

УДК 539.4

**Асимптотика собственных значений  
нелинейной задачи на собственные значения,  
следующей из проблемы определения  
напряженно деформированного состояния  
у вершины трещины  
в условиях смешанного нагружения**

Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева

Кафедра математического моделирования в механике, Самарский государственный университет, ул. Акад. Павлова, 1, Самара, 443011

E-mails: stepanovlv@samsu.ru (Степанова Л.В.), adylinaem@samsu.ru (Яковлева Е.М.)

**Степанова Л.В., Яковлева Е.М.** Асимптотика собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 207–222.

В статье приведены приближенные аналитические и численные решения класса нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения при исследовании полей напряжений и деформаций вблизи вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного нагружения в рамках предположения реализации плоского деформированного состояния. Асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения построено с помощью метода возмущений (метода малого параметра), в соответствии с которым разложения механических величин (функции напряжений Эри) осуществляются по искусственному малому параметру, представляющему собой разность между собственным числом, отвечающим нелинейной “возмущенной” задаче, и собственным числом, соответствующим линейной “невозмущенной” задаче. Показано, что метод малого параметра является эффективным методом решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, и позволяет определить новую асимптотику поля напряжений у вершины трещины. Приводится сравнение результатов асимптотического и численного решений задачи для различных значений параметра смешанности нагружения и показателя нелинейности материала.

**DOI:** 10.15372/SJNM20160207

**Ключевые слова:** *нелинейная задача на собственные значения, метод возмущений, асимптотика напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, смешанное нагружение образца с трещиной, степенной определяющий закон, спектр собственных значений.*

**Stepanova L.V., Yakovleva E.M.** Asymptotics of eigenvalues of the nonlinear eigenvalue problem arising from the near mixed-mode crack-tip stress-strain field problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 2. — P. 207–222.

In the present paper, approximate analytical and numerical solutions to nonlinear eigenvalue problems arising in the nonlinear fracture mechanics in analysis of stress-strain fields near a crack tip under a mixed mode loading are presented. Asymptotic solutions are obtained by the perturbation method (the small artificial parameter method). The artificial small parameter is a difference between the eigenvalue corresponding to the nonlinear eigenvalue problem and the eigenvalue related to the linear “undisturbed” problem. It is shown that the perturbation technique gives an effective method of solving nonlinear eigenvalue problems in the nonlinear fracture mechanics. Comparison of numerical and asymptotic results for different values of the

mixity parameter and hardening exponent shows good agreement. Thus, the perturbation theory technique for studying nonlinear eigenvalue problems is offered and applied to eigenvalue problems arising from the fracture mechanics analysis in the case of a mixed mode loading.

**Keywords:** *nonlinear eigenvalue problem, perturbation theory (small parameter method), asymptotics of stress and strain fields in the vicinity of the mixed-mode crack, mixed-mode loading, power constitutive law, eigenspectrum.*

## 1. Введение. О нелинейных краевых задачах на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения

В настоящее время асимптотические методы и теория возмущений широко используются в современной нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела [1], в том числе для нахождения асимптотики напряженно деформированного состояния в деформируемом образце с дефектом. Асимптотический анализ сингулярных полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи концентраторов напряжений (трещин, угловых вырезов и включений) вызывал и продолжает вызывать значительный интерес и привлекает внимание многих специалистов в области прикладной математики, асимптотических методов и механики деформируемого твердого тела [2–6]. Асимптотические поля напряжений, деформаций и перемещений вблизи углового выреза и трещины в изотропном линейном упругом материале впервые были определены М. Уильямсом [7]. С тех пор появлялись многочисленные асимптотические решения задач об угловых вырезах, трещинах и включениях, рассматривающих влияние разнообразных факторов (геометрии образца, свойств материала, системы приложенных нагрузок и др.) на распределение напряжений, деформаций и перемещений в окрестности концентратора напряжений [8–15]. Для упрочняющегося по степенному закону упругопластического материала

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$  — компоненты девиатора напряжений,  $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$  — интенсивность касательных напряжений,  $B, n$  — постоянные материала, определяемые экспериментально. Хатчинсон, Райс и Розенгрэн [16–18] получили ставшее уже классическим распределение напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины ( $r \rightarrow 0$ ):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left( \frac{J}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1.2)$$

где  $J$  — инвариантный интеграл механики разрушения;  $I_n$  — безразмерная функция, зависящая от  $n$  и определяемая как безразмерный  $J$ -интеграл;  $\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$  — универсальное угловое распределение напряжений — функции, известные из решения Хатчинсона–Райса–Розенгрэна (ХРР);  $r, \theta$  — полярные координаты с полюсом в вершине трещины. В силу степенного характера определяющих уравнений (1.1) можно применить метод разделения переменных и представить искомые величины в виде произведений двух функций, одна из которых зависит от расстояния от кончика трещины  $r$ , а другая — от полярного угла  $\theta$ . Для функции, зависящей от расстояния от вершины трещины, можно предположить степенную зависимость, тогда показатель данной степени интерпретируется как собственное значение и определяется из решения нелинейной задачи

на собственные значения для функции, зависящей от полярного угла, которая будет являться собственной функцией, отвечающей данному собственному значению. В задачах о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига данный подход позволяет найти собственное значение — показатель сингулярности напряжений у вершины трещины  $s = -1/(n + 1)$  в соотношениях (1.2) и собственные функции  $\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ . Следует отметить, что достаточно долго интерес исследователей вызывало и продолжает вызывать построение высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины с главным членом асимптотического разложения — решением ХРР (1.2). В [13, 19, 20] главный член асимптотического разложения компонент тензора напряжений — классическое решение ХРР (1.2). Однако сейчас отмечается необходимость нахождения всего спектра собственных чисел [9, 21], поскольку построение полей напряжений и деформаций у вершины трещины в среде с поврежденностью [22] приводит к новым задачам на собственные значения и влечет за собой необходимость знания всего спектра собственных значений задачи. Поскольку элементы ответственных конструкций, находящихся в реальных эксплуатационных условиях, подвержены действию сложных систем механических нагрузок, характерной для них является эксплуатация в условиях сложного напряженного состояния при наличии различным образом ориентированных дефектов. Если для трещин нормального отрыва (симметричное раскрытие берегов трещины) и поперечного сдвига (антисимметричное раскрытие берегов трещины) построены теоретические точные и приближенные решения, то для материалов с нелинейными определяющими соотношениями смешанное деформирование образцов с дефектами влечет за собой новые классы задач, требующих развития строгих математических методов, ориентированных на изучение именно этого класса задач, поскольку, если для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига справедливы соображения симметрии или антисимметрии, то для смешанного нагружения тел с трещинами в материалах, например со степенными определяющими уравнениями, соображения симметрии или антисимметрии применены быть не могут. В механике разрушения при изучении смешанного деформирования тела с разрезом, как правило, предполагается, что распределение (1.2), найденное посредством теоретического и численного решений для трещин отрыва и сдвига, справедливо и для случая комбинаций нагрузок (одновременное приложение растягивающей и сдвиговой нагрузок). Однако проблема определения напряженно деформированного состояния у вершины дефекта в материале с определяющими уравнениями (1.1) приводит к системе нелинейных уравнений в частных производных, при построении решений которой принцип суперпозиции, очевидно, не может быть применен. Требуется аккуратное математическое описание поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого отрыва до чистого сдвига. С математической точки зрения смешанное нагружение элементов конструкций с трещинами приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения и к необходимости развития математического аппарата для отыскания всего спектра собственных значений. В настоящей работе найдена асимптотика собственных значений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка, к которой приводит проблема определения напряженно деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного деформирования.

По всей видимости, первое обращение к исследованию смешанных форм деформирования было сделано в работах С. Ши [23, 24], где изучены поля напряжений и деформаций вблизи вершины трещины, находящейся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузок (т. е. рассматривалось смешанное нагружение, отвечающее трещинам типа I и типа II). Ши впервые ввел параметр смешанности нагружения [23, 24]:

$$M^P = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|, \quad (1.3)$$

который принимает нулевое значение для трещины поперечного сдвига и значение, равное единице, для чистого растяжения и значение  $0 < M^P < 1$  для смешанных форм нагружения образца с трещиной. С тех пор анализ смешанных мод деформирования является объектом пристального внимания ученых как в России [19–21], так и за рубежом [22, 25].

Целью настоящей работы является приближенное решение нелинейной задачи на собственные значения и определение всего спектра собственных чисел и соответствующих им собственных функций в нелинейной задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений, получающейся при определении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в среде со степенными определяющими уравнениями в случае плоского деформированного состояния в условиях смешанного нагружения с помощью метода искусственного малого параметра.

## 2. Математическая постановка задачи. Основные уравнения

Описание и анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования элемента конструкции в материале со степенными определяющими уравнениями (1.2) приводят к необходимости исследования уравнений равновесия и условия совместности деформаций:

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad r\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0, \quad (2.1)$$

$$2(r\varepsilon_{r\theta,\theta})_{,r} = \varepsilon_{rr,\theta\theta} - r\varepsilon_{rr,r} + r(r\varepsilon_{\theta\theta})_{,rr}. \quad (2.2)$$

В рамках предположения о реализации плоского деформированного состояния ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) определяющие соотношения степенного закона Рамберга–Осгуда (1.1) принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/4, \quad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2, \quad (2.3)$$

где интенсивность касательных напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2/4 + 3\sigma_{r\theta}^2.$$

Введение функции напряжений Эри  $\chi(r, \theta)$  такой, что

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \chi_{,rr}, \quad \sigma_{rr}(r, \theta) = \chi_{,r}/r + \chi_{,\theta\theta}/r^2, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -(\chi_{,\theta}/r)_{,r},$$

приводит к тождественному выполнению уравнений равновесия (2.1). Граничные условия задачи — условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.4)$$

Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям, в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри в окрестности вершины трещины ( $r \rightarrow 0$ ) разыскивается в форме  $\chi(r, \theta) = r^{\lambda+1}f(\theta)$ . Тогда компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины принимают вид  $\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -r^{\lambda-1}\lambda f'(\theta)$ ,  $\sigma_{rr}(r, \theta) = r^{\lambda-1}[(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)]$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)f(\theta)$ . Асимптотическое представление интенсивности касательных напряжений в окрестности вершины трещины имеет форму

$$\sigma_e(r, \theta) = r^{\lambda-1} f_e(\theta), \quad f_e^2 = [f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]^2 + 4\lambda^2 [f'(\theta)]^2. \quad (2.5)$$

В силу (2.3) и (2.5) компоненты тензора деформаций в окрестности вершины трещины при  $r \rightarrow 0$  имеют следующую структуру:

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = -\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \quad (2.6)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta) = 3f_e^{n-1} [f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]/4$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) = -3f_e^{n-1} \lambda f'(\theta)/2$ . Подстановка выражений (2.6) для компонент тензора деформаций в условие совместности (2.2) позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $f(\theta)$ :

$$2[(\lambda - 1)n + 1] \frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2\tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda - 1)n [(\lambda - 1)n + 2] \tilde{\varepsilon}_{rr} \quad (2.7)$$

или в терминах функции  $f(\theta)$ :

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{(4)} \left\{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \right\} + \\ & (n-1)(n-3) \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & f_e^4 (1-\lambda^2) f'' + (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2) f'' + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \right\} + \\ & C_1 f_e^4 f'' + [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & C_1 (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} f' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] = 0, \quad (2.8) \end{aligned}$$

где приняты обозначения:  $C_1 = 4\lambda[(\lambda - 1)n + 1]$ ,  $C_2 = (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2]$ . Решение нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка (2.8) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) вместе с краевыми условиями (2.9) приводит к двухточечной краевой задаче на собственные значения: необходимо найти собственные значения  $\lambda$ , отвечающие нетривиальным решениям уравнения (2.8), удовлетворяющим краевым условиям (2.9).

### 3. Метод возмущений (метод искусственного малого параметра)

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, является метод возмущений [1, 9, 26]. По всей видимости, впервые для задач механики разрушения данный подход для получения аналитической зависимости собственного значения нелинейной задачи от собственного значения, соответствующего линейной невозмущенной задаче, и от показателя нелинейности материала был применен М. Анхеузером и Д. Гроссом [27] для задачи антиплоского сдвига плоскости с разрезом. В [27] показано, что метод возмущений позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Впоследствии данный подход был развит для решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью [28, 29]. В [9] этот метод был применен

и для приближенной оценки собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига. Метод малого параметра является эффективным методом расчета собственных значений и соответствующих им функций. Поэтому метод искусственного малого параметра используется далее для решения нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в случае смешанного нагружения пластины с разрезом. В целом, можно отметить возрастающий интерес математического сообщества к аналитическим решениям нелинейных задач математической физики [9, 30–35]. Аналитическое выражение для собственного значения  $\lambda$  как функции от показателя нелинейности материала  $n$  и от собственного числа  $\lambda_0$ , отвечающего линейной задаче ( $n = 1$ ), может быть найдено с помощью методов асимптотической теории (метода возмущений). Суть этого подхода заключается в следующем представлении:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (3.1)$$

где  $\lambda_0$  соответствует невозмущенной линейной задаче,  $\varepsilon$  — отклонение собственного числа  $\lambda$  от собственного числа  $\lambda_0$  при изменении  $n$ :  $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ . Вместе с (3.1) показатель нелинейности материала  $n$  и функция, описывающая угловое распределение функции напряжений Эри  $f(\theta)$ , представляются в следующем виде ( $f_0(\theta)$  — решение линейной невозмущенной задачи ( $n = 1$ )):

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l n_l, \quad n_0 = 1, \quad (3.2)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\theta). \quad (3.3)$$

Подставляя асимптотические разложения (3.1)–(3.3) в уравнения (2.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем бесконечную систему неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_k(\theta)$ .

Для функции  $f_0(\theta)$  легко получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 - 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (3.4)$$

решение которого, подчиняющееся граничным условиям на берегах трещины

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \quad (3.5)$$

в линейной механике разрушения обычно связывают с именем М. Уильямса [7]. Общее решение уравнения (3.4) находится аналитически и имеет вид:

$$f_0(\theta) = B_1 \cos((\lambda_0 - 1)\theta) + B_2 \sin((\lambda_0 - 1)\theta) + B_3 \cos((\lambda_0 + 1)\theta) + B_4 \sin((\lambda_0 + 1)\theta). \quad (3.6)$$

Характеристическое уравнение для определения собственного значения  $\lambda_0$  получается из граничных условий на берегах трещины (2.4) и (3.5):  $\sin 2\pi\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = m/2$ , где  $m$  — целое число. Используя найденное выражение для собственного значения, можно отыскать соотношения между постоянными интегрирования  $B_j$ :

$$\begin{aligned} B_{3m} &= -(m-2)/(m+2)B_{1m}, & B_{4m} &= -B_{2m}, & m &= \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \\ B_{3m} &= -B_{1m}, & B_{4m} &= -(m-2)/(m+2), & m &= 0, 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для случая нечетных  $m$  (который рассматривается ниже) решение дифференциального уравнения относительно функции  $f_0(\theta)$  имеет вид:

$$f_0(\theta) = B_1 \{ \cos((\lambda_0 - 1)\theta) - \cos((\lambda_0 + 1)\theta) \} + B_2 \{ \sin((\lambda_0 - 1)\theta) - \sin((\lambda_0 + 1)\theta) \}. \quad (3.8)$$

Собирая коэффициенты при первой степени малого параметра  $\varepsilon$ , получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $f_1(\theta)$ , которое имеет вид

$$f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 = -n_1(x_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0))/g_0 + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0, \quad (3.9)$$

где для краткости приняты обозначения:

$$a_0 = 1 - \lambda_0^2, \quad x_0 = a_0 f_0 + f_0'', \quad g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2,$$

$$C_1^1 = 4\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)], \quad \omega_0 = (x_0')^2 + a_0 x_0 f_0'' + 4\lambda_0^2 (f_0'')^2 + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''', \quad C_2^1 = 2\lambda_0 [1 + n_1(\lambda_0 - 1)].$$

Граничные условия для функции  $f_1(\theta)$  формулируются как

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, для определения функции  $f_1(\theta)$  получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (3.9), (3.10). Поскольку однородная задача, соответствующая (3.9), (3.10), имеет нетривиальное решение (3.6), неоднородная задача обладает решением, если только выполнено условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче [1, 26]. Можно показать, что условие разрешимости краевой задачи относительно функции  $f_k(\theta)$  принимает вид [8, 9, 12]:  $\int_{-\pi}^{\pi} u g_k d\theta = 0$ , где  $u = f_0(\theta) = B_1 \{ \cos((\lambda_0 - 1)\theta) - \cos((\lambda_0 + 1)\theta) \} + B_2 \{ \sin((\lambda_0 - 1)\theta) - \sin((\lambda_0 + 1)\theta) \}$ ,  $g_k$  — правая часть неоднородного уравнения для функции  $f_k(\theta)$ . Формулируя условие разрешимости для краевой задачи относительно функции  $f_1(\theta)$ , можно найти коэффициент  $n_1$  асимптотического разложения показателя нелинейности материала (3.2). Для численного интегрирования уравнения (3.9) осуществлялся переход к задаче Коши. Сначала решение разыскивалось на отрезке  $[0, \pi]$ . Начальные условия для функции  $f_0(\theta)$  будут иметь вид:

$$f_0(\theta=0)=1, \quad f_0'(\theta=0)=(\lambda_0+1)/(tg(\pi M^P/2)), \quad f_0''(\theta=0)=A_1, \quad f_0'''(\theta=0)=A_2. \quad (3.11)$$

Для функции  $f_1(\theta)$  задача Коши формулируется со следующими условиями:

$$f_1(\theta=0)=0, \quad f_1'(\theta=0)=1/(tg(\pi M^P/2)), \quad f_1''(\theta=0)=A_3, \quad f_1'''(\theta=0)=A_4, \quad (3.12)$$

где параметр  $M^P$  в силу (3.6) определяется следующим образом:

$$M^P = (2/\pi) \arctg(-(\lambda_0 + 1)B_1/B_2).$$

Неизвестные константы  $A_1, A_2, A_3, A_4$  определяются из условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (3.5). На отрезке  $[-\pi, 0]$  формулируется начальная задача для уравнения (3.9) с начальными условиями для функций  $f_0(\theta)$  и  $f_1(\theta)$ :

$$f_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_0''(\theta = -\pi) = A_1^*, \quad f_0'''(\theta = -\pi) = A_2^*, \quad (3.13)$$

$$f_1(\theta = -\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_1''(\theta = -\pi) = A_3^*, \quad f_1'''(\theta = -\pi) = A_4^*. \quad (3.14)$$

Неизвестные константы  $A_k^*$  определяются из условий непрерывности решения  $f_0(\theta)$  при  $\theta = 0$ :

$$f_0(\theta=0)=1, \quad f_1(\theta=0)=0, \quad f_0'(\theta=0)=(\lambda_0+1)/tg(\pi M^p/2), \quad f_1'(\theta=0)=1/tg(\pi M^p/2).$$

Собирая коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в уравнении (2.8), получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $f_2(\theta)$ :

$$\begin{aligned} & g_0^2 [f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2] + g_0^2 (-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0) + \\ & n_1 \left\{ -x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] + \right. \\ & g_0 x_0 [-4\lambda_0 x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0' + 8\lambda_0 (f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''] + \\ & 2h_0 x_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] - 2h_0 x_0 [-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''] + \\ & 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] - 2\lambda_0 g_0 f_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + g_0 x_0^2 f_1^{IV} - \\ & 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + \\ & g_0 x_0 [2x_0' x_1' + a_0 f_0'' x_1 + a_0 x_0 f_1'' + 8\lambda_0^2 f_0'' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0''' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''] + \\ & 2h_0 x_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] - 2h_0 x_0 [x_0 x_1' + x_0' x_1 + \lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1'] + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1 + \\ & \left. 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) x_1 + 2h_0 g_0 x_0' - 2h_0^2 x_1 + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' \right\} = 0, \quad (3.15) \end{aligned}$$

где приняты сокращенные обозначения:

$$g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2, \quad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \quad x_1 = f_1'' + a_0 f_1.$$

Граничные условия для функции  $f_2(\theta)$  следуют из краевых условий (2.9):

$$\begin{aligned} f_2(\theta = 0) = 0, \quad f_2'(\theta = 0) = 0, \quad f_2''(\theta = 0) = A_5, \quad f_2'''(\theta = 0) = A_6, \\ f_2(\theta = -\pi) = 0, \quad f_2'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_2''(\theta = -\pi) = A_5^*, \quad f_2'''(\theta = -\pi) = A_6^*. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для численного решения краевой задачи (3.15), (3.16) был использован метод Рунге–Кутты–Фельберга в паре с методом пристрелки. В результате расчетов были найдены коэффициенты  $n_1$  и  $n_2$  для различных значений параметра смешанности  $0 \leq M^p \leq 1$  для  $n = 2$ . Результаты вычислений приведены в таблице.

В таблице приведена зависимость коэффициента  $n_k$  от параметра смешанности нагружения  $M^p$ . Видно, что коэффициент  $n_1$  слабо зависит от  $M^p$ , однако, как показывает третий столбец, зависимость  $n_2$  от  $M^p$  становится существенной, следовательно, для смешанного нагружения образца с дефектом пренебрегать зависимостью  $\lambda$  от параметра смешанности  $M^p$  нельзя. Численное решение нелинейной краевой задачи на собственные значения позволяет найти значения собственных чисел: например, для  $\lambda_0 = -1/2$ ,  $M^p = 0.9$ ,  $n = 2$  получено  $\lambda_{\text{num}} = -0.309309$ .

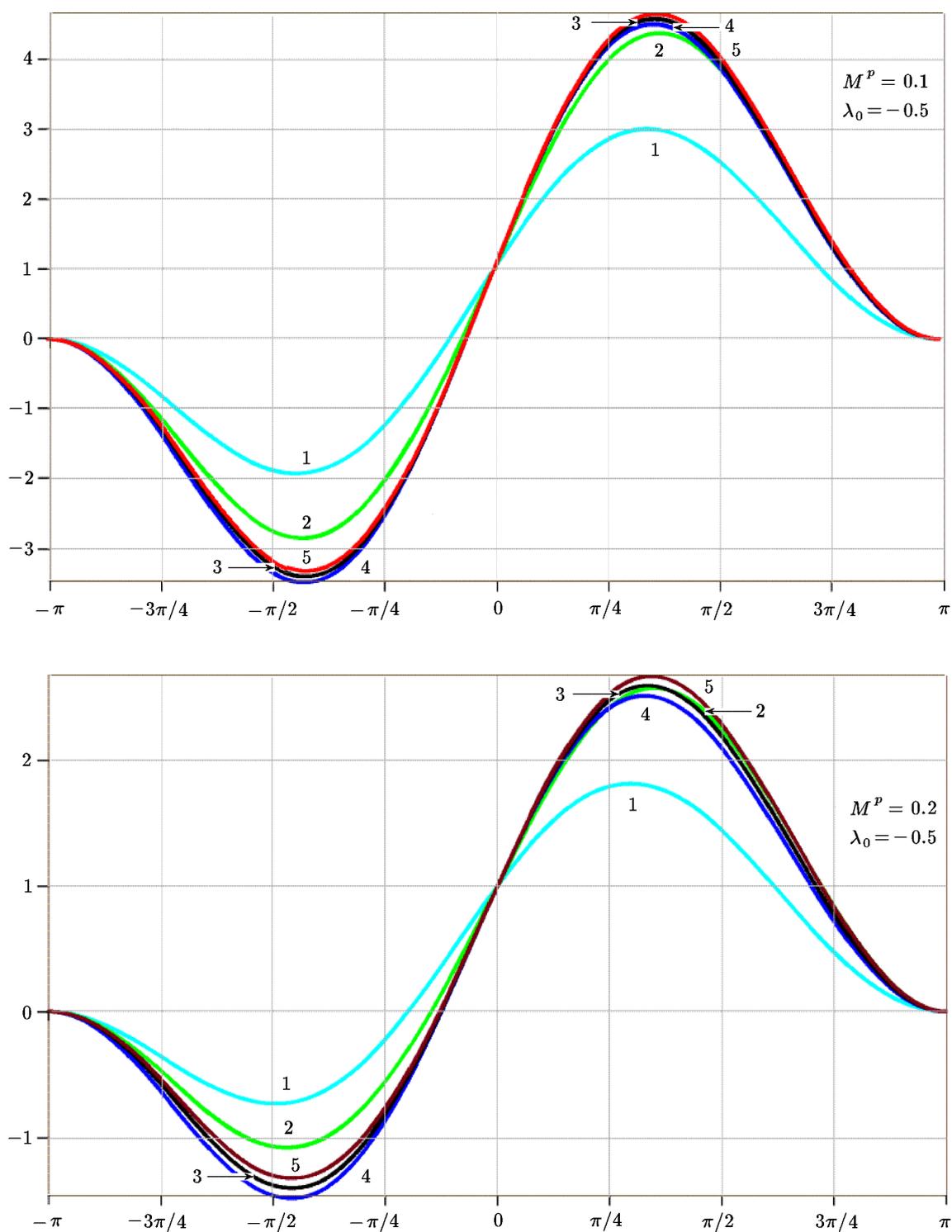
**Таблица.** Вычисленные значения коэффициентов  $n_1$  и  $n_2$  для  $\lambda_0 = 1/2$  и  $\lambda_0 = -1/2$ 

$M^p$	$\lambda_0 = 1/2$			$\lambda_0 = -1/2$		
	$n_1$	$n_2$	$\lambda$	$n_1$	$n_2$	$\lambda$
0.0	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	3.0123456	-0.104103
0.1	4.00000	7.9997562	0.683013	1.3333333	3.0269835	-0.104718
0.2	4.00000	7.9986923	0.683013	1.3333333	3.0701926	-0.106516
0.3	4.00000	7.9955185	0.683034	1.3333333	3.1397530	-0.109354
0.4	4.00000	7.9867700	0.683076	1.3333333	3.2316300	-0.112999
0.5	4.00000	7.9630625	0.683191	1.3333333	3.3396240	-0.117142
0.6	4.00000	7.8971870	0.683512	1.3333333	3.4551500	-0.121413
0.7	4.00000	7.7042370	0.684462	1.3333303	3.5674200	-0.125416
0.8	4.00000	7.1181770	0.687462	1.3334023	3.6780000	-0.129224
0.9	4.00014	5.5650000	0.696353	1.3518183	20.151000	-0.307255
1.0	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	1.1380240	0.019580

Погрешность между точным численным и приближенным асимптотическим решениями  $\delta = \left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{num}}}{\lambda_{\text{num}}} \right| 100\%$  составляет  $\delta = 0.664\%$ .

Сравнение численного решения и приближенного, полученного с помощью метода малого параметра, приводит к относительной ошибке, равной 0.85%. Так же был найден ряд значений коэффициента  $n_3$  для некоторых значений параметра смешанности  $M^p$  и  $\lambda_0 = -1/2$ :  $M^p = 0.1$ ,  $n_3 = 8.83223$ . Тогда четырехчленное асимптотическое разложение показателя нелинейности материала дает оценку для собственного значения  $\lambda = -0.184383$ . Для  $M^p = 0.2$  и  $n_3 = 9.0723675$  можно найти  $\lambda = -0.185326$ . Для  $M^p = 0.3$  и  $n_3 = 9.557903$  соответствующее собственное значение равно  $-0.1899672$ . Для  $n = 2$ ,  $M^p = 0.4$  и  $n_3 = 10.406663$  найдено, что  $\lambda = -0.195411$ . Наряду с проведенными вычислениями был найден ряд значений коэффициентов  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  для некоторых значений параметра смешанности нагружения  $M^p$  и  $\lambda_0 = 3/2$ :  $M^p = 0.3$ ,  $n_1 = -4$ ,  $n_2 = 15.73503635$ ,  $n_3 = -63.07088$ ,  $\lambda = 1.363465$ ;  $M^p = 0.5$ ,  $n_1 = -4$ ,  $n_2 = 14.64218150$ ,  $n_3 = -50.48461$ ,  $\lambda = 1.3586969$ . Следовательно, было получено прямое четырехчленное асимптотическое разложение Пуанкаре показателя нелинейности материала (в соответствии с терминологией принятой в [26]):  $n = 1 + n_1\varepsilon + n_2\varepsilon^2 + n_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$ . Из таблицы видно, что смешанное нагружение элемента конструкции (пластины) с дефектом ведет к нарушению асимптотики Хатчинсона–Райса–Розенгрена ( $\lambda_0 = 1/2$ ), поскольку, если бы решение ХРР было справедливым, как установлено в [9], то  $n_k = (-1)^k / (\lambda_0 - 1)^k$  (для всех  $k$ ,  $\lambda_0 = 1/2$ , а для  $\lambda_0 \neq 1/2$  должно было бы быть справедливым соотношение  $n_1 = -2/(\lambda_0 - 1)$ ). Но результаты вычислений, приведенные в таблице, показывают, что эти условия нарушаются и, следовательно, смешанное нагружение приводит к изменению асимптотики ХРР и необходимости исследования всего спектра собственных значений.

На рисунках 1–3 линия 1 — распределение  $f_0(\theta)$ , линия 2 — численное решение краевой задачи (2.8), (2.9), линии 3, 4, 5 — двучленное  $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta)$ , трехчленное  $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta)$  и четырехчленное  $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \varepsilon^3 f_3(\theta)$  асимптотические разложения функции  $f(\theta)$  соответственно. Из рис. 1–3 видно, что с увеличением числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении функции  $f(\theta)$  угловые распределения стремятся к численному решению. Из графиков видно, что при использовании метода малого параметра достаточно удерживать четыре слагаемых в асимптотическом разложении, поскольку угловое распределение функции  $f(\theta)$ , полученное с помощью четырехчленного асимптотического разложения, близко к предельному численному решению.



**Рис. 1.** Результаты вычислений для показателя параметра смешанности  $M^p = 0.1$ ,  $M^p = 0.2$  и  $\lambda_0 = -1/2$ ; угловые распределения функции напряжений Эри (собственная функция)

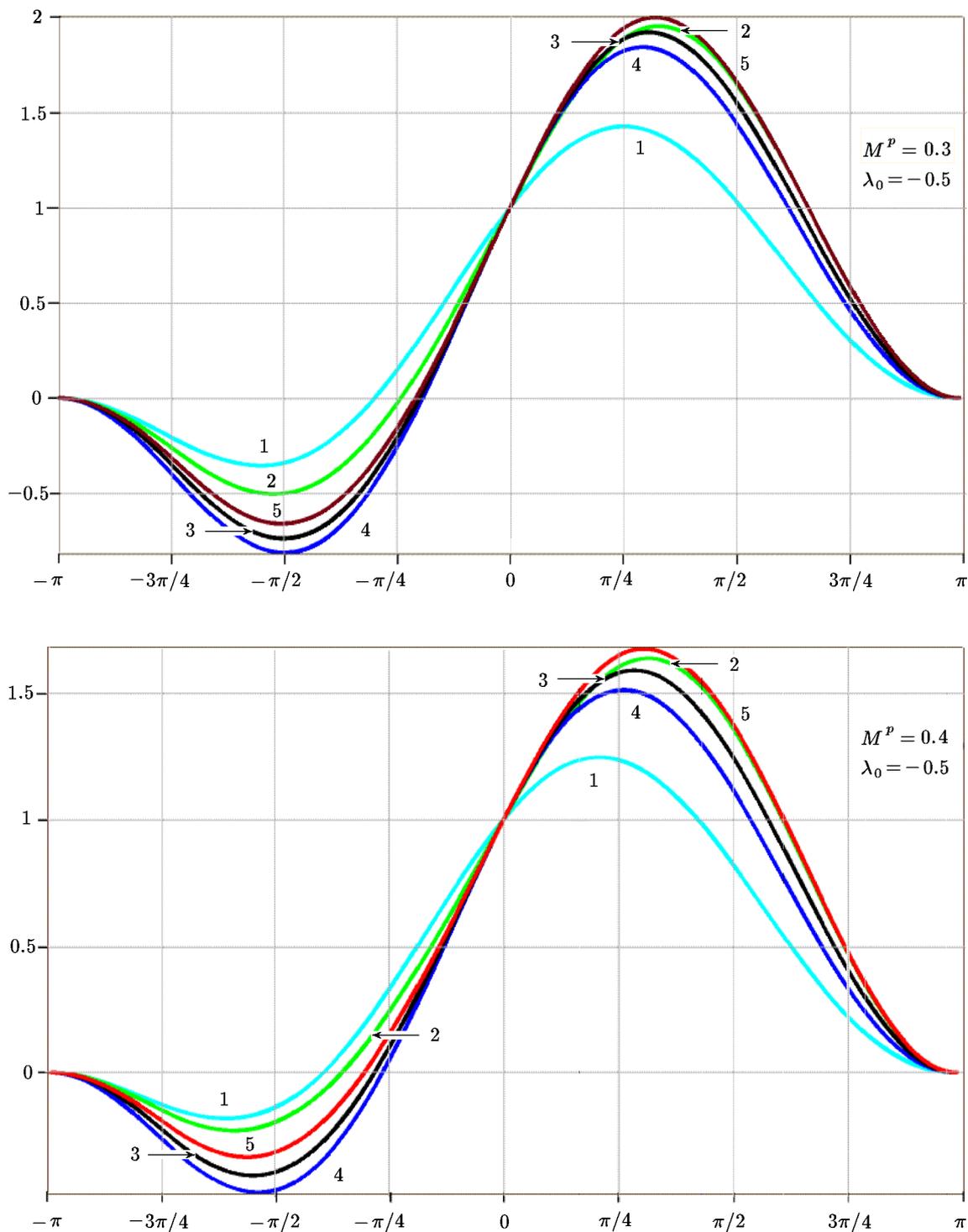
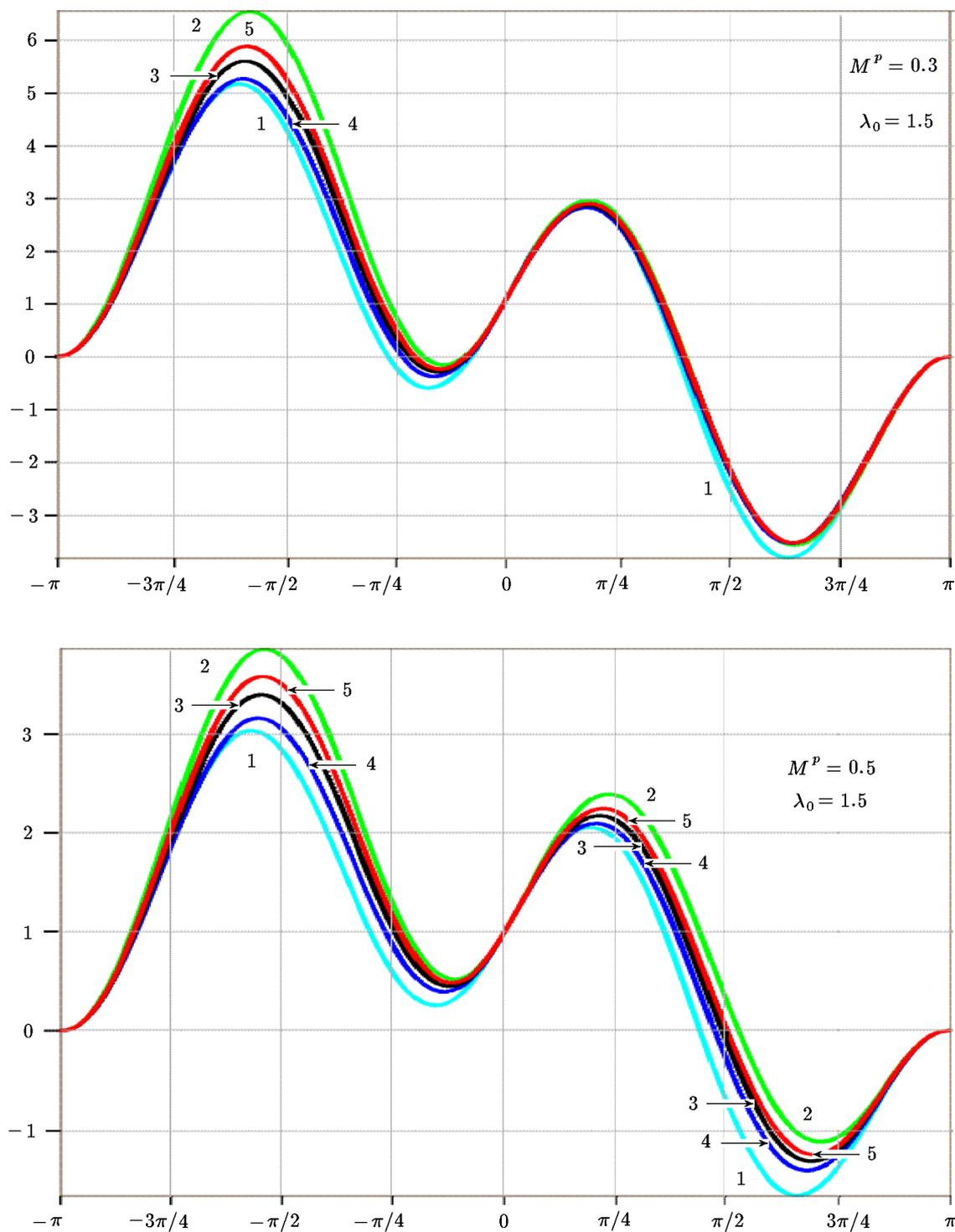


Рис. 2. Результаты вычислений для параметра смешанности  $M^P = 0.3$ ,  $M^P = 0.4$  и  $\lambda_0 = -1/2$ ; угловые распределения функции напряжений Эри (собственная функция)



**Рис. 3.** Результаты вычислений для параметра смешанности  $M^p = 0.3$ ,  $M^p = 0.5$  и  $\lambda_0 = 3/2$ ; угловые распределения функции напряжений Эри (собственная функция)

#### 4. Выводы и обсуждение результатов

В настоящей работе приведены результаты асимптотического и численного решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне видов смешанного деформирования от нормального отрыва до поперечного сдвига. Показано, что метод искусственного малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейной задачи, следующей из проблем нелинейной механики разрушения. Смешанное деформирование пластины с дефектом приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения, поскольку асимптотика собственных значений в случае смешанного нагружения начинает существенно зависеть от параметра смешанности нагружения. Метод возмущений позволяет найти весь спектр собственных значений задачи, которые могут быть уточнены с помощью численного решения. Численное решение строится посредством метода Рунге–Кутты–Фельберга в сочетании с методом пристрелки, для реализации которого очень важно знать начальное приближение, без которого поиск численного решения сопряжен с большими временными и вычислительными затратами. В этой связи объединение численного решения с асимптотическим подходом дает возможность быстрого и эффективного решения нелинейной задачи на собственные значения. Полученное решение ясно показывает, что смешанное деформирование приводит к новой асимптотике поля напряжений в окрестности вершины трещины и, как установлено с помощью методов теории возмущений, в случае смешанного нагружения асимптотика Хатчинсона–Райс–Розенгрена нарушается.

#### Литература

1. **Андрианов И., Аврейцевич Я.** Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
2. **Wei R.P.** Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
3. **Kuna M.** Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory–Numerics–Applications. — Dordrecht: Springer, 2013.
4. Duality, symmetry and symmetry lost in solid mechanics: selected works of H.D. Bui / A. Ehrlacher, H. Markenscoff. — Paris: Presses des Ponts, 2011.
5. **Бьюи Х.Д.** Механика разрушения: обратные задачи и решения. — М.: Физматлит, 2011.
6. **Вильдеман В.Э. и др.** Экспериментальные исследования свойств материала при сложных термомеханических воздействиях. — М.: Физматлит, 2012.
7. **Williams M.L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mechanics. — 1952. — Vol. 19. — P. 526–534.
8. **Stepanova L.V., Fedina M.E.** Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation // J. of Appl. Math. and Mechanics. — 2008. — Vol. 72, № 3. — P. 360–368.
9. **Stepanova L.V.** Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus Mechanique. — 2008. — Vol. 336, № 1–2. — P. 232–237.
10. **Sapora A., Carpinteri A.** A finite fracture mechanics approach to V-notched element subjected to mixed-mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2013. — Vol. 97. — P. 216–226.
11. **Weibgraeber P., Becker W.** Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints // Int. J. of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50, № 14. — P. 2383–2394.

12. **Stepanova L.V.** Eigenvalue analysis for a crack in a power-law material // Computational Mathematics and Mathematical Physics.— 2009.— Vol. 49, № 8.— P. 1332–1347.
13. **Beliakova T.A., Kulagin V.A.** The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed-mode crack tip for a stress-state dependent material // Procedia Materials Science.— 2014.— Vol. 3.— P. 147–152.
14. **Natarajan S., Song C., and Belouettar S.** Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.— 2014.— Vol. 279.— P. 86–112.
15. **Stepanova L.V., Yakovleva E.M.** Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions // PNRPU Mechanics Bulletin.— 2014.— № 3.— P. 129–162.
16. **Rice J.R., Rosengren G.F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids.— 1968.— Vol. 16.— P. 1–12.
17. **Hutchinson J.W.** Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids.— 1968.— Vol. 16.— P. 13–31.
18. **Hutchinson J.W.** Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids.— 1968.— Vol. 16.— P. 337–342.
19. **Шлянников В.Н., Туманов А.В.** Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении // Изв. Сарат. университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика.— 2010.— Т. 10, № 2.— С. 73–80.
20. **Шлянников В.Н., Кислова С.Ю.** Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Изв. Сарат. университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика.— 2009.— Т. 9, № 1.— С. 77–84.
21. **Stepanova L.V., Adylina E.M.** Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // J. of Appl. Mechanics and Technical Physics.— 2014.— Vol. 55, № 5.— P. 885–895.
22. Fracture, Fatigue, Failure, and Damage Evolution // Proc. of the 2014 Annual Conf. on Experimental and Appl. Mechanics / J. Carroll, S. Daly—Dordrech: Springer, 2015.— Vol. 5.
23. **Shih C.F.** Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems: PhD thesis.— Cambridge: Harvard University, 1973.
24. **Shih C.F.** Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // Fracture Analysis, ASTM STP560. Proc. of the National Symp. on Fracture Mechanics.— 1974.— P. 187–210.
25. **Rahman S., Mohammad E.** Effects of mixed-mode overloading on the mixed-mode I+II fatigue crack growth // Arch. Appl. Mech.— 2013.— Vol. 83, № 8.— P. 987–1000.
26. **Найфе А.Х.** Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.
27. **Anheuser M., Gross D.** Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Archive of Appl. Mechanics.— 1994.— Vol. 64.— P. 509–518.
28. **Stepanova L.V., Igonin S.A.** Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium// Appl. Math. Modelling.— 2014.— Vol. 38, № 14.— P. 3436–3455.
29. **Степанова Л.В., Игонин С.А.** Асимптотика поля напряжений у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью: вычисленный эксперимент и аналитическое решение // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние.— Новосибирск, 2015.— Т. 18, № 2.— С. 201–217.
30. **Кудряшов Н.А.** Методы нелинейной математической физики.— Долгопрудный: Интеллект, 2010.
31. **Paulsen W.** Asymptotic Analysis and Perturbation Theory.— CRC Press, 2013.

32. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.
33. **Баренблатт Г.И.** Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг. — Долгопрудный: Интеллект, 2009.
34. **Якимов А.** Аналитический метод решения уравнений математической физики. — Lambert Academic Publishing, 2011.
35. **Radhika T.S.L., Iyengar T.K.V., and Raja Rani T.** Approximate Analytical Methods for Solving Ordinary Differential Equations. — CRC Press, 2015.

*Поступила в редакцию 3 августа 2015 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Andrianov I., Avrejtsevich Ya.** Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineynoy dinamike i mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. — Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2013.
2. **Wei R.P.** Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
3. **Kuna M.** Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory–Numerics–Applications. — Dordrecht: Springer, 2013.
4. Duality, symmetry and symmetry lost in solid mechanics: selected works of H.D. Bui / A. Ehrlacher, H. Markenscoff. — Paris: Presses des Ponts, 2011.
5. **В'юи H.D.** Mekhanika razrusheniya: obratnye zadachi i resheniya. — М.: Fizmatlit, 2011.
6. **Vil'deman V.E. i dr.** Eksperimental'nye issledovaniya svoystv materiala pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeystviyah. — М.: Fizmatlit, 2012.
7. **Williams M.L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mechanics. — 1952. — Vol. 19. — P. 526–534.
8. **Stepanova L.V., Fedina M.E.** Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation // J. of Appl. Math. and Mechanics. — 2008. — Vol. 72, № 3. — P. 360–368.
9. **Stepanova L.V.** Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus Mechanique. — 2008. — Vol. 336, № 1. — P. 232–237.
10. **Sapora A., Carpinteri A.** A finite fracture mechanics approach to V-notched element subjected to mixed-mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2013. — Vol. 97. — P. 216–226.
11. **Weibgraeber P., Becker W.** Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints // Int. J. of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50, № 14. — P. 2383–2394.
12. **Stepanova L.V.** Eigenvalue analysis for a crack in a power-law material // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, № 8. — P. 1332–1347.
13. **Beliakova T.A., Kulagin V.A.** The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed-mode crack tip for a stress-state dependent material // Procedia Materials Science. — 2014. — Vol. 3. — P. 147–152.
14. **Natarajan S., Song C., and Belouettar S.** Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014. — Vol. 279. — P. 86–112.
15. **Stepanova L.V., Yakovleva E.M.** Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions // PNRPU Mechanics Bulletin. — 2014. — № 3. — P. 129–162.

16. **Rice J.R., Rosengren G.F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *J. Mech. Phys. Solids.*—1968.— Vol. 16.— P. 1–12.
17. **Hutchinson J.W.** Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // *J. Mech. Phys. Solids.*—1968.— Vol. 16.— P. 13–31.
18. **Hutchinson J.W.** Plastic stress and strain fields at a crack tip // *J. Mech. Phys. Solids.*—1968.— Vol. 16.— P. 337–342.
19. **Shlyannikov V.N., Tumanov A.V.** Uprugie parametry smeshannyh form deformirovaniya poluellipticheskoy treshchiny pri dvuhosnom nagruzhении // *Izv. Sarat. universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika.*—2010.— Т. 10, № 2.— С. 73–80.
20. **Shlyannikov V.N., Kislova S.Yu.** Parametry smeshannyh form deformirovaniya dlya treshchiny v vide matematicheskogo razreza // *Izv. Sarat. universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika.*—2009.— Т. 9, № 1.— С. 77–84.
21. **Stepanova L.V., Adylina E.M.** Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *J. of Appl. Mechanics and Technical Physics.*—2014.— Vol. 55, № 5.— P. 885–895.
22. *Fracture, Fatigue, Failure, and Damage Evolution // Proc. of the 2014 Annual Conf. on Experimental and Appl. Mechanics / J. Carroll, S. Daly—Dordrech: Springer, 2015.— Vol. 5.*
23. **Shih C.F.** Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems: PhD thesis.— Cambridge: Harvard University, 1973.
24. **Shih C.F.** Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // *Fracture Analysis, ASTM STP560. Proc. of the National Symp. on Fracture Mechanics.*—1974.— P. 187–210.
25. **Rahman S., Mohammad E.** Effects of mixed-mode overloading on the mixed-mode I+II fatigue crack growth // *Arch. Appl. Mech.*—2013.— Vol. 83, № 8.— P. 987–1000.
26. **Nayfe A.Kh.** *Vvedenie v metody vozmushcheniy.*—M.: Mir, 1984.
27. **Anheuser M., Gross D.** Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // *Archive of Appl. Mechanics.*—1994.— Vol. 64.— P. 509–518.
28. **Stepanova L.V., Igonin S.A.** Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium// *Appl. Math. Modelling.*—2014.— Vol. 38, № 14.— P. 3436–3455.
29. **Stepanova L.V., Igonin S.A.** Asimptotika polya napryazheniy u vershiny ustalostnoy treshchiny v srede s povrezhdennost'yu: vychislennyy eksperiment i analiticheskoe reshenie // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd.nie.*—Novosibirsk, 2015.— Т. 18, № 2.— С. 201–217.
30. **Kudryashov N.A.** *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki.*—Dolgoprudnyy: Intellect, 2010.
31. **Paulsen W.** *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory.*—CRC Press, 2013.
32. **Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I.** *Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki.*—M.: Fizmatlit, 2005.
33. **Barenblatt G.I.** *Avtomodel'nye yavleniya — analiz razmernostey i skeyling.*—Dolgoprudnyy: Intellect, 2009.
34. **Yakimov A.** *Analiticheskiy metod resheniya uravneniy matematicheskoy fiziki.*—Lambert Academic Publishing, 2011.
35. **Radhika T.S.L., Iyengar T.K.V., and Raja Rani T.** *Approximate Analytical Methods for Solving Ordinary Differential Equations.*—CRC Press, 2015.