ПМТФ, № 2, 1966

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Ю. А. Березин, Р. З. Сагдеев

(Новосибирск)

Рассмотрены стационарные нелинейные волны, распространяющиеся в холодной разреженной плазме, состоящей из электронов и ионов двух сортов. Найдена структура уединенных и ударных волн.

В последнее время в связи с лабораторными экспериментами [1] и астрофизическими приложениями (проблема взаимодействия «солнечного ветра» с магнитосферой Земли [2]) интенсивно изучаются волны конечной амплитуды и бесстолкновительные ударные волны в разреженной плазме. Учет дисперсионных эффектов, связанных с отклонением закона дисперсии $\omega = \omega(k)$ от линейного и компенсирующих нелинейное укручение профиля волн, позволяет получить профиль стационарных нелинейных волн конечной амплитуды, а при учете затухания — и структуру бесстолкновительной ударной волны [3]. Такие волны изучены достаточно полно для случая двухкомпонентной плазмы. В настоящей работе исследуются стационарные нелинейные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в холодной разреженной квазинейтральной плазме, состоящей из электронов и двух сортов ионов.

Характер закона дисперсии $\omega = \omega(k)$ для волн малой амплитуды в рассматриваемой трехкомпонентной плазме иллюстрируется фиг. 1 (см. также [4]), здесь и в дальнейшем

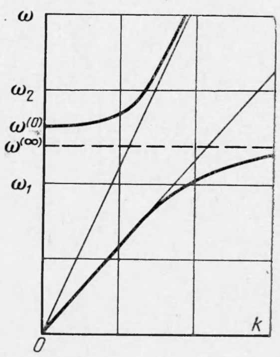
$$\omega_{1,2} = \frac{eH_0}{m_{1,2}c}, \qquad \omega^{(0)} = \left(\frac{m_1}{m_2}\alpha_1 + \alpha_2\right)\omega_1, \qquad \alpha_j = \frac{n_{j0}}{n_0}$$

При этом индекс 1 соответствует более тяжелому сорту ионов, n_{j0} — невозмущенная плотность j-го сорта ионов, n_0 — невозмущенная плотность электронов. При малых частотах фазовая скорость малых колебаний

$$\frac{\omega}{k} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)}} \equiv V_A$$

и убывает по мере приближения ω к

$$\omega^{(\infty)} = \frac{eH_0}{\sqrt{m_1 m_2}c}\left(\frac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}\right)^{1/2}$$



Фиг. 1

При сравнительно небольших скоростях нелинейных волн «работает» в основном нижняя ветвь дисперсионной кривой, и характерный размер волн сжатия, которые могут существовать при таком законе дисперсии, по порядку величины равен $\delta \sim V_A / \omega^{(\infty)}$, что в интересном случае малой примеси легкой компоненты либо большой разницы в массах ионов ($m_1\alpha_1 \gg m_2\alpha_2$) дает

$$\delta \sim \frac{c\sqrt{m_2}}{\sqrt{4\pi n_0 c^2}}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{1/2}$$

С увеличением скорости волн в игру вступает верхняя ветвь, и профиль нелинейных волн, как будет видно из дальнейшего, изменится. При частотах $\omega \gg \omega^{(\infty)}$ верхняя ветвь дисперсионной кривой имеет асимптоту

$$\frac{\omega}{k} = V_A \left[\left(\alpha_1 + \frac{m_2\alpha_2}{m_1}\right)\left(\alpha_1 + \frac{m_1\alpha_2}{m_2}\right)\right]^{1/2}$$

В области частот, больших по сравнению с ω_1, ω_2, отклонение этой ветви от линейного хода существенно проявляется при гибридной частоте

$$\omega_г = \frac{eH_0}{\sqrt{m_i m_e}\, c}$$

но эта область хорошо изучена (дисперсионные эффекты связаны с инерцией электронов) и здесь не рассматривается.

Перейдем теперь к изучению нелинейных стационарных волн. В системе координат, движущейся со скоростью волны U, соответствующие уравнения можно записать в виде

$$m_j v_{jx} \frac{dv_{jx}}{dx} = eE_x + \frac{e}{c} v_{jy} H, \qquad m_j v_{jx} \frac{dv_{jy}}{dx} = \frac{e}{c}(UH_0 - v_{jx}H) \tag{1}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{4\pi e n_0}{c}\left(U \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \frac{v_{jy}}{v_{jx}} + \frac{cE_x}{H_0}\right)$$

Здесь индекс $j = 1, 2$ определяет сорт ионов, ось x направлена в сторону движения плазмы перед волной, ось z совпадает с направлением магнитного поля, H_0 — невозмущенное магнитное поле.

Скорость электронов определяется из дрейфового приближения, поскольку нас интересует область частот $\omega \ll \omega_г$. При помощи несложных преобразований получаем уравнение

$$A^2 v \frac{d}{dx}\left\{\frac{v}{vh - \alpha_1 M}\left(1 + \frac{m_1}{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2} v \frac{dv}{dh}\right)\frac{dh}{dx}\right\} = M - vh \tag{2}$$

где

$$A^2 = \frac{c^2 m_1 m_2 \alpha_2}{4\pi n_0 (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) e^2}, \qquad M = \frac{U}{V_A}, \qquad h = \frac{H}{H_0}$$

$$v = \frac{v_{1x}}{V_A} = \frac{M}{2m_1\alpha_1 h}\Big\{m_1\alpha_1^2 - m_2\alpha_2^2 + (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)\, h\left(1 + \frac{1-h^2}{2M^2}\right) +$$
$$+ \Big((m_1\alpha_1^2 - m_2\alpha_2^2)^2 - 2(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)(m_1\alpha_1^2 + m_2\alpha_2^2)\, h\left(1 + \frac{1-h^2}{2M^2}\right) +$$
$$+ (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)^2 h^2 \left(1 + \frac{1-h^2}{2M^2}\right)^2\Big)^{1/2}\Big\} \tag{3}$$

Если выполняется условие $m_1\alpha_1 \gg m_2\alpha_2$, то скорость тяжелой компоненты (3) принимает простой вид

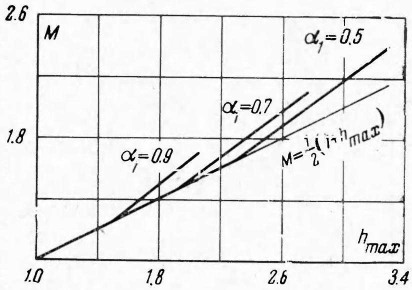
$$v = M\left(1 + \frac{1-h^2}{2M^2}\right)$$

и уравнение (2) можно один раз проинтегрировать

$$\frac{1}{2}\frac{A^2 v^2}{(vh - \alpha_1 M)^2}\left(1 + \frac{m_1}{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2} v \frac{dv}{dh}\right)^2 \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 =$$
$$= -\left(1 + \frac{m_1\alpha_2}{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}\right)(h-1) - \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}(v^2 - M^2) - \tag{4}$$
$$- \frac{2m_2\alpha_2^2 M^2}{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}\left\{\frac{1}{(h_2 - h_1)(h_3 - h_1)} \ln\left|\frac{h - h_1}{1 - h_1}\right| +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(h_1 - h_2)(h_3 - h_2)} \ln\left|\frac{h - h_2}{1 - h_2}\right| + \frac{1}{(h_2 - h_3)(h_1 - h_3)} \ln\left|\frac{h - h_3}{1 - h_3}\right|\right\}$$

Здесь h_1, h_2, h_3 — корни уравнения $h^3 - (2M^2 + 1)h + 2M^2\alpha_1 = 0$. Выбор постоянной интегрирования соответствует уединенной волне. Уравнение (4) позволяет установить связь между скоростью уединенной волны и максимальной величиной магнитного поля в волне. Эта зависимость для различных значений относительных концентраций ионов разного сорта приведена на фиг. 2. При небольших амплитудах магнитного поля скорость уединенной волны равна

$$M = {}^1/_2\,(1 + h_{\max}) \qquad (5)$$



Фиг. 2

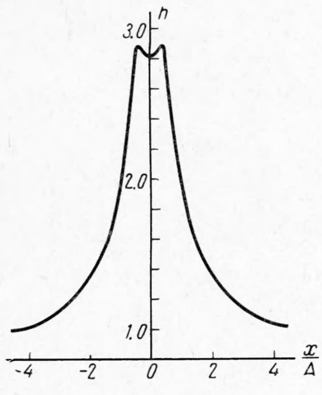
С увеличением $h_{\max}$ скорость волны возрастает быстрее, чем по формуле (5). Это отклонение от линейности наступает тем скорее, чем меньше относительная концентрация легкой компоненты.

В области линейной зависимости скорости M от амплитуды магнитного поля $h_{\max}$ профиль уединенной волны имеет известную форму — симметричный горб. В случае малых амплитуд ($h - 1 \ll 1$) можно получить аналитическое выражение для магнитного поля в уединенной волне

$$h = 1 + b_{\max}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{b_{\max}}}{2A}\,x\right), \qquad b_{\max} = h_{\max} - 1$$

При больших скоростях волны, когда связь $M = M\,(h_{\max})$ нелинейна, форма уединенной волны существенно меняется, поскольку вступает в игру верхняя ветвь дисперсионной кривой. Типичный профиль уединенной волны в трехкомпонентной плазме при больших скоростях, полученный численным решением системы уравнений (1), представлен на фиг. 3. С уменьшением концентрации легкой компоненты линейный размер уединенной волны уменьшается, что находится в соответствии с оценками по линейной теории, приведенными выше; кроме того, величина «впадины» в центре волны убывает. Отметим: указанное решение существует только при скоростях волны, меньших некоторого критического значения, зависящего от относительных концентраций легкой и тяжелой компонент. Особая точка системы уравнений (1), соответствующая невозмущенному состоянию плазмы перед волной, является седлом (интегральная кривая выходит из этой точки), если выполняется условие

$$1 < M < \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\,\alpha_2 + \alpha_1\right)\left(\alpha_1 + \frac{m_2}{m_1}\,\alpha_2\right)\right]^{1/2}$$



Фиг. 3

Нижний предел скорости волны, естественно, равен скорости звука, а верхний предел равен фазовой скорости малых колебаний при больших, по сравнению с ω_1, ω_2, частотах. При приближении скорости волны к этому верхнему пределу происходит «выметание» из волны легкой компоненты, и дисперсионные эффекты, компенсирующие нелинейное укручение, проявляются при более высоких частотах

$$\omega \sim \frac{eH_0}{\sqrt{m_i m_e}\,c}$$

и обусловливаются инерцией электронов. Критическое значение скорости волны, а стало быть, и максимальное магнитное поле в волне убывают с уменьшением относительной концентрации легкой компоненты. Поэтому при малых концентрациях более легкого сорта ионов амплитуды уединенных волн в области частот

$$\omega \ll \frac{eH_0}{\sqrt{m_i m_e}\,c}$$

будут малы.

Оценим энергию ионов в волне. Энергия тяжелых ионов в направлении движения волны («продольная» энергия) по порядку величины равна

$$\mathscr{E}_x^{(1)} \sim m_1 n_1 v_{1x}^2 \sim m_1 n_1 \left(\frac{eE_x}{m_1 \omega}\right)^2$$

«Поперечная» энергия легких ионов по порядку величины равна

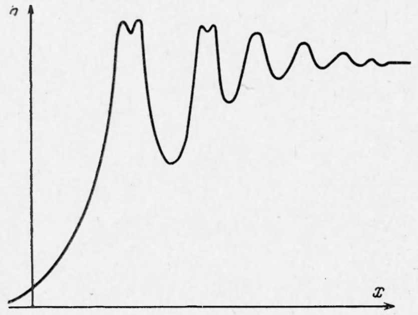
$$\mathscr{E}_y^{(2)} \sim m_2 n_2 v_{2y}^2 \sim m_2 n_2 \left(\frac{cE_x}{H}\right)^2$$

Учитывая, что

$$\omega \sim \omega^{(\infty)} \approx \sqrt{\omega_1 \omega_2 \alpha_2 / \alpha_1}$$

получим $\mathscr{E}_y^{(2)} / \mathscr{E}_x^{(1)} \sim 1$, и энергии, приходящиеся на одну частицу, оцениваются следующим образом:

$$\mathscr{E}_y^{(2)} / \mathscr{E}_x^{(1)} \sim n_1 / n_2$$



Фиг. 4

Отсюда следует, что при распространении в трехкомпонентной плазме рассмотренной выше уединенной волны имеет место ускорительный механизм, приводящий к ускорению легкого сорта ионов в направлении, перпендикулярном к направлению движения волны.

Если ввести в исходные уравнения трение между компонентами плазмы, то получим ударную волну осцилляторной структуры с резким передним фронтом. Профиль такой волны качественно изображен на фиг. 4.

Поступила 29 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Куртмуллаев Р. Х., Нестерихин Ю. Е., Пильский В. И., Сагдеев Р. З. Механизм нагрева плазмы бесстолкновительными ударными волнами. Доклад на Международной конференции, Калэм, Англия, 1965.
2. Плетнев В. Д., Скуридин Г. А., Чесалии Л. С. Космические исследования, 1965, т. 3, № 3, стр. 408.
3. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1964, вып. 4.
4. Якименко В. Л. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 2, стр. 168.