УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ КОНТАКТ УДАРНИКА И СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Д. Г. Бирюков, И. Г. Кадомцев

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Рассматривается динамический осесимметричный упругопластический контакт массивного тела и кругового сегмента сферической оболочки, шарнирно опертой по контуру. Ставится задача об определении контактной силы взаимодействия в случаях, когда тело имеет сферическую и коническую форму. Выводится нелинейное интегральное уравнение для определения контактной силы с использованием безмоментных уравнений равновесия сферической оболочки, разрешенных относительно радиального перемещения оболочки, и различных моделей местного смятия. Результаты численного решения приводятся в виде графиков.

Задача рассматривается в предположении, что скорость взаимного сближения значительно меньше скорости упругих волн в материалах, что позволяет динамическую задачу заменить квазистатической за счет пренебрежения инерцией местного смятия в области контакта. Будем считать общие перемещения оболочки упругими, а местные в зоне контакта тела с оболочкой — упругопластическими. В начальный момент оболочка находится в покое. По вершине купола ударяет тело массой m с упругими постоянными E_2, ν_2 и пластической постоянной k_2.

Перемещение падающего тела обозначим через s, перемещение оболочки в точке контакта — через w, местное смятие — через α. Тогда имеет место зависимость [1]

$$s = w + \alpha. \tag{1}$$

Для определения перемещения ударника s используем дифференциальное уравнение движения тела $m\ddot{s} = -P(t)$, интегрируя которое с учетом начальных условий $s_0 = 0$, $\dot{s}_0 = V_0$, получаем

$$s(t) = V_0 t - \frac{1}{m}\int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} P(t_2)\,dt_2\,dt_1, \tag{2}$$

где V_0 — скорость ударника в начальный момент времени, направленная вдоль радиуса оболочки.

Перемещение оболочки под действием силы, приложенной в ее вершине, определим из безмоментных уравнений движения сферической оболочки, которые имеют вид

$$(N_\varphi \sin\varphi)_{,\varphi} - N_\theta \cos\varphi = \rho h R_1 \ddot{u}_\varphi \sin\varphi, \qquad N_\varphi + N_\theta = -\rho h R_1 \ddot{w} + q_3 R_1; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} N_\varphi = E_1 h((1-\nu_1^2)R_1)^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + w + \nu_1(u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + w)), \\ N_\theta = E_1 h((1-\nu_1^2)R_1)^{-1}(u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + w + \nu_1(u_{\varphi,\varphi} + w)). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь ρ — плотность материала; h, R_1 — толщина и радиус оболочки; q_3 — нагрузка; E_1, ν_1 — упругие постоянные оболочки; координатные линии φ и θ направлены вдоль меридиана и параллели соответственно. Пластическую постоянную оболочки обозначим k_1.

Граничные условия записываются в виде

$$u_\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \qquad w\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{5}$$

где φ_0 — угол раствора купола.

Введем следующие безразмерные величины: $v = u_\varphi/R_1$, $w = w/R_1$, $\tau = tc/R_1$, $c^2 = E_1((1-\nu_1^2)\rho)^{-1}$. Тогда уравнения (3), (4) запишутся в виде

$$(N_\varphi \sin\varphi)_{,\varphi} - N_\theta \cos\varphi = E_1 h(1-\nu_1^2)^{-1} v_{,\tau\tau} \sin\varphi,$$
$$N_\varphi + N_\theta = -E_1 h(1-\nu_1^2)^{-1} w_{,\tau\tau} + q_3 R_1,$$
$$N_\varphi = E_1 h(1-\nu_1^2)^{-1}(v_{,\varphi} + w + \nu_1(v \operatorname{ctg}\varphi + w)),$$
$$N_\theta = E_1 h(1-\nu_1^2)^{-1}(v \operatorname{ctg}\varphi + w + \nu_1(v_{,\varphi} + w)).$$

Исключим из этих уравнений усилия N_φ, N_θ:

$$v_{,\varphi\varphi}\sin\varphi + v_{,\varphi}\cos\varphi - (\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi + \nu_1\sin\varphi)v + (1+\nu_1)w_{,\varphi}\sin\varphi = v_{,\tau\tau}\sin\varphi,$$
$$(1+\nu_1)(v_{,\varphi} + v\operatorname{ctg}\varphi + 2w) = -w_{,\tau\tau} + q, \qquad q = (1-\nu_1^2)(E_1 h)^{-1} R_1 q_3.$$

Сделаем замену $v_\varphi = v\sin\varphi$:

$$v_{\varphi,\varphi\varphi} - v_{\varphi,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi + (1-\nu_1)v_\varphi + (1+\nu_1)w_{,\varphi}\sin\varphi = v_{\varphi,\tau\tau},$$
$$(1+\nu_1)(v_{\varphi,\varphi}\sin^{-1}\varphi + 2w) = -w_{,\tau\tau} + q.$$

Применим преобразование Лапласа по времени t, обозначив изображения v_φ, w, q через v_φ^*, w^*, q^* соответственно:

$$\begin{gathered} v^*_{\varphi,\varphi\varphi} - v^*_{\varphi,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi + (1-\nu_1-p^2)v^*_\varphi + (1+\nu_1)w^*_{,\varphi}\sin\varphi = 0, \\ (1+\nu_1)v^*_{\varphi,\varphi}\sin^{-1}\varphi + (2(1+\nu_1)+p^2)w^* = q^*, \end{gathered} \tag{6}$$

после чего преобразуем систему (6) к виду

$$(v^*_{\varphi,\varphi}\sin^{-1}\varphi)_{,\varphi} + (1-\nu_1-p^2)v^*_\varphi\sin^{-1}\varphi + (1+\nu_1)w^*_{,\varphi} = 0,$$
$$(1+\nu_1)(v^*_{\varphi,\varphi}\sin^{-1}\varphi)_{,\varphi} + (2(1+\nu_1)+p^2)w^*_{,\varphi} = q^*_{,\varphi}.$$

Отсюда, исключая $(v^*_{\varphi,\varphi}\sin^{-1}\varphi)_{,\varphi}$, находим

$$v^*_\varphi = \sin\varphi((1+\nu_1)(1-\nu_1-p^2))^{-1}(w^*_{,\varphi}(1-\nu_1^2+p^2) - q^*_{,\varphi}).$$

Дифференцируя полученное выражение для v^*_φ по φ, имеем

$$v^*_{\varphi,\varphi} = ((1+\nu_1)(1-\nu_1-p^2))^{-1}((1-\nu_1^2+p^2)(w^*_{,\varphi\varphi}\sin\varphi + w^*_{,\varphi}\cos\varphi) - (q^*_{,\varphi\varphi}\sin\varphi + q^*_{,\varphi}\cos\varphi)).$$

Подставив последнее выражение во второе уравнение системы (6), для w^* получим

$$\nabla^2 w^* + (2(1-\nu_1^2) - (1+3\nu_1)p^2 - p^4)(1-\nu_1^2+p^2)^{-1}w^* = \\ = (1-\nu_1^2+p^2)^{-1}(\nabla^2 q^* + (1-\nu_1-p^2)q^*), \tag{7}$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial\varphi^2 + (\partial/\partial\varphi)\operatorname{ctg}\varphi$.

Решение (7) ищем в виде ряда по полиномам Лежандра, которые обладают полнотой и удовлетворяют граничным условиям (5):

$$w^* = \sum_{n=0}^{\infty} w^*_n P_n(\cos(\delta_1\varphi)), \qquad \delta_1 = \frac{\pi}{2\varphi_0}.$$

Сосредоточенную нагрузку $q(t,\varphi) = P(t)\delta(\varphi)$ также раскладываем в ряд по полиномам Лежандра:

$$q = P(t)(2\pi R_1^2(1-\cos\varphi_0))^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos(\delta_1\varphi)),$$

$$q^* = P^*(p)(2\pi R_1^2(1-\cos\varphi_0))^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos(\delta_1\varphi)).$$

Подставляя разложения w^* и q^* в (7), находим

$$w_n^* = P^*(1-\nu_1^2)(2n+1)(p^2+B)(2\pi R_1 hE_1(1-\cos\varphi_0)(p^4+p^2A_2+A_0))^{-1},$$
$$B = n\delta_1(n\delta_1+1)+\nu_1-1, \qquad A_2 = n\delta_1(n\delta_1+1)+3\nu_1+1,$$
$$A_0 = (1-\nu_1^2)n\delta_1(n\delta_1+1)-2(1-\nu_1^2).$$

Так как

$$p^4+p^2A_2+A_0 = (p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2),$$
$$\omega_1^2 = (A_2+\sqrt{A_2^2-4A_0})/2, \qquad \omega_2^2 = (A_2-\sqrt{A_2^2-4A_0})/2,$$

то получим выражение, для которого существует табличное значение преобразования Лапласа [2]. Окончательно выражение для перемещения оболочки w запишется в виде

$$\begin{gathered} w(\varphi,\tau) = \frac{1-\nu_1^2}{2\pi R_1 hE_1(1-\cos\varphi_0)}\int_0^{\tau} P(\tau_1)\times \\ \times\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)[L_{1n}\sin(\omega_1(\tau-\tau_1))+L_{2n}\sin(\omega_2(\tau-\tau_1))]P_n(\cos(\delta_1\varphi))\,d\tau_1, \\ L_{in} = (B-\omega_i^2)(\omega_i(\omega_1^2-\omega_2^2))^{-1}, \qquad i=1,2. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставив в (1) выражения (2), (8) и выражения для α, соответствующие различным моделям местного смятия, получим нелинейное интегральное уравнение относительно $P(t)$, которое решается по следующей итерационной схеме [1]:

$\tau_i = \tau i$,
$s_i = s_{i-1}+V_{i-1}\tau+y_{i-1}\tau^2/2$,
$$w_i = \tau\,\frac{1-\nu_1^2}{2\pi R_1 hE_1(1-\cos\varphi_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}P_j(2n+1)[L_{1n}\sin(\omega_1(i-j)\tau)+L_{2n}\sin(\omega_2(i-j)\tau)],$$
$\alpha_i = s_i - w_i$,
вычисляется P_i по α_i,
$y_i = -P_i/m$,
$V_i = V_{i-1}+y_i\tau$.

Начальные условия записываются в виде $V|_{i=0} = V_0/c$, $s_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Величины P_i вычисляются по α_i на основе решения контактной задачи с использованием следующих моделей:

— для шарообразного ударника с радиусом кривизны в точке контакта R_2:

1) упругопластическая [3, 4]:

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, \quad P_{\max} < P_1, \quad dP/dt > 0, \\ b_f P^{2/3} + \alpha_p(P_{\max}), \quad dP/dt < 0, \quad P_{\max} > P_1, \\ (1+\beta)c_1P^{1/2} + (1-\beta)Pd, \quad dP/dt > 0, \quad P_{\max} > P_1, \end{cases} \tag{9}$$

где $b = R^{-1/3}(3/(4E))^{2/3}$; $R^{-1} = R_2^{-1} - R_1^{-1}$; $E = E_1E_2((1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1)^{-1}$; $P_1 = \chi^3(3R/(4E))^2$; $\chi = \pi k\lambda$; k — наименьшая из двух пластических констант соударяющихся тел; $\lambda = 5{,}7$; $b_f = R_f^{-1/3}(3/(4E))^{2/3}$; $R_f = (4/3)EP_{\max}^{1/2}\chi^{-3/2}$; $\alpha_p(P_{\max}) = (1-\beta)P_{\max}(2\chi R_p)^{-1}$; $R_p^{-1} = R^{-1} - R_f^{-1}$; $\beta = 0{,}33$; $c_1 = 3\chi^{1/2}(8E)^{-1}$; $d = (2\chi R)^{-1}$;

2) модель Кильчевского [5]:

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & P < P_0, \quad dP/dt > 0, \\ bP^{2/3} + Pd, & P > P_0, \quad dP/dt > 0, \\ bP^{2/3} + P_{\max}d, & P_{\max} > P_0, \quad dP/dt < 0, \end{cases} \qquad (10)$$

где $P_0 = (4/3)Ea_0^3R^{-1}$; $a_0 = \pi kR(0{,}62E)^{-1}$;

3) модель Герца:

$$\alpha = bP^{2/3}; \qquad (11)$$

4) жесткопластическая (следует из (9), если отбросить упругие члены):

$$\alpha = (1-\beta)Pd; \qquad (12)$$

— для конического ударника с углом раствора конуса 2γ:

1) упругая [6]:

$$\alpha = (\pi \operatorname{ctg}\gamma/(2E))^{1/2}P^{1/2}; \qquad (13)$$

2) упругопластическая [7]:

$$\alpha = \begin{cases} c_2P^{1/2}, & dP/dt > 0, \\ (P\chi)^{1/2}E_1^{-1} + \alpha_{p,\max}, & dP/dt \leqslant 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где $c_2 = \operatorname{ctg}\gamma(1-\delta)\chi^{-1/2} + (1 + 2(\delta-1)/\pi)\chi^{1/2}E^{-1}$; $\alpha_{p,\max} = (1-\delta)(P_{\max}/\chi)^{1/2}(\operatorname{ctg}\gamma - 2\chi/(\pi E))$; $\delta = 0{,}22$.

На рис. 1–3 представлены зависимости $P(t)$, полученные с использованием моделей местного смятия (9)–(14) при следующих значениях параметров задачи: радиус оболочки $R_1 = 1$ м, толщина оболочки $h = 0{,}01$ м, угол раствора купола $\varphi_0 = 90°$, радиус шарообразного ударника $R_2 = 0{,}02$ м, масса ударника $m = 0{,}25$ кг, материал оболочки и ударника — сталь (P_1, P_2, t_1, t_2 — максимальные значения контактной силы и времени контакта для сферического и конического ударников при использовании упругопластических моделей (9) и (14) соответственно).

Из рис. 1–3 следует, что результаты решений, соответствующих моделям (9) и (14), хорошо согласуются с экспериментальными данными [8]. Модель Герца (11) дает удовлетворительные результаты при $V_0 < 0{,}15$ м/с, жесткопластическая модель (12) применима

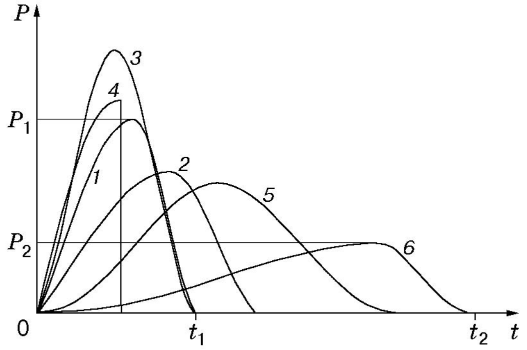

Рис. 1. Зависимость $P(t)$ при $V_0 = 0{,}5$ м/с ($P_1 = 4470{,}14$ Н, $P_2 = 1609{,}58$ Н, $2\gamma = 150°$, $t_1 = 0{,}000\,253\,164\,7$ с, $t_2 = 0{,}000\,699\,146\,8$ с): *1* — упругопластическая модель для шарика (9); *2* — модель Кильчевского (10); *3* — модель Герца (11); *4* — жесткопластическая модель (12); *5* — упругая модель для конуса (13); *6* — упругопластическая модель для конуса (14)

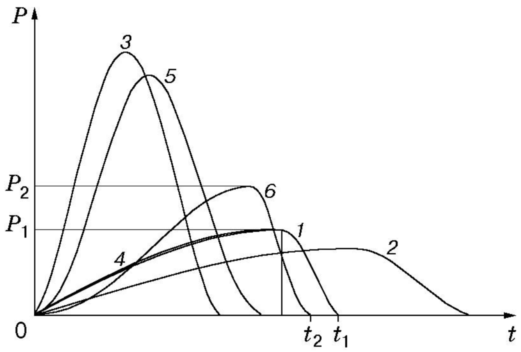

Рис. 2

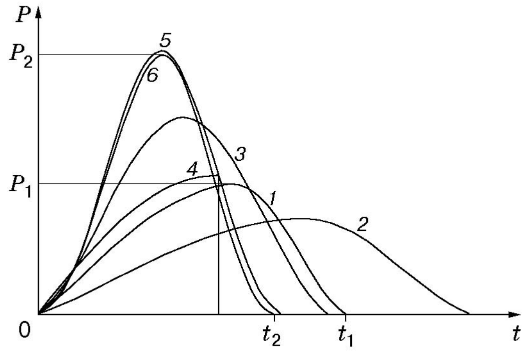

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $P(t)$ при $V_0 = 50$ м/с ($P_1 = 490{,}28$ кН, $P_2 = 744{,}3$ кН, $2\gamma = 150°$, $t_1 = 0{,}000\,164\,851\,4$ с, $t_2 = 0{,}000\,150\,132\,6$ с) (обозначения те же, что на рис. 1)

Рис. 3. Зависимость $P(t)$ при $V_0 = 1$ м/с ($P_1 = 9194{,}98$ Н, $P_2 = 18\,352{,}5$ Н, $2\gamma = 178°$, $t_1 = 0{,}000\,229\,614\,5$ с, $t_2 = 0{,}000\,176\,626\,5$ с) (обозначения те же, что на рис. 1)

лишь при $V_0 > 10$ м/с. При определении основных характеристик удара с использованием упругой модели для конуса (13) погрешность может достигать 100 %. Модель Кильчевского (10) также дает значительную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975.
2. **Корн Г. А., Корн Т. М.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
3. **Александров В. М., Ромалис Б. Л.** Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986.
4. **Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б.** Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ. 1984. Т. 1, № 1. С. 16–26.
5. **Кильчевский Н. А.** Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
7. **Кадомцев И. Г.** Осесимметричное упругопластическое соударение двух тел, одно из которых коническое // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1990. № 4. С. 50–54.
8. **Батуев Г. С., Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А.** Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977.

Поступила в редакцию 13/III 2002 г.