УДК 519.63:533:537

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИКИ АЭРОДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

А. Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН,
420111 Казань, Россия
E-mail: tukmakov@mail.knc.ru

Описана математическая модель электрогазодинамики аэродисперсной системы. Предложен численный метод решения системы уравнений и проанализирован процесс перемещения твердых заряженных аэрозольных частиц в потоке газовзвеси в электрическом поле, созданном коронирующим электродом распылителя, заземленной поверхностью, на которую осуществляется напыление, и зарядом, который несут аэрозольные частицы в межэлектродном пространстве. Решение основано на использовании модели двухтемпературной двухскоростной монодисперсной среды без фазовых переходов и коагуляции в предположении, что вязкостью обладает только несущая среда, описываемая системой уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Дисперсная фаза определяется уравнением сохранения массы, уравнениями сохранения компонент импульса с учетом действия силы Кулона и аэродинамического трения и уравнением сохранения внутренней энергии. Система записывается в обобщенных координатах в безразмерной форме и решается с использованием явного метода Мак-Кормака с расщеплением по пространственным координатам и консервативной схемы коррекции. Исследованы поля скорости и плотности газовзвеси в межэлектродном пространстве и вблизи поверхности, на которую напыляются твердые аэрозольные частицы в потоке газовзвеси.

Ключевые слова: двухскоростная двухтемпературная монодисперсная газовзвесь, электрическое поле, сила Кулона, уравнения Навье — Стокса, явная схема Мак-Кормака.

DOI: 10.15372/PMTF20150411

Введение. Модель движения газовзвеси при ее распылении в электрическом поле может быть использована для описания и оптимизации ряда технологических процессов, таких как нанесение полимерных порошковых покрытий, очистка промышленных газов в электростатических фильтрах, получение сухих смесей [1]. Параметрами, определяющими характер рассматриваемых процессов, являются плотность и скорость заряженных аэрозольных частиц в межэлектродном пространстве. В свою очередь пространственные распределения средней плотности и скорости аэрозольных частиц зависят от формы электродов, геометрии межэлектродного пространства, разности потенциалов и напряженности электрического поля, скорости и концентрации несущей и дисперсной фаз в потоке, а также от размеров, плотности и заряда аэрозольных частиц. Модель процесса, учитывающая указанные факторы, может быть построена на основе уравнений движения двухскоростной двухтемпературной среды без фазовых переходов [2], в которой учитывается воздействие на заряженную газовзвесь электрического поля [1, 3], созданного как электродами, так и распределенным в межэлектродном пространстве зарядом газовзвеси.

1. Уравнения движения несущей среды. С учетом межфазного обмена импульсом и энергией система уравнений движения несущей среды, в качестве которой рассматривается вязкий сжимаемый теплопроводный газ, в декартовых координатах в двумерной постановке имеет следующий вид [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = -F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = -F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big((e + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big((e + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big) =$$

$$= -Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1) + \alpha\Big(\frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y}\Big),$$

$$p = (\gamma - 1)\Big(e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2}\Big), \qquad e = I + \rho \frac{u^2 + v^2}{2},$$

$$\tau_{xx} = \mu\Big(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D\Big), \quad \tau_{yy} = \mu\Big(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D\Big), \quad \tau_{xy} = \mu\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Здесь ρ — плотность несущей среды; u, v, u_1, v_1 — составляющие скорости несущей и дисперсной фаз; e, λ, μ — полная энергия, теплопроводность и динамическая вязкость несущей фазы; величины F_x, F_y, Q определяются законами межфазного трения и теплообмена; $I = RT/(\gamma - 1)$ — внутренняя энергия газа.

2. Уравнения движения дисперсной фазы. Динамика дисперсной фазы описывается уравнениями сохранения средней плотности дисперсной фазы, компонент вектора импульса и внутренней энергии [2, 4]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1) = F_x - F_{ex} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_1^2) = F_y - F_{ey} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_1 g,$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(e_1 v_1) = \mathrm{Nu}\, \frac{6\alpha}{(2r)^2}\, \lambda(T - T_1), \quad \rho_1 = \alpha \rho_{10}, \quad e_1 = \rho_1 C_p T_1.$$

Здесь α, ρ_1, e_1, T_1, g — объемная доля, средняя плотность, внутренняя энергия, температура дисперсной фазы и ускорение свободного падения; C_p, ρ_{10} — удельная теплоемкость и плотность частиц твердой фазы; число Нуссельта определяется корреляционной зависимостью $\mathrm{Nu} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{M}_{10}} + 0{,}459\,\mathrm{Re}_{10}^{0{,}55}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}$ [2], учитывающей влияние сжимаемости газового потока на межфазный теплообмен; $\mathrm{Re}_{10} = \rho|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_1|2r/\mu$, $\mathrm{M}_{10} = |\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_1|/c$ — числа

Рейнольдса и Маха относительного движения несущей и дисперсной фаз; $\mathrm{Pr} = C_p\mu/\lambda$ — число Прандтля; составляющие силы аэродинамического трения F_x и F_y определяются по соотношениям [2]

$$F_x = \frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{2r}\,C_d\rho\sqrt{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2}\,(u-u_1),$$
$$F_y = \frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{2r}\,C_d\rho\sqrt{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2}\,(v-v_1),$$

r — радиус аэрозольной частицы. Коэффициент сопротивления определяется с использованием аппроксимации $C_d = C_d^0\psi(\mathrm{M}_{10})\varphi(\alpha)$ [2], где $C_d^0 = 24/\mathrm{Re}_{10} + 4/\mathrm{Re}_{10}^{0,5} + 0{,}4$; $\varphi(\alpha) = (1-\alpha)^{-2,5}$; $\psi(\mathrm{M}_{10}) = 1 + \exp(-0{,}427/\mathrm{M}_{10}^{0,63})$ — сжимаемость газового потока. Эта аппроксимация учитывает аэродинамическое сопротивление частицы в потоке газовзвеси. Аппроксимации для коэффициента сопротивления и числа Нуссельта справедливы в широком диапазоне относительных чисел Маха и Рейнольдса [2]: $0 \leqslant \mathrm{M}_{10} \leqslant 2$, $0 \leqslant \mathrm{Re}_{10} < 2\cdot 10^5$.

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля: $F_{ex} = -q_0\rho_1\,\partial\varphi/\partial x$, $F_{ey} = -q_0\rho_1\,\partial\varphi/\partial y$ (q_0 — удельный заряд единицы массы твердой фракции; φ — потенциал электростатического поля). Температура несущей среды T и внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы e_1 вычисляются по соотношениям $T = (\gamma-1)(e/\rho - (u^2+v^2)/2)/R$, $e_1 = \rho_1 C_p T_1$. В уравнение энергии для несущей фазы входят теплопроводность газа λ и тепловой поток, возникающий за счет теплообмена между газом и частицей:

$$Q = \alpha^{\text{т}}\,4\pi r^2(T-T_1)n = \frac{3\alpha\alpha^{\text{т}}\,4\pi r^2(T-T_1)}{4\pi r^3} = \frac{3\alpha\alpha^{\text{т}}(T-T_1)}{r} = \frac{6\alpha\,\mathrm{Nu}\,\lambda(T-T_1)}{(2r)^2}$$

($\mathrm{Nu} = 2r\alpha^{\text{т}}/\lambda$ — число Нуссельта; n — концентрация частиц).

Система уравнений движения газовзвеси дополнялась уравнением модели Спаларта — Аллмараса [5] для кинематической вязкости, записывалась в обобщенных криволинейных координатах и решалась с использованием явного метода Мак-Кормака второго порядка [4, 6, 7] и нелинейной схемы коррекции решения [4, 8].

3. Результаты расчетов динамики газовзвеси в электрическом поле. На рис. 1 приведена схема расчетной области и показано расположение электродов. Распыление аэрозоля происходит через канал с сечением CC_1. На оси симметрии расположен положительный коронирующий электрод OO_1, к которому подводится потенциал φ_1. Поперек

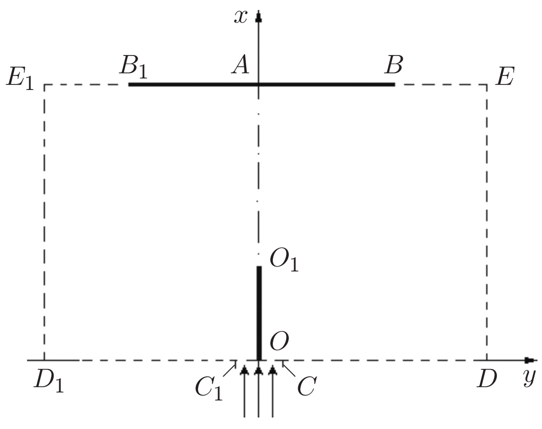

Рис. 1. Схема расчетной области

потока располагается пластина BB_1 с потенциалом φ_2, на которую в процессе распространения аэрозоля осаждается твердая фаза. В начальный момент времени смесь неподвижна, температуры фаз одинаковы: $T_0 = T_{10}$, плотность воздуха и объемная доля дисперсной фазы α внутри расчетной области и на ее границах заданы. Предполагается, что в условиях развитого коронного разряда процесс ионизации сосредоточен в узкой области вблизи электрода, т. е. в "оболочке" коронного разряда. Во внешней области коронного разряда, занимающей основную часть межэлектродного пространства, движутся положительные ионы [1]. В этом случае потенциал электрического поля, созданный электродами и заряженной газовзвесью в межэлектродном пространстве, определяется из решения уравнения Пуассона с неоднородными граничными условиями первого рода на поверхности электродов и с однородными условиями второго рода на свободных границах расчетной области (см. рис. 1) с учетом симметрии задачи [1, 3]:

$$\Delta^2\varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \varphi = \varphi_1\colon (x,y) \in OO_1, \quad \varphi = \varphi_2\colon (x,y) \in AB, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\colon \quad (x,y) \in OD,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\colon \quad (x,y) \in BE, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\colon \quad (x,y) \in DE \cup O_1A.$$

Здесь $q = q_0\rho_1$ — объемная плотность электрического заряда; q_0 — удельный электрический заряд единицы массы, который приобретает газовзвесь в поле коронного разряда; ρ_1 — средняя плотность газовзвеси; $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ — диэлектрическая постоянная, Ф/м. Распределение потенциала определяется с помощью итерационного метода Зейделя на конечно-разностной сетке, построенной для газодинамической задачи.

Предполагалось, что распыление газовзвеси происходит на участке CC_1, где задается скорость течения несущей среды. Для плотности, энергии, давления и температуры газа на поверхности электродов и внешних границах задавалось условие Неймана. Считалось, что дисперсная фаза несет положительный заряд, который она получает в поле коронного разряда вблизи электрода OO_1 вне области ионизации газа за счет присоединения к аэрозольным частицам положительных ионов [1]. Удельная плотность заряда на единицу массы газовзвеси q_0 известна и является параметром технологического процесса. Для скорости частиц на поверхности электрода OO_1 задавалось условие проскальзывания, на поверхности электрода BB_1 с потенциалом φ_2 ставилось условие прилипания. Для плотности и энергии дисперсной фазы на поверхности электродов и внешних границах расчетной области ставились условия Неймана.

3.1. *Влияние заряженной дисперсной фазы на напряженность электрического поля в межэлектродном пространстве.* Исследуем влияние заряженной газовзвеси на параметры электрического поля в межэлектродном пространстве. На рис. 2,*а,б* показаны эквипотенциальные линии и векторное поле напряженности электрического поля, полученные без учета потенциала заряженной газовзвеси в случае, когда длина коронирующего электрода $|OO_1| = 0{,}02$ м, потенциалы электродов равны $\varphi_1 = 30$ кВ, $\varphi_2 = 0$, расстояние между электродами $|O_1A| = 0{,}08$ м, в поперечном направлении ширина расчетной области $|D_1D| = 0{,}2$ м. Наибольший потенциал $\varphi_1 = 30$ кВ локализован вблизи электрода OO_1. На рис. 2,*в,г* показаны те же характеристики поля в случае, когда заряженная мелкодисперсная газовзвесь со средней плотностью $\rho_1 = 0{,}1$ кг/м^3, радиусом частиц $r = 1$ мкм и удельной массовой плотностью заряда $q_0 = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ Кл/кг равномерно заполняет межэлектродное пространство. В этом случае потенциал межэлектродного пространства выравнивается и приближается к потенциалу коронирующего электрода (рис. 3). На рис. 4 представлены распределения потенциала и напряженности электрического поля вдоль оси x с учетом и без учета наличия пространственного заряда. Наличие распределенной в пространстве газовзвеси приводит к уменьшению напряженности поля вблизи коронирующего электрода OO_1 и увеличению ее вблизи электрода-мишени (см. рис. 4,*б*).

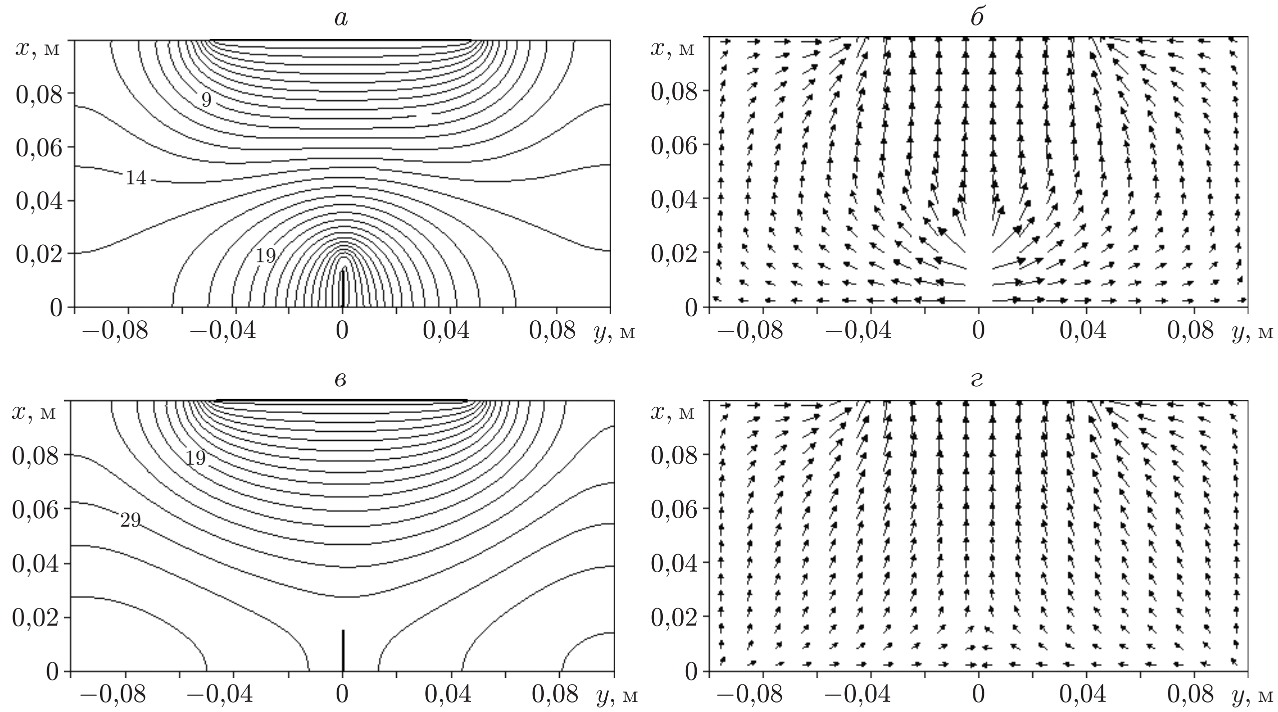

Рис. 2. Электрическое поле в межэлектродном пространстве ($\varphi_1 = 30$ кВ, $\varphi_2 = 0$): *а, б* — распределение потенциала и напряженность электрического поля, созданные электродами; *в, г* — распределение потенциала и напряженность электрического поля, созданные электродами и заряженной газовзвесью

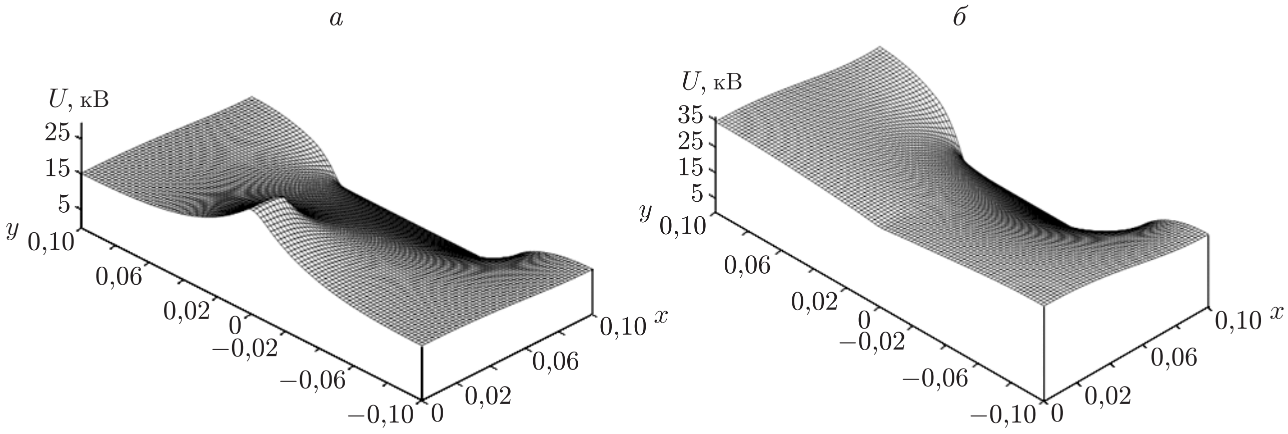

Рис. 3. Распределение потенциала электрического поля ($\varphi_1 = 30$ кВ, $\varphi_2 = 0$): *а* — случай, когда поле создано электродами, *б* — случай, когда поле создано электродами и заряженной газовзвесью

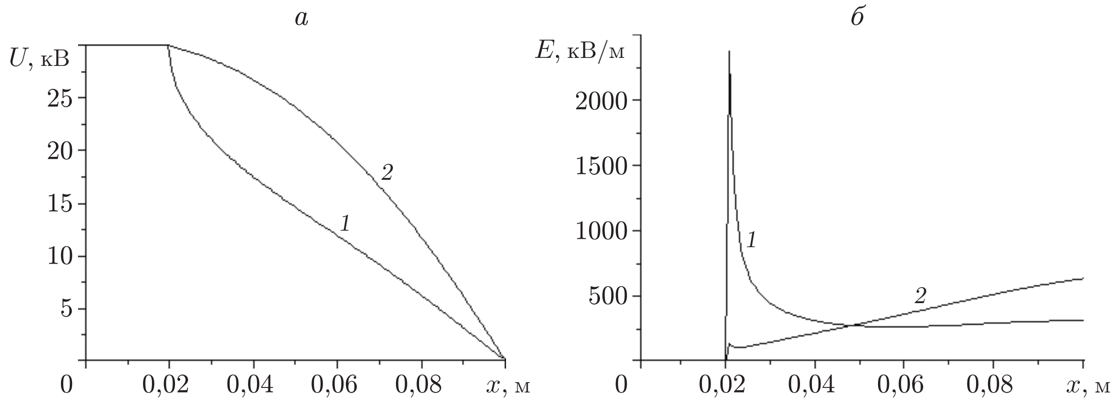

Рис. 4. Распределения потенциала (*а*) и напряженности электрического поля (*б*) вдоль оси симметрии межэлектродной области:
1 — случай, когда поле создано электродами с разностью потенциалов 30 кВ, *2* — случай, когда поле создано электродами и заряженной газовзвесью

3.2. *Движение заряженной газовзвеси под действием силы аэродинамического сопротивления в электрическом поле.* Пусть на участке CC_1 продольная составляющая скорости газа $u = 0{,}033c$ (c — скорость звука в воздухе), поперечная составляющая $v = 0$. Начальная плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3, температуры фаз одинаковы: $T_0 = T_{10} = 290$ К, $c = 335$ м/с. Начальная объемная доля твердой фазы внутри расчетной области равна $\alpha = 0{,}0001$ при плотности вещества фазы $\rho_{\text{тв}} = 1000$ кг/м^3 и безразмерной объемной плотности $\rho_1 = 1$. На участке CC_1 во входном потоке $\rho_1 = 2$. Внутри расчетной области в начальный момент времени смесь неподвижна, потенциалы электродов $\varphi_1 = 30$ кВ и $\varphi_2 = 0$ заданы. Расстояние от входной границы до поверхности напыления $|OA| = 0{,}1$ м, ширина пластины $|BB_1| = 0{,}1$ м. Длина коронирующего электрода $|OO_1| = 0{,}02$ м, ширина канала распылителя $|CC_1| = 0{,}005$ м, ширина расчетной области $|DD_1| = 0{,}2$ м. Расчетная область D_1E_1ED (см. рис. 1) покрывалась равномерной сеткой с числом узлов $I \times J = 200 \times 200$. При $t > 0$ газовзвесь начинает втекать в расчетную область через участок CC_1, при этом формируются поля давления, скорости и плотности фаз. На рис. 5,*а,б* приведены поля скоростей несущей и взвешенной фаз соответственно в момент времени $t = 0{,}01$ с для мелкодисперсной газовзвеси ($r = 1$ мкм). Несимметричность течения обусловлена воздействием силы тяжести на аэрозольные частицы. В силу малой инерционности и малой средней плотности поле скоростей дисперсной фазы идентично полю скоростей газа. Для частиц радиусом 1 мкм сила аэродинамического сопротивления даже вблизи поверхности электрода-мишени на несколько порядков превышает силу Кулона. Поэтому скорости частиц направлены по касательной к поверхности, мелкодисперсная газовзвесь обтекает электрод-мишень, скорость осаждения частиц незначительна (см. рис. 5,*б*). На рис. 6,*а* показано изменение во времени поверхностной плотности дисперсной фазы $\rho_{\text{п}}(t) = \int\limits_0^t \rho_1 u_1 \, dt$ в различных точках электрода-мишени, а на рис. 6,*б* приведены значения интеграла по времени от потока плотности через выходную границу области включая поверхность электрода.

При увеличении радиуса аэрозольных частиц картина течения газовзвеси меняется. На рис. 5,*в,г* показаны поля скоростей газа и дисперсной фазы ($r = 30$ мкм). В этом случае сила Кулона вблизи поверхности превышает силу аэродинамического сопротивления, скорость осаждения частиц на поверхность существенно увеличивается. На рис. 7,*а* по-

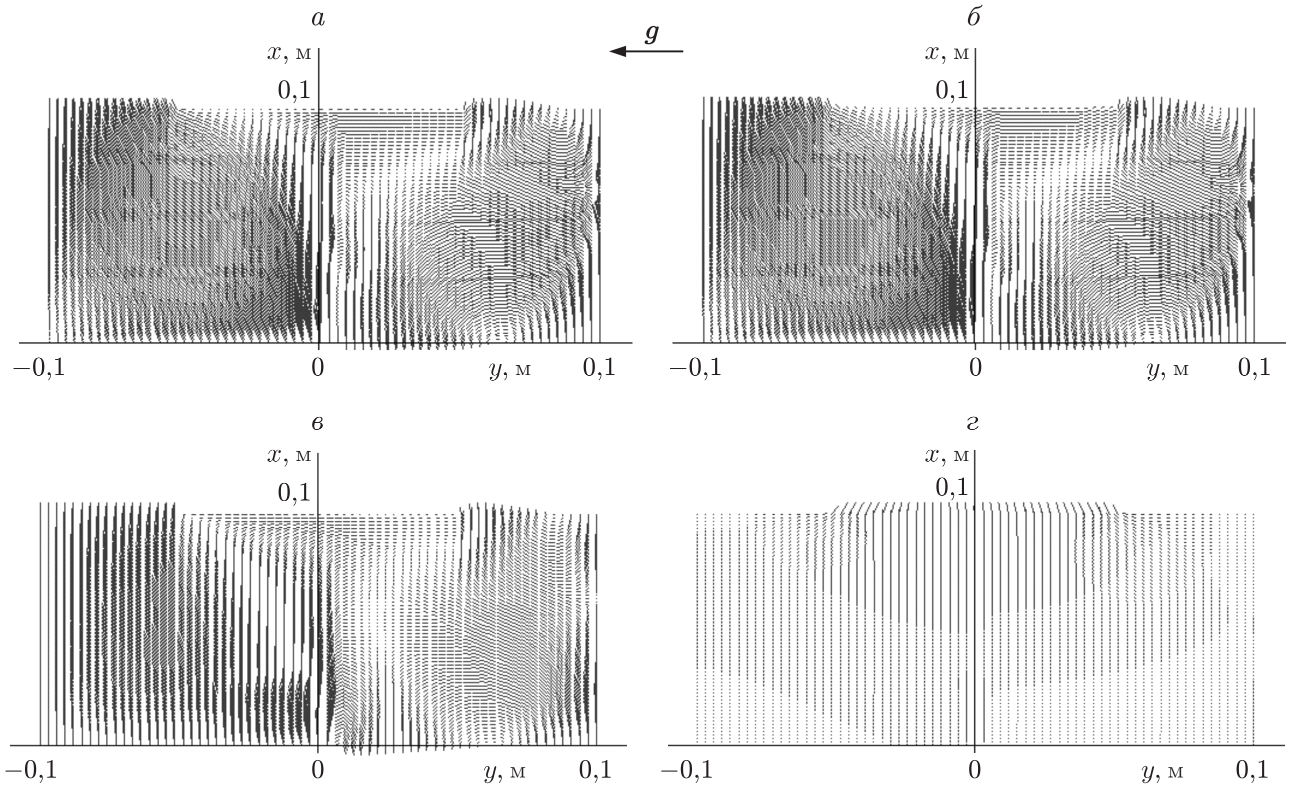

Рис. 5. Поля скоростей газа (*а, в*) и дисперсной фазы (*б, г*) в квазистационарном режиме течения:
а, б — $r = 1$ мкм; *в, г* — $r = 30$ мкм

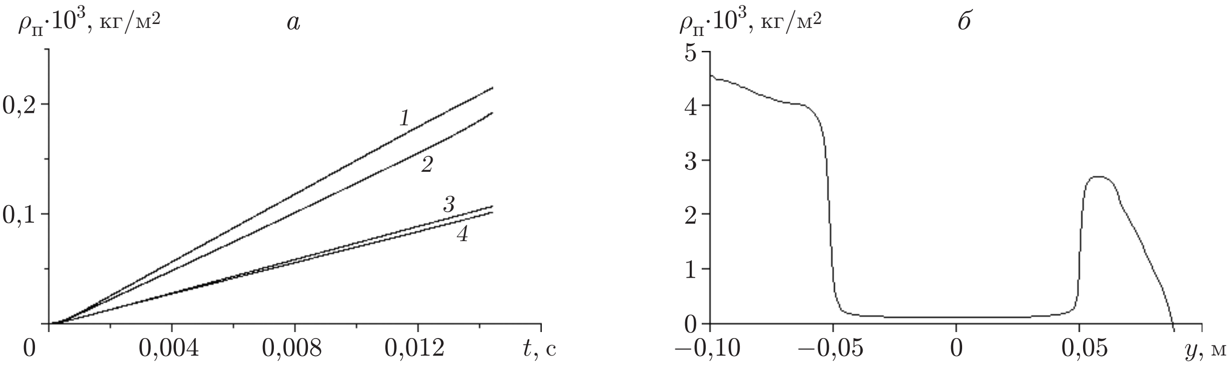

Рис. 6. Плотность газовзвеси, распыляемой на поверхности электрода-мишени ($r = 1$ мкм):
а — зависимость поверхностной плотности от времени (*1* — $y = -0{,}045$ м, *2* — $y = 0{,}045$ м, *3* — $y = -0{,}01$ м, *4* — $y = 0{,}01$ м), *б* — распределение плотности на участке границы $x = 0{,}1$ м, $-0{,}05$ м $< y < 0{,}05$ м в момент времени $t = 0{,}014$ с

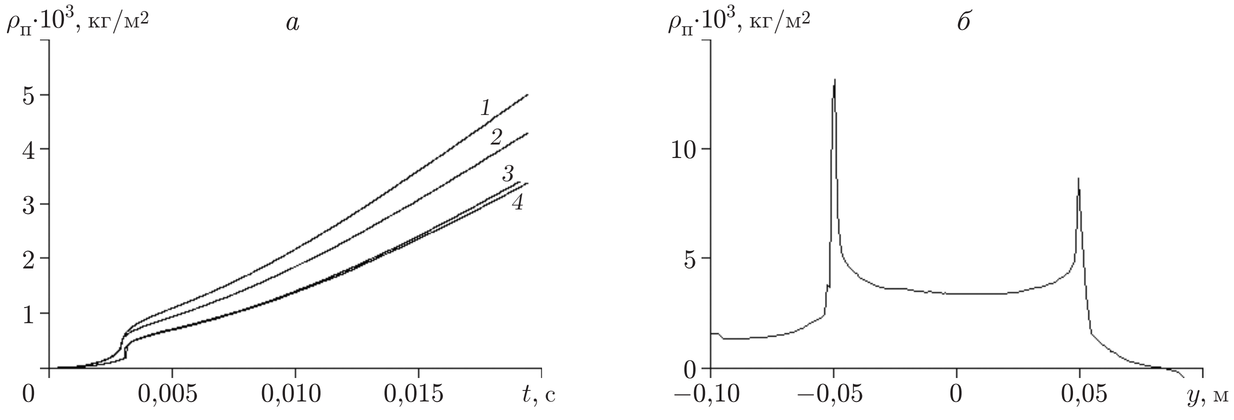

Рис. 7. Плотность газовзвеси, распыляемой на поверхности электрода-мишени ($r = 30$ мкм):

а — зависимость поверхностной плотности от времени (*1* — $y = -0{,}045$ м, *2* — $y = 0{,}045$ м, *3* — $y = -0{,}01$ м, *4* — $y = 0{,}01$ м), *б* — распределение плотности на участке границы $x = 0{,}1$ м, $-0{,}05$ м $< y <$ $0{,}05$ м в момент времени $t = 0{,}02$ с

казана зависимость поверхностной плотности дисперсной фазы от времени в различных точках электрода-мишени, на рис. 7,*б* приведены значения интеграла по времени от потока плотности через выходную границу области включая поверхность электрода. Видно, что скорость осаждения частиц радиусом $r = 30$ мкм приблизительно в 20 раз больше скорости осаждения частиц радиусом $r = 1$ мкм. Из рис. 7,*б* следует, что напыление крупных аэрозольных частиц происходит неравномерно: наибольшая поверхностная плотность достигается на кромках пластины ($y = -0{,}05$; $0{,}05$ м).

Заключение. В работе показано, что скорость осаждения твердой фазы на поверхность электрода-мишени зависит от степени ее дисперсности. Мелкодисперсная газовзвесь движется преимущественно под действием силы аэродинамического сопротивления, и при обтекании поверхности электрода-мишени происходит незначительное осаждение на нее частиц под действием силы Кулона. С увеличением радиуса аэрозольных частиц возрастает влияние силы Кулона, которая вблизи заряженной поверхности может превышать силу аэродинамического трения. В результате частицы перемещаются вдоль касательных к силовым линиям электрического поля, оканчивающимся на поверхности электрода-мишени, скорость осаждения возрастает. Расчеты показали, что при нанесении аэрозоля на плоскую поверхность, ориентированную по нормали к оси напыления в электростатическом поле, твердая фаза наносится неравномерно и ее плотность возрастает в направлении свободной кромки, где она достигает наибольшего значения вследствие увеличения напряженности электростатического поля в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Верещагин И. П.** Основы электрогазодинамики дисперсных систем / И. П. Верещагин, В. И. Левитов, Г. З. Мирзабекян, М. М. Пашин. М.: Энергия, 1974.
2. **Кутушев А. Г.** Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра. С.-Петерб. отд-ние, 2003.
3. **Фальковский О. И.** Техническая электродинамика. СПб.: Изд-во “Лань”, 2009.
4. **Тукмаков А. Л.** Численное моделирование колебаний монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 2. С. 36–43.

5. **Catris S., Aupoix B.** Density corrections for turbulence models // Aerospace Sci. Technol. 2000. V. 4, N 1. P. 1–11.
6. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2.
7. **Steger J. L.** Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // AIAA J. 1978. V. 16, N 7. P. 679–686.
8. **Жмакин А. И., Фурсенко А. А.** Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 1021–1031.

Поступила в редакцию 9/VII 2012 г.,
в окончательном варианте — 25/VI 2014 г.