ПМТФ, № 1, 1963

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. И. Долбин

(*Москва*)

Рассматривается задача о распространении плоских поверхностных волн в идеально проводящем упругом полупространстве с плоской границей. Полупространство находится в постоянном магнитном поле.

1. Уравнения для скалярного и векторного потенциалов вектора перемещения u. Уравнения движения идеально проводящей упругой среды, находящейся в постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, имеют вид [1]

$$(\lambda + G)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} + G\triangle\mathbf{u} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{4\pi}[\mathrm{rot\,rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{H})]\times\mathbf{H} = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь λ, G — коэффициенты Ламе, ρ — плотность материала, μ — магнитная проницаемость среды. Все эти характеристики среды предполагаются постоянными.

Представим вектор перемещения $\mathbf{u}$ в таком виде

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0 \qquad (1.2)$$

Скалярный φ и векторный $\mathbf{F}$ потенциалы вектора $\mathbf{u}$ связаны с объемным расширением $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \triangle\varphi$ и вращением $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = -\triangle\mathbf{F}$.

Подставляя (1.2) в (1.1) и учитывая, что, согласно уравнениям Максвелла, $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$, получим

$$\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\mathrm{grad}\;\Delta\varphi - \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}(\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\,\triangle\varphi) - \rho\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} +$$
$$+ G\,\mathrm{rot}\,\triangle\mathbf{F} - \frac{\mu}{4\pi}[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\triangle\mathbf{F}]\times\mathbf{H} - \rho\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.3)$$

Здесь $H^2 = \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}$. Уравнение (1.3) будет выполняться, если выполняются следующие уравнения

$$\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\mathrm{grad}\,\triangle\varphi - \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}(\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\,\triangle\varphi) - \rho\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.4)$$

$$G\,\mathrm{rot}\,\triangle\mathbf{F} - \frac{\mu}{4\pi}[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\triangle\mathbf{F}]\times\mathbf{H} - \rho\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.5)$$

Возьмем div и rot соответственно от уравнений (1.4) и (1.5):

$$\triangle\left\{\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\triangle\varphi - \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}\cdot[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathrm{grad}\,\varphi] - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\triangle\left\{G\triangle\mathbf{F} + \frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\nabla)[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{F}] - \rho\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2}\right\} = 0 \qquad (1.7)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) выполняются, если скалярный и векторный потенциалы φ и $\mathbf{F}$ будут удовлетворять уравнениям

$$\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\triangle\varphi - \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}\cdot[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\operatorname{grad}\varphi] - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.8}$$

$$G\triangle\mathbf{F} + \frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\nabla)[(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{F}] - \rho\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.9}$$

Отсюда при $\mathbf{H} = 0$ имеем обычные уравнения теории упругости.

2. **Распространение упругих поверхностных волн.** Пусть имеется идеально проводящее упругое полупространство с плоской границей, которое находится в постоянном магнитном поле. Вне полупространства магнитного поля нет. Рассмотрим распространение плоской гармонической поверхностной волны внутри указанной среды.

Возьмем прямоугольную систему координат. Плоскую границу полупространства примем за плоскость xy, ось z направим по внешней нормали к границе среды. В выбранной системе координат магнитное поле в среде будет иметь компоненты $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, 0\}$.

На границу среды поле H производит магнитное давление [2]

$$P_m{}^\circ = \mu H^2 / 8\pi \tag{2.1}$$

Это давление направлено вдоль внешней нормали к границе среды. Следовательно, в равновесном состоянии

$$\sigma_{zz}{}^\circ = \mu H^2 / 8\pi \tag{2.2}$$

Остальные напряжения равны нулю.

Пусть рассматриваемая плоская гармоническая поверхностная волна распространяется в направлении оси x. Тогда все величины от y не зависят. В этом случае $\mathbf{F} = \{0, \psi, 0\}$. Согласно (1.2)

$$\mathbf{u} = \{u_x, 0, u_z\} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z},\ 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} \tag{2.3}$$

Из (1.8) и (1.9) для φ и ψ получим уравнения: (2.4)

$$\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\triangle\varphi - \frac{\mu H_x^2}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad G\triangle\psi + \frac{\mu H_x{}^2}{4\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Будем искать решения уравнений (2.4) в виде

$$\varphi = \Phi(z)\, e^{i(\omega t - kx)}, \qquad \psi = \Psi(z)\, e^{i(\omega t - kx)} \tag{2.5}$$

Здесь $\omega / 2\pi$ — частота, $2\pi / k$ — длина волны, ω / k — фазовая скорость волны, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ указывают на характер изменения амплитуды волны с глубиной проникновения волны в среду.

Подставляя (2.5) в (2.4), для амплитуд $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ получим:

$$\Phi'' - \alpha^2\Phi = 0, \qquad \Psi'' - \beta^2\Psi = 0 \tag{2.6}$$

Штрихами обозначено дифференцирование по z.

$$\alpha^2 = \left(\lambda + 2G + \frac{\mu H_y{}^2}{4\pi} - \rho\frac{\omega^2}{k^2}\right)k^2\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)^{-1}$$

$$\beta^2 = \left(G + \frac{\mu H_x{}^2}{4\pi} - \rho\frac{\omega^2}{k^2}\right)k^2G^{-1} \tag{2.7}$$

Решения уравнений (2.6), соответствующие уменьшению амплитуды колебания с удалением от границы среды, имеют вид

$$\Phi = Ae^{\alpha z}, \qquad \Psi = Be^{\beta z} \quad (A,\ B \text{ — произвольные постоянные}) \tag{2.8}$$

Пусть возмущенное магнитное поле внутри среды $\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}$. Здесь $\mathbf{h}$ — исчезающее на бесконечности малое возмущение поля, вызванное поверхностными колебаниями полупространства. Так как для электромагнитного поля должны выполняться уравнения Максвелла, то в идеально проводящей среде $\mathbf{h}$ удовлетворяет уравнениям [3, 4]

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{e} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \qquad \mathbf{e} = -\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right) \tag{2.9}$$

Здесь c — скорость света в пустоте, $\mathbf{j}$, $\mathbf{e}$ — плотность тока и электрический вектор, возникающие вследствие возмущения среды.

Подставляя $\mathbf{e}$ из третьего уравнения (2.9) во второе, получим

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{H}), \qquad \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}(1 - \operatorname{div}\mathbf{u}) + (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{u} \tag{2.10}$$

На возмущенную границу среды магнитное поле $\mathbf{H}'$ производит направленное по внешней нормали к границе среды давление

$$P_m' = \mu H'^2 / 8\pi \tag{2.11}$$

Для нормали $\mathbf{n}'$ к возмущенной границе среды можно воспользоваться приближенной формулой

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \nabla u_z = \mathbf{i}iku_z + \mathbf{k} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{2.12}$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ — орты осей координат, компонента u_z вектора перемещения $\mathbf{u}$ взята при $z = 0$ и будет, следовательно, только функцией x.

На границе идеально проводящей среды во время колебаний должны выполняться граничные условия: равенство нулю нормальной составляющей [3] магнитного поля $\mathbf{H}'$, а также условия, связывающие напряжения внутри среды с магнитным давлением (2.11) на ее поверхности; имеем (n_i' — компоненты нормали $\mathbf{n}'$)

$$\mathbf{H}'\cdot\mathbf{n}' = 0, \qquad \sigma_{ik}'n_k' - \frac{\mu H'^2}{8\pi}n_i' = 0 \tag{2.13}$$

Возмущенное напряжение σ_{ik}' слагается из равновесных напряжений σ_{ik}° и напряжений σ_{ik}, возникших вследствие колебания

$$\sigma_{ik}' = \overset{\circ}{\sigma}_{ik} + \sigma_{ik} \qquad (i, k = x, y, z)$$

причем, согласно (2.2), только $\overset{\circ}{\sigma}_{zz} \neq 0$.

Первое условие $\mathbf{H}'\cdot\mathbf{n}' = 0$ из (2.13) выполняется тождественно. Остальные условия с точностью до членов первого порядка малости дают два уравнения для определения произвольных постоянных

$$\sigma_{xz} - \frac{\mu H'^2}{8\pi}iku_z = 0, \qquad \overset{\circ}{\sigma}_{zz} + \sigma_{zz} - \frac{\mu H'^2}{8\pi} = 0$$
$$H'^2 = H^2(1 - 2\operatorname{div}\mathbf{u}) - 2ikH_x^2u_x \tag{2.14}$$

Здесь все величины взяты при $z = 0$. Записывая (2.14) в перемещениях, получим

$$Ai\left(2G + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right)\alpha k + B\left[G(k^2 + \beta^2) + \frac{\mu H^2}{8\pi}k^2\right] = 0$$
$$A\left[\left(\lambda + 2G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\alpha^2 - \left(\lambda + \frac{\mu H_y^2}{4\pi}\right)k^2\right] - Bi\left(2G + \frac{\mu H_x^2}{4\pi}\right)\beta k = 0 \tag{2.15}$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.15) с неизвестными Ai, B, получим уравнение для фазовой скорости распространения плоских поверхностных волн

$$\left(2G + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right)\left(2G + \frac{\mu H_x^2}{4\pi}\right)\alpha\beta k^2 -$$

$$-\left[G\left(k^2+\beta^2\right)+\frac{\mu H^2}{8\pi}k^2\right]\left[\left(\lambda+2G+\frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\alpha^2-\left(\lambda+\frac{\mu H_y^2}{4\pi}\right)k^2\right]=0 \quad (2.16)$$

Пусть γ — угол между осью x и $\mathbf{H}$. Введем обозначения

$$\frac{\mu H^2}{8\pi G}=h^2, \qquad \frac{\mu H_x^2}{8\pi G}=h^2\cos^2\gamma, \qquad \frac{\mu H_y^2}{8\pi G}=h^2\sin^2\gamma, \qquad \frac{\rho\omega^2}{k^2G}=\varkappa^2$$

Тогда уравнение (2.16) можно привести к виду

$$\varkappa^8+a\varkappa^6+b\varkappa^4+c\varkappa^2+d=0 \qquad (2.17)$$

$$a=-\left[8+2h^2\left(1+2\cos^2\gamma\right)\right]$$

$$b=24+h^4\left(1+4\cos^4\gamma+4\cos^2\gamma\right)+12h^2\left(1+2\cos^2\gamma\right)-$$
$$-2\left(1-2\nu\right)\left(2+h^2\right)^2\left(1+h^2\cos^2\gamma\right)^2\left[1-\nu+\left(1-2\nu\right)h^2\right]^{-1}$$

$$c=-\{32+4h^4\left(1+4\cos^4\gamma+4\cos^2\gamma\right)+24h^2\left(1+2\cos^2\gamma\right)-$$
$$-2\left(2+h^2\right)^2\left(1+2h^2\cos^2\gamma\right)^2\left[3-4\nu+2\left(1-2\nu\right)h^2\right]\left[1-\nu+\left(1-2\nu\right)h^2\right]^{-1}\}$$

$$d=16+4h^4\left(1+4\cos^4\gamma+4\cos^2\gamma\right)+16h^2\left(1+2\cos^2\gamma\right)-$$
$$-2\left(1-2\nu\right)\left(2+h^2\right)^2\left(1+h^2\cos^2\gamma\right)^2\left[1-\nu+\left(1-2\nu\right)h^2\right]^{-1}\times$$
$$\times\left(2\frac{1-\nu}{1-2\nu}+4\frac{1-\nu}{1-2\nu}h^2\cos^2\gamma+2h^2\sin^2\gamma+4h^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma\right)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона.

При $\mathbf{H}=0$ уравнение (2.17) переходит в известное уравнение для скорости поверхностных волн в теории упругости [5]

$$\varkappa^6-8\varkappa^4+\left(24-8\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\varkappa^2+\left(8\frac{1-2\nu}{1-\nu}-16\right)=0 \qquad (2.18)$$

Если, например, при $\nu=0.25$ взять $h^2=1$ и угол $\gamma={}^1/_4\,\pi$, то уравнение (2.17) будет иметь следующий вид:

$$\varkappa^8-12\varkappa^6+35.8\varkappa^4+1.2\varkappa^2-65.6=0$$

Отсюда следует, что

$$\varkappa^2=3\pm\sqrt{17.2}, \qquad \varkappa^2=4, \qquad \varkappa^2=2$$

Так как α^2, β^2 положительны, то для рассматриваемого типа волн подходит только значение $\varkappa^2=2$. Если поля нет, то при $\nu=0.25$ пригодным корнем уравнения (2.18) будет $\varkappa^2=2-2/\sqrt{3}$.

Значит, при таком поле происходит увеличение квадрата скорости поверхностных волн приблизительно в 2.4 раза.

При $\nu=0.25$ поле $h^2=1$ и угле $\gamma=0$ уравнение (2.17) будет иметь корень $\varkappa^2\approx 2.7$. Следовательно, такое поле даст увеличение квадрата скорости волн более чем в три раза. Из (2.3) видно, что поверхностные волны высокой частоты затухают быстрее волн низкой частоты.

Автор благодарен А. И. Морозову и Ю. Н. Работнову за советы и внимание к работе.

Поступила 25 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh Waves in a Magnetic Field in the Case of a Perfect Conductor. Proc. of Vibration Problems, Warsaw, 1960, No 5, p. 63—80.
2. Курс физики. Под ред. Н. Д. Папалекси, т. II, ГИТТЛ, 1947.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. ГИТТЛ, 1954.
5. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, 1955.