального уравнения (2.11) используются аппроксимации Галеркина полиномами, умноженными на весовые функции, вид которых определяется краевым условием (2.6). Таким образом, для функции $f^{s,a}(y)$ принимается следующая аппроксимация:

$$f^{s,a}(y) \simeq g^{s,a}(y) = \Big(\frac{c}{c-y}\Big)^{1/3}\sum_{n=0}^{N} d_n^{s,a}\Big(\frac{y}{c}\Big)^n. \qquad (3.1)$$

Здесь $N$ — целое число, которое необходимо выбрать.

Подставляя с учетом (3.1) представление для функции $f^{s,a}(y)$ в (2.8), (2.9) и учитывая (2.12), получаем выражение

$$R^{s,a} = \frac{1+w}{1-w}, \qquad (3.2)$$

где

$$w = i\xi_0\sum_{n=0}^{N} d_n^{s,a}\int_0^c \Big(\frac{c}{c-y}\Big)^{1/3}\Big(\frac{y}{c}\Big)^n\frac{\operatorname{ch}\lambda_0(h-y)}{\operatorname{ch}\lambda_0 h}.$$

Полагая в соотношении (2.11) $y = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$, $0 < y_i < c$), получаем линейную систему уравнений для определения неизвестных констант $d_n^{s,a}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{n=0}^{N} d_n^{s,a} M_{in}^{s,a} = p_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N. \qquad (3.3)$$

Здесь

$$M_{in}^{s,a} = \int_0^h \Big(\frac{c}{c-u}\Big)^{1/3}\Big(\frac{u}{c}\Big)^n L^{s,a}(y_i, u)\,du, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$p_i = \frac{\operatorname{ch}\lambda_0(h-y_i)}{\operatorname{ch}\lambda_0 h}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

В качестве точек коллокации $y_i$ выбираем точки

$$y_i = ic/N, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Решая линейную систему уравнений (3.3) любым стандартным методом, определяем константы $d_n^{s,a}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) и, следовательно, приближенное решение интегрального уравнения (2.11).

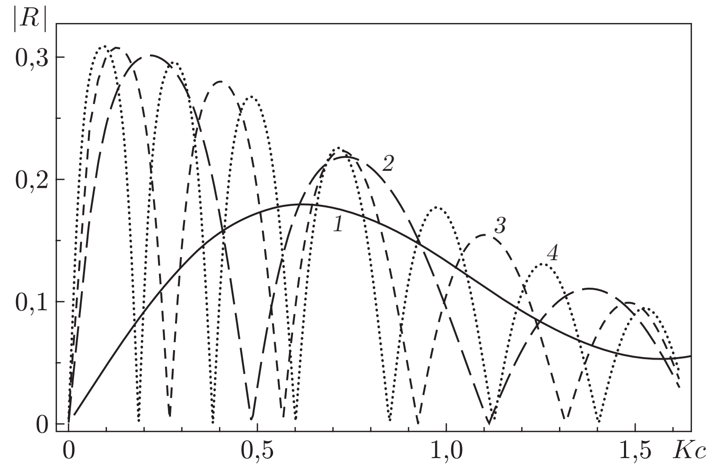


Рис. 2. Зависимость величины $|R|$ от параметра $Kc$ при $D' = 0{,}001$, $\varepsilon' = 0{,}001$ и различных значениях параметра $b/c$:
*1* — $b/c = 0{,}01$, *2* — $b/c = 2$, *3* — $b/c = 4$, *4* — $b/c = 6$

Подставляя выражения (3.2) для $R^s$ и $R^a$ в (2.3), получаем значения величин $|R|$ и $|T|$ для любых значений параметров задачи. Из результатов численных экспериментов следует, что достаточно точные значения $|R|$, $|T|$ получаются при $N = 3$.

**4. Анализ результатов численных расчетов.** Вычислены коэффициенты отражения и пропускания при различных значениях безразмерных параметров $b/c$, $D' = D/h^4$, $\varepsilon' = \varepsilon/h$, $Kc$. Вычисления выполнены при $N = 3$, $\varepsilon' = 0{,}001$.

На рис. 2 приведена зависимость величины $|R|$ от параметра $Kc$ при $D' = 0{,}001$, $\varepsilon' = 0{,}001$ и различных значениях $b/c$. При этих значениях параметров ледяной покров представляет собой практически свободную поверхность. Зависимости, приведенные на рис. 2, практически совпадают с зависимостями, полученными в работе [1] для случая свободной поверхности.

На рис. 3,*а*,*б* приведены зависимости величин $|R|$ и $|T|$ от параметра $Kc$ при $b/c = 0{,}01$ и значениях $D' = 0{,}001$; $0{,}100$; $0{,}200$. Из приведенных зависимостей следует, что влияние ледяного покрова существенно, если его толщина очень мала. Нетрудно показать, что энергетическое тождество $|R|^2 + |T|^2 = 1$ выполняется. Это подтверждает правильность результатов численных расчетов.

На рис. 3,*в*–*з* также приведены зависимости величин $|R|$ и $|T|$ от параметра $Kc$ при различных значениях параметра $D'$ и толщины препятствия $b/c$.

Из зависимостей, приведенных на рис. 2, 3, следует, что число осцилляций величин $|R|$ и $|T|$ увеличивается с увеличением толщины препятствия. Такая же закономерность отмечена в работах [1, 2] в случае, когда препятствие находится под свободной поверхностью.

**Заключение.** В работе исследовано рассеяние волн на вертикально расположенном на дне водоема препятствии с прямоугольным поперечным сечением. На поверхности водоема находится ледяное покрытие, которое моделируется тонкой упругой пластиной. Задача сведена к решению сингулярных интегральных уравнений первого рода. Интегральные уравнения решены с использованием аппроксимаций Галеркина полиномами, умноженными на весовые функции, учитывающие характер течения в окрестности препятствия. Ранее базисные функции такого типа не использовались в задачах о течении жидкости. С необходимой точностью вычислены коэффициенты отражения и пропускания при различных значениях параметров задачи. Приведены графики зависимостей коэффициентов отражения и пропускания от волнового числа. Установлено, что влияние ледяного покро-

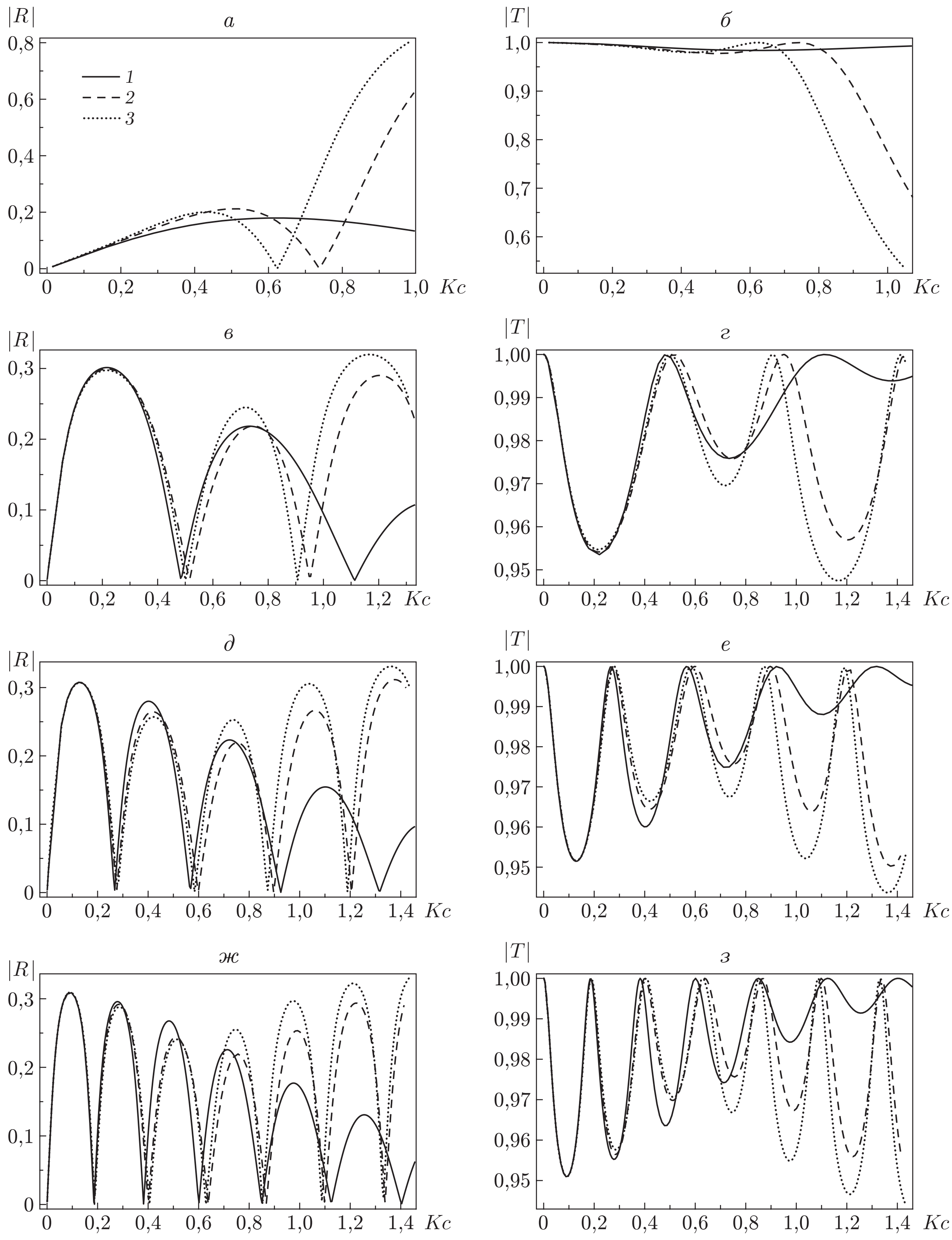


Рис. 3. Зависимости величин $|R|$ (*а, в, д, ж*) и $|T|$ (*б, г, е, з*) от параметра $Kc$ при различных значениях параметров $b/c$ и $D'$:
*а, б* — $b/c = 0{,}01$, *в, г* — $b/c = 2$, *д, е* — $b/c = 4$, *ж, з* — $b/c = 6$; *1* — $D' = 0{,}001$, *2* — $D' = 0{,}1$, *3* — $D' = 0{,}2$

ва является незначительным при малых значениях волнового числа и весьма существенно при больших значениях волнового числа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Mei C. C., Black J. L.** Scattering of surface waves by rectangular obstacles in water of finite depth // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. P. 499–511. DOI: 10.1017/S0022112069000309.
2. **Kanoria M., Dolai D. P., Mandal B. N.** Water wave scattering by thick vertical barriers // J. Engng Math. 1999. V. 35. P. 361–384. DOI: 10.1023/A:1004392622976.
3. **Weitz M., Keller J. B.** Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3, N 3. P. 305–318. DOI: 10.1002/cpa.3160030306.
4. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. P. 11629–11639. DOI: 10.1029/JC095iC07p11629.
5. **Fox C., Squire V. A.** On the oblique reflection and transmission of ocean waves at shore fast sea ice // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347. P. 185–218. DOI: 10.1098/rsta.1994.0044.
6. **Evans D. V., Porter R.** Wave scattering by narrow cracks in the ice-sheets on water of finite depth // J. Fluid Mech. 2003. V. 404. P. 143–165. DOI: 10.1017/S002211200300435X.
7. **Vaughan G. L., Squire V. A.** Scattering of ice-coupled wave by variable sea-ice terrain // Ann. Glaciology. 2006. V. 44. P. 88–94. DOI: 10.3189/172756406781811718.
8. **Das D., Mandal B. N.** Water wave radiation by a sphere submerged in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78. P. 649–661. DOI: 10.1007/s00419-007-0186-1.
9. **Squire V. A.** Of ocean waves and sea-ice revisited // Cold Regions Sci. Technol. 2007. V. 49. P. 110–133. DOI: 10.1016/j.coldregions.2007.04.007.
10. **Sturova I. V.** Hydrodynamic loads acting on an oscillating cylinder submerged in a stratified fluid with ice cover // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 3. P. 415–426. DOI: 10.1134/S0021894411030126.
11. **Bhattacharjee J., Soares C. G.** Flexural gravity wave over a floating ice sheet near a vertical wall // J. Engng Math. 2012. V. 75. P. 29–48. DOI: 10.1007/s10665-011-9511-3.
12. **Sturova I. V.** Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–428. DOI: 10.1017/jfm.2013.303.
13. **Sturova I. V.** Vibrations of a circular cylinder submerged in a fluid with a non-homogeneous upper boundary // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 3. P. 394–403. DOI: 10.1134/S0021894414030031.
14. **Sturova I. V.** Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395. DOI: 10.1017/jfm.2015.582.
15. **Sturova I. V.** Action of periodic surface pressure on an ice cover in the vicinity of a vertical wall // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 1. P. 80–88. DOI: 10.1134/S0021894417010096.
16. **Tkacheva L. A.** Oscillations of a cylindrical body submerged in a fluid with ice cover // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56, N 6. P. 1084–1095. DOI: 10.1134/S002189441506019X.
17. **Tkacheva L. A.** Behavior of a semi-infinite ice cover under periodic dynamic impact // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 4. P. 641–651. DOI: 10.1134/S0021894417040083.
18. **Tkacheva L. A.** Action of a local time-periodic load on an ice sheet with a crack // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 6. P. 1069–1082. DOI: 10.1134/S002189441706013X.
19. **Tkacheva L. A.** Wave pattern due to a load moving on the free surface of a fluid along the edge of an ice sheet // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 3. P. 462–472. DOI: 10.1134/S0021894419030088.

20. **Chung F., Fox C.** Calculation of wave ice interaction using Wiener — Hopf technique // New Zealand J. Math. 2002. V. 31. P. 1–18. DOI: 10.1007/s10665-011-9518-9.
21. **Mandal B. N.** Water wave scattering by barriers / B. N. Mandal, A. Chakrabarti. Southampton: WIT Press, 2002.
22. **Manam S. R., Bhattacharjee J., Sahoo T.** Expansion formulae in wave structure interaction problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser A. 2005. V. 462. P. 263–287. DOI: 10.1098/rspa.2005.1562.

*Поступила в редакцию 3/IX 2019 г.,*
*после доработки — 29/XI 2019 г.*
*Принята к публикации 23/XII 2019 г.*