УДК 539.3.01

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КИРША В РАМКАХ КОНТИНУУМА И ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

М. А. Кулеш, В. П. Матвеенко, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

В рамках несимметричной теории упругости рассмотрена задача Кирша об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием, в предположении, что деформация материала описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота. Получено общее аналитическое решение этой задачи с использованием функций Бесселя. Проведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующими решениями для симметричной среды и псевдосреды Коссера. Введен макропараметр, характеризующий искажение границы кругового отверстия при деформировании.

Введение. Модель среды, деформация которой описывается не только вектором перемещения $\boldsymbol{u}$, но и вектором поворота $\boldsymbol{\omega}$, являющимися функциями координат и времени, предложена братьями Коссера в 1910 г. Среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а теорию — моментной или несимметричной теорией упругости.

В 60–70-х гг. эта теория была развита независимо несколькими исследователями [1–5]. В это же время получены первые аналитические решения плоских задач в рамках моментной теории. Однако большинство точных решений получены с использованием упрощения

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

называемого стесненным вращением или псевдосредой Коссера. В этом варианте моментной теории упругости число физических констант для изотропного упругого тела сокращается с шести до четырех [6]. Кроме того, структура получаемых уравнений такова [1], что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удается выразить нормальную составляющую вектора поворота независимо от вектора перемещений.

Целью данной работы является построение и анализ решения задачи Кирша об одноосном растяжении бесконечной пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, для несимметричной среды. В работе проведен параметрический анализ точного решения и показано, что оно может быть использовано в эксперименте для идентификации физико-механических параметров континуума Коссера.

Впервые в рамках классической теории упругости указанная задача решена Киршем, позднее, иным путем, — Н. И. Мусхелишвили [7]. Обобщение решения задачи на случай псевдосреды Коссера дано в работах [6, 8, 9]. В [4] найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках несимметричной теории упругости.

Следует отметить, что решение, приведенное в [4], не позволяет в полной мере проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности определить степень искажения отверстия при деформировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00240).

В данной работе в рамках общей моментной теории упругости приведено точное аналитическое решение задачи Кирша в безразмерном виде, что позволяет осуществлять его параметрический анализ.

1. Постановка задачи. Приведем основные соотношения моментной теории упругости [1]:

— уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \qquad \tilde{\sigma}^{\mathrm{T}} : \tilde{E} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}; \tag{1.1}$$

— геометрические соотношения

$$\tilde{\gamma} = \nabla \boldsymbol{u} - \tilde{E} \cdot \boldsymbol{\omega}, \qquad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega}; \tag{1.2}$$

— физические уравнения

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e}, \qquad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \tag{1.3}$$

С учетом соотношений (1.1)–(1.3) уравнения равновесия для вектора перемещения $\boldsymbol{u}$ и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\begin{gathered} (2\mu + \lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - (\mu + \alpha)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \\ (\beta + 2\gamma)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В (1.1)–(1.4) $\boldsymbol{X}$ — вектор массовых сил; $\boldsymbol{Y}$ — вектор массовых моментов; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вращения; $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ — постоянные Ламе; α, β, γ, ε — физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости; $\tilde{E}$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\,\cdot\,)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\,\cdot\,)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\,\cdot\,)$ — набла-оператор; $I_1(\,\cdot\,)$ — первый инвариант тензора; $\tilde{e}$ — единичный тензор [10]. В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными.

Будем рассматривать также упрощенную теорию [1], в которой принято, что вектор поворота удовлетворяет соотношению (1). Среду, описываемую таким образом, в дальнейшем будем называть псевдосредой Коссера.

Физические соотношения псевдосреды Коссера имеют вид

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e} - (1/2)\nabla \cdot \tilde{\mu} \cdot \tilde{E}, \qquad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \tag{1.5}$$

Для нахождения компонент тензоров деформаций и изгиба-кручения, как и в полной моментной постановке, используется соотношение (1.2). Однако с учетом (1.5) уравнения равновесия для псевдосреды Коссера примут вид, отличный от (1.4):

$$\mu\nabla^2 \boldsymbol{u} + (\mu + \lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + (1/4)(\gamma + \varepsilon)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим задачу об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Пусть края кругового отверстия свободны от внешних напряжений и на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности p в направлении оси Ox (рис. 1).

В силу симметрии решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в виде разложения по гармоникам

$$\boldsymbol{u}(\rho, \varphi) = \{F(\rho) + U(\rho)\cos 2\varphi, V(\rho)\sin 2\varphi, 0\}, \quad \boldsymbol{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega(\rho)\sin 2\varphi\}. \tag{1.7}$$

Граничные условия на бесконечности и свободном от нагрузки контуре отверстия имеют вид

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \tilde{\sigma}\big|_{\rho = R_0} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{n}_1 \cdot \tilde{\mu}\big|_{\rho = R_0} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{n}_2 \cdot \tilde{\sigma}\big|_{\rho \to \infty} = \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{n}_2 \cdot \tilde{\mu}\big|_{\rho \to \infty} = \boldsymbol{0},$$

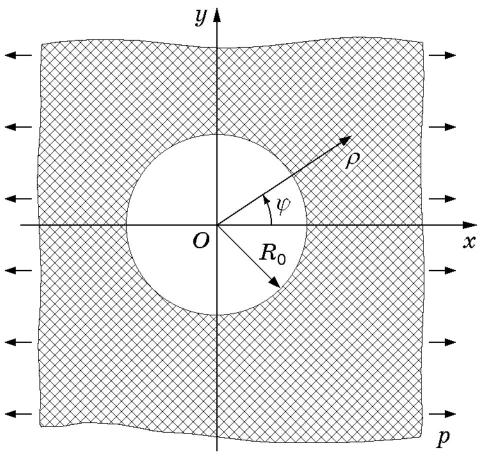


Рис. 1

где $\boldsymbol{n}_1 = \{-1, 0\}$ — вектор внешней нормали к окружности радиуса R_0; $\boldsymbol{n}_2 = \{1, 0\}$ — вектор внешней нормали к окружности радиуса $R_1 \to \infty$.

Для данной задачи в цилиндрической системе координат компоненты p_ρ и p_φ вектора $\boldsymbol{p}$ записываются в виде $p_\rho = p(1+\cos 2\varphi)/2$, $p_\varphi = -(p\sin 2\varphi)/2$. Переходя к компонентам тензоров напряжения и момента, граничные условия можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=R_0} = 0, \qquad \sigma_{\rho\varphi}\big|_{\rho=R_0} = 0, \qquad \mu_{\rho z}\big|_{\rho=R_0} = 0,\\ &\sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho\to\infty} = p_\rho, \qquad \sigma_{\rho\varphi}\big|_{\rho\to\infty} = p_\varphi, \qquad \mu_{\rho z}\big|_{\rho\to\infty} = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению четырех функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$ для среды Коссера и трех функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$ для псевдосреды Коссера.

2. Построение аналитического решения уравнения равновесия. Подставляя вектор перемещений и поворота (1.7) в (1.4), получим уравнения равновесия в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$:

$$\begin{gathered} \frac{d^2}{d\rho^2}\,U(\rho) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \frac{A_{11}}{\rho^2}\,U(\rho) - \frac{A_{12}}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,V(\rho) - \frac{A_{13}}{\rho^2}\,V(\rho) + \frac{A_{14}}{\rho}\,\omega(\rho),\\ \frac{d^2}{d\rho^2}\,V(\rho) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,V(\rho) - \frac{A_{21}}{\rho^2}\,V(\rho) - \frac{A_{22}}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,U(\rho) - \frac{A_{23}}{\rho^2}\,U(\rho) - A_{24}\,\frac{d}{d\rho}\,\omega(\rho),\\ \frac{d^2}{d\rho^2}\,\omega(\rho) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,\omega(\rho) + 4A_{31}\omega(\rho) + \frac{4}{\rho^2}\,\omega(\rho) - 2A_{31}\,\frac{d}{d\rho}\,V(\rho) - \frac{2A_{31}}{\rho}\,V(\rho) - \frac{4A_{31}}{\rho}\,U(\rho),\\ \frac{d^2}{d\rho^2}\,F(\rho) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,F(\rho) + \frac{1}{\rho^2}\,F(\rho), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} A_{11} = -\frac{\lambda + 6\mu + 4\alpha}{\lambda + 2\mu}, \qquad A_{12} = -2\,\frac{\alpha - \lambda - \mu}{\lambda + 2\mu}, \qquad A_{13} = -2\,\frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\lambda + 2\mu},\\ A_{14} = -\frac{4\alpha}{\lambda + 2\mu}, \qquad A_{21} = -\frac{4\lambda + 9\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, \qquad A_{22} = 2\,\frac{\alpha - \lambda - \mu}{\alpha + \mu},\\ A_{23} = -2\,\frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, \qquad A_{24} = -\frac{2\alpha}{\alpha + \mu}, \qquad A_{31} = \frac{\alpha}{\gamma + \varepsilon}. \end{gathered}$$

Подставляя вектор перемещений и поворота (1.7) в (1.6), получим уравнения равновесия для псевдосреды Коссера в виде системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$:

$$\begin{gathered}
\frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) = -\frac{2}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) - \Big(4B_1 - \frac{5}{\rho^2}\Big)\frac{d}{d\rho}V(\rho) + \Big(4\frac{B_3}{\rho} + \frac{3}{\rho^3}\Big)V(\rho) - \\
- \Big(2B_2\rho + \frac{2}{\rho}\Big)\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \Big(2B_2 - \frac{2}{\rho^2}\Big)\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \Big(2\frac{B_4}{\rho} + \frac{6}{\rho^3}\Big)U(\rho), \\
\frac{d^4}{d\rho^4}V(\rho) = -\frac{2}{\rho}\frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) + \Big(4B_5 + \frac{7}{\rho^2}\Big)\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \\
+ \Big(4\frac{B_5}{\rho} - \frac{7}{\rho^3}\Big)\frac{d}{d\rho}V(\rho) - \Big(4\frac{B_6}{\rho^2} + \frac{9}{\rho^4}\Big)V(\rho) - \frac{2}{\rho}\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \\
+ \frac{4}{\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \Big(8\frac{B_1}{\rho} - \frac{2}{\rho^3}\Big)\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \Big(8\frac{B_3}{\rho^2} + \frac{18}{\rho^4}\Big)U(\rho), \\
\frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F(\rho) + \frac{1}{\rho^2}F(\rho),
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$B_1 = \frac{\lambda + \mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_3 = \frac{\lambda + 3\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_4 = \frac{\lambda + 6\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_5 = \frac{\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_6 = \frac{4\lambda + 9\mu}{\gamma + \varepsilon}.$$

Общее решение системы уравнений (2.1) имеет вид

$$F(\rho) = C_1\rho + C_2\frac{1}{\rho}, \quad U(\rho) = \sum_{i=3}^{8} C_i U_i(\rho), \quad V(\rho) = \sum_{i=3}^{8} C_i V_i(\rho), \quad \omega(\rho) = \sum_{i=3}^{8} C_i \omega_i(\rho),$$

где $U_i(\rho)$, $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$ $(i = 3, \ldots, 8)$ — частные решения системы (2.1); C_i — произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (1.8).

В качестве $U_3(x)$, $V_3(x)$, $U_4(x)$, $V_4(x)$, $U_5(x)$, $V_5(x)$, $U_6(x)$, $V_6(x)$ использованы частные решения, соответствующие классической теории упругости, $\omega_3(x)$, $\omega_4(x)$, $\omega_5(x)$, $\omega_6(x)$ получены на основе соотношения (1). Правомерность такого представления доказана в [1]. Остальные частные решения, которые будем называть моментными, получены путем непосредственного решения системы (2.1).

Для удобства анализа получаемого решения все величины приведем к безразмерному виду. В этом случае безразмерные величины ρ, u_ρ, u_φ, ω_z, γ_{ij}, χ_{ij}, σ_{ij}, μ_{ij}, p будут связаны с размерными $\hat{\rho}$, $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\varphi$, $\hat{\omega}_z$, $\hat{\gamma}_{ij}$, $\hat{\chi}_{ij}$, $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\mu}_{ij}$, $\hat{p}$ соотношениями

$$\begin{gathered}
\hat{\rho} = R_0\rho, \qquad \hat{u}_i = R_0 u_i, \qquad \hat{\sigma}_{ij} = \mu\sigma_{ij}, \qquad \hat{p} = \mu p, \\
\hat{\mu}_{ij} = R_0\mu\mu_{ij}, \qquad \hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}, \qquad \hat{\chi}_{ij} = \chi_{ij}/R_0.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Кроме того, введем три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного размера R_0:

$$A = R_0\sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \qquad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \qquad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \tag{2.4}$$

Используя (2.3), (2.4), получим общее решение относительно компонент векторов перемещения, вращения, тензоров напряжения и моментного напряжения в безразмерном виде

$$
\begin{gathered}
u_\rho(\rho,\varphi)=C_1\rho+\frac{C_2}{\rho}+\Big(\frac{C_3}{\rho^3}+\frac{C_4}{\rho}+C_5\rho+C_6\rho^3+C_7U_7(\rho)+C_8U_8(\rho)\Big)\cos 2\varphi,\\
u_\varphi(\rho,\varphi)=\Big(\frac{C_3}{\rho^3}-C_4\,\frac{æ-1}{(æ+1)\rho}-C_5\rho-C_6\,\frac{æ+3}{æ-3}\,\rho^3+C_7V_7(\rho)+C_8V_8(\rho)\Big)\sin 2\varphi,\\
\omega_z(\rho,\varphi)=\Big(\frac{C_4}{\rho^2}-C_6\,\frac{3(æ+1)}{3-æ}\,\rho^2+C_7\omega_7(\rho)+C_8\omega_8(\rho)\Big)\sin 2\varphi,\\
\sigma_{\rho\rho}(\rho,\varphi)=C_1\,\frac{4}{æ-1}-\frac{2C_2}{\rho^2}+\Big(-C_3\,\frac{6}{\rho^4}-C_4\,\frac{8}{(æ+1)\rho^2}+2C_5+C_7S^{(7)}_{\rho\rho}(\rho)+C_8S^{(8)}_{\rho\rho}(\rho)\Big)\cos 2\varphi,\\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)=\Big(-C_3\,\frac{6}{\rho^4}-C_4\,\frac{4}{(æ+1)\rho^2}-2C_5-C_6\,\frac{12}{3-æ}\,\rho^2+C_7S^{(7)}_{\rho\varphi}(\rho)+C_8S^{(8)}_{\rho\varphi}(\rho)\Big)\sin 2\varphi,\\
\sigma_{\varphi\rho}(\rho,\varphi)=\Big(-C_3\frac{6}{\rho^4}-C_4\frac{4}{(æ+1)\rho^2}-2C_5-C_6\frac{12}{3-æ}\rho^2+C_7S^{(7)}_{\varphi\rho}(\rho)+C_8S^{(8)}_{\varphi\rho}(\rho)\Big)\sin 2\varphi,\\
\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi)=C_1\frac{4}{æ-1}+\frac{2C_2}{\rho^2}+\Big(C_3\,\frac{6}{\rho^4}-2C_5-C_6\,\frac{24}{3-æ}\,\rho^2+C_7S^{(7)}_{\varphi\varphi}(\rho)+C_8S^{(8)}_{\varphi\varphi}(\rho)\Big)\cos 2\varphi,\\
\mu_{\rho z}(\rho,\varphi)=\Big(-C_4\,\frac{2}{A^2B\rho^3}-C_6\,\frac{6(æ+1)}{(3-æ)A^2B}\,\rho+C_7M^{(7)}_{\rho z}(\rho)+C_8M^{(8)}_{\rho z}(\rho)\Big)\sin 2\varphi,\\
\mu_{\varphi z}(\rho,\varphi)=\Big(C_4\,\frac{2}{A^2B\rho^3}-C_6\,\frac{6(æ+1)}{(3-æ)A^2B}\,\rho+C_7M^{(7)}_{\varphi z}(\rho)+C_8M^{(8)}_{\varphi z}(\rho)\Big)\cos 2\varphi,\\
\mu_{z\rho}(\rho,\varphi)=C\mu_{\rho z}(\rho,\varphi),\quad \mu_{z\varphi}(\rho,\varphi)=C\mu_{\varphi z}(\rho,\varphi),\quad D=|u_\rho(R_0,0)/u_\rho(R_0,\pi/2)|.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Здесь $æ=(3\mu+\lambda)/(\mu+\lambda)$; D — макровеличина, характеризующая степень искажения контура кругового отверстия при действии одноосной нагрузки (эта величина может быть экспериментально измерена).

Функции ρ при константах C_7 и C_8 в выражении (2.5) определяются соответствующими моментными частными решениями и имеют вид

$$
\begin{gathered}
U_7(\rho)=\frac{1}{A^2\rho}\,I_0(2A\rho)-\frac{1}{A^3\rho^2}\,I_1(2A\rho),\qquad U_8(\rho)=\frac{1}{A^2\rho}\,K_0(2A\rho)+\frac{1}{A^3\rho^2}\,K_1(2A\rho),\\
V_7(\rho)=\frac{1}{A^2\rho}\,I_0(2A\rho)-\frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}\,I_1(2A\rho),\qquad V_8(\rho)=\frac{1}{A^2\rho}\,K_0(2A\rho)+\frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}\,K_1(2A\rho),\\
\omega_7(\rho)=-BI_0(2A\rho)+\frac{B}{A\rho}\,I_1(2A\rho),\qquad \omega_8(\rho)=-BK_0(2A\rho)-\frac{B}{A\rho}\,K_1(2A\rho),\\
S^{(7)}_{\rho\rho}(\rho)=-\frac{6}{A^2\rho^2}\,I_0(2A\rho)+\frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\,I_1(2A\rho),\\
S^{(8)}_{\rho\rho}(\rho)=-\frac{6}{A^2\rho^2}\,K_0(2A\rho)-\frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\,K_1(2A\rho),\\
S^{(7)}_{\rho\varphi}(\rho)=-\frac{6}{A^2\rho^2}\,I_0(2A\rho)+\frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\,I_1(2A\rho),\\
S^{(8)}_{\rho\varphi}(\rho)=-\frac{6}{A^2\rho^2}\,K_0(2A\rho)-\frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\,K_1(2A\rho),
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

$$S^{(7)}_{\varphi\rho}(\rho) = -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}\, I_0(2A\rho) + \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\, I_1(2A\rho),$$

$$S^{(8)}_{\varphi\rho}(\rho) = -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}\, K_0(2A\rho) - \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\, K_1(2A\rho),$$

$$S^{(7)}_{\varphi\varphi}(\rho) = \frac{6}{A^2\rho^2}\, I_0(2A\rho) - \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\, I_1(2A\rho), \quad S^{(8)}_{\varphi\varphi}(\rho) = \frac{6}{A^2\rho^2}\, K_0(2A\rho) + \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}\, K_1(2A\rho),$$

$$M^{(7)}_{\rho z}(\rho) = \frac{2}{A^2\rho}\, I_0(2A\rho) - \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}\, I_1(2A\rho), \quad M^{(8)}_{\rho z}(\rho) = \frac{2}{A^2\rho}\, K_0(2A\rho) + \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}\, K_1(2A\rho),$$

$$M^{(7)}_{\varphi z}(\rho) = -\frac{2}{A^2\rho}\, I_0(2A\rho) + \frac{2}{A^3\rho^2}\, I_1(2A\rho), \quad M^{(8)}_{\varphi z}(\rho) = -\frac{2}{A^2\rho}\, K_0(2A\rho) - \frac{2}{A^3\rho^2}\, K_1(2A\rho).$$

Здесь $I_0(\rho)$, $I_1(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода [11, 12], в пределе при $\rho \to \infty$ стремящиеся к бесконечности:

$$I_m(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+m}}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)},$$

$K_0(\rho)$, $K_1(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода, или функции Макдональда, в пределе при $\rho \to \infty$ стремящиеся к нулю:

$$K_m(\rho) = (-1)^{m+1} I_m(\rho)\Big(\ln\frac{\rho}{2} + C\Big) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k\, \frac{(m-k-1)!}{k!}\Big(\frac{\rho}{2}\Big)^{2k-m} + {} \\ + \frac{(-1)^m}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+m}}{k!(m+k)!}\Big(\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{k+m}\frac{1}{s}\Big),$$

где m — целое число; $C = 0{,}5772\ldots$ — константа Эйлера.

Используя граничные условия (1.8), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1, \ldots, C_8$ ($R_1 \to \infty$) $A\{C_1, \ldots, C_8\}^{\text{т}} = \{0, 0, 0, 0, p/2, p/2, -p/2, 0\}^{\text{т}}$, где

$$A = \begin{bmatrix}
\dfrac{4}{æ-1} & -\dfrac{2}{R_0^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{6}{R_0^4} & -\dfrac{8}{(æ+1)R_0^2} & 2 & 0 & S^{(7)}_{\rho\rho}(L) & S^{(8)}_{\rho\rho}(L) \\
0 & 0 & -\dfrac{6}{R_0^4} & -\dfrac{4}{(æ+1)R_0^2} & -2 & -\dfrac{12R_0^2}{3-æ} & S^{(7)}_{\rho\varphi}(L) & S^{(8)}_{\rho\varphi}(L) \\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{2}{A^2BR_0^3} & 0 & -\dfrac{6(æ+1)R_0^2}{(3-æ)A^2B} & M^{(7)}_{\rho z}(L) & M^{(8)}_{\rho z}(L) \\
\dfrac{4}{æ-1} & -\dfrac{2}{R_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{6}{R_1^4} & -\dfrac{8}{(æ+1)R_1^2} & 2 & 0 & S^{(7)}_{\rho\rho}(2AR_1) & S^{(8)}_{\rho\rho}(2AR_1) \\
0 & 0 & -\dfrac{6}{R_1^4} & -\dfrac{4}{(æ+1)R_1^2} & -2 & -\dfrac{12R_1^2}{3-æ} & S^{(7)}_{\rho\varphi}(2AR_1) & S^{(8)}_{\rho\varphi}(2AR_1) \\
0 & 0 & 0 & -\dfrac{2}{A^2BR_1^3} & 0 & -\dfrac{6(æ+1)R_1^2}{(3-æ)A^2B} & M^{(7)}_{\rho z}(2AR_1) & M^{(8)}_{\rho z}(2AR_1)
\end{bmatrix}.$$

Решение данной системы можно записать в виде

$$C_1 = \frac{p(æ - 1)}{8}, \qquad C_2 = \frac{pR_0^2}{4},$$

$$C_3 = -\frac{pR_0^4}{4}\Big(\frac{2L(BL^2 + 4æ + 4)K_0(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2æ + 2)K_1(L))} + \\ + \frac{(BL^4 + 4BL^2 + 2L^2 + 2L^2æ + 16æ + 16)K_1(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2æ + 2)K_1(L))}\Big), \quad (2.7)$$

$$C_4 = \frac{pR_0^2(æ + 1)}{4}\,\frac{B(2LK_0(L) + (4 + L^2)K_1(L))}{2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2æ + 2)K_1(L)}, \qquad C_5 = \frac{p}{4},$$

$$C_6 = 0, \qquad C_7 = 0, \quad C_8 = \frac{p(æ + 1)L}{2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2æ + 2)K_1(L))}.$$

Здесь для сокращения записи введена безразмерная величина $L = 2AR_0$.

Решение системы уравнений (2.2), соответствующее псевдосреде Коссера, дается также соотношениями (2.5)–(2.7), однако в данном случае $B = 1$ (2.4), что соответствует предельному случаю при $\alpha \to \infty$.

Вектор перемещения и компоненты тензора напряжений, соответствующие решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор вращения, найденный по соотношению (1), имеют вид

$$u_\rho^*(\rho, \varphi) = C_1^*\rho + \frac{C_2^*}{\rho} + \Big(\frac{C_3^*}{\rho^3} + \frac{C_4^*}{\rho} + C_5^*\rho\Big)\cos 2\varphi,$$

$$u_\varphi^*(\rho, \varphi) = \Big(\frac{C_3^*}{\rho^3} - C_4^*\,\frac{æ - 1}{(æ + 1)\rho} - C_5^*\rho\Big)\sin 2\varphi, \qquad \omega_z^*(\rho, \varphi) = \frac{C_4^*}{\rho^2}\,\sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \varphi) = \frac{4C_1^*}{æ - 1} - \frac{2C_2^*}{\rho^2} + \Big(-C_3^*\,\frac{6}{\rho^4} - \frac{8C_4^*}{(æ + 1)\rho^2} + 2C_5^*\Big)\cos 2\varphi, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) = \Big(-C_3^*\,\frac{6}{\rho^4} - C_4^*\,\frac{4}{(æ + 1)\rho^2} - 2C_5^*\Big)\sin 2\varphi, \quad \sigma_{\varphi\rho}^*(\rho, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi),$$

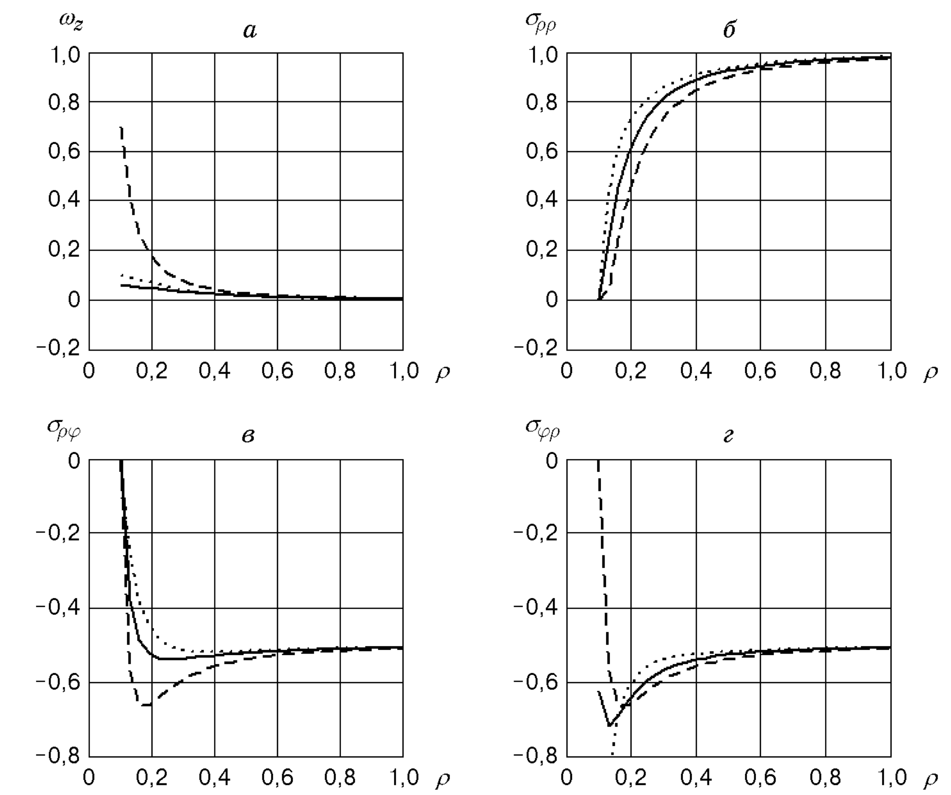
$$\sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) = C_1^*\,\frac{4}{æ - 1} + \frac{2C_2^*}{\rho^2} + \Big(C_3^*\,\frac{6}{\rho^4} - 2C_5^*\Big)\cos 2\varphi, \quad D^* = \Big|\frac{u_\rho^*(R_0, 0)}{u_\rho^*(R_0, \pi/2)}\Big|,$$

где $C_1^* = p(æ - 1)/8$; $C_2^* = pR_0^2/4$; $C_3^* = -pR_0^4/4$; $C_4^* = pR_0^2(æ + 1)/4$; $C_5^* = p/4$; $C_6^* = 0$ [7].

3. Параметрический анализ решения. Полученные решения позволяют провести сравнение напряженно-деформированных состояний в окрестности кругового отверстия, полученных в рамках среды Коссера, псевдосреды Коссера и симметричной среды.

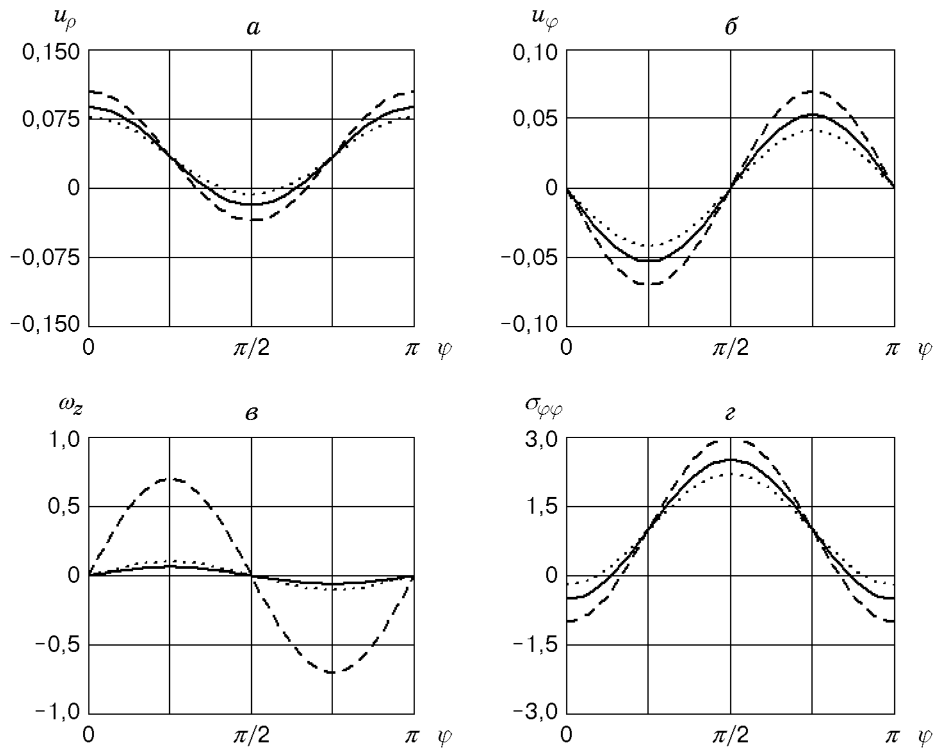
На рис. 2 представлены зависимости компоненты ω_z вектора поворота от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,*а*), компоненты $\sigma_{\rho\rho}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = 0$ (рис. 2,*б*), компоненты $\sigma_{\rho\varphi}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,*в*), компоненты $\sigma_{\varphi\rho}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,*г*). Сплошные линии соответствуют зависимостям для несимметричной среды, штриховые — для симметричной, пунктирные — для псевдосреды Коссера. Представленные зависимости получены для физических констант $\alpha = 0{,}5$, $\gamma = \varepsilon = 1$, $æ = 1{,}8$, радиуса внутренней окружности $R_0 = 0{,}1$.

На рис. 3,*а*–*г* соответственно представлены зависимости радиальной компоненты u_ρ вектора перемещения, азимутальной компоненты u_φ вектора перемещения, компоненты ω_z



ω_z
а
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 ρ
$\sigma_{\rho\rho}$
б
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 ρ
$\sigma_{\rho\varphi}$
в
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 ρ
$\sigma_{\varphi\rho}$
г
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 ρ

Рис. 2



u_ρ
а
0,150
0,075
0
−0,075
−0,150
0 $\pi/2$ π φ
u_φ
б
0,10
0,05
0
−0,05
−0,10
0 $\pi/2$ π φ
ω_z
в
1,0
0,5
0
−0,5
−1,0
0 $\pi/2$ π φ
$\sigma_{\varphi\varphi}$
г
3,0
1,5
0
−1,5
−3,0
0 $\pi/2$ π φ

Рис. 3

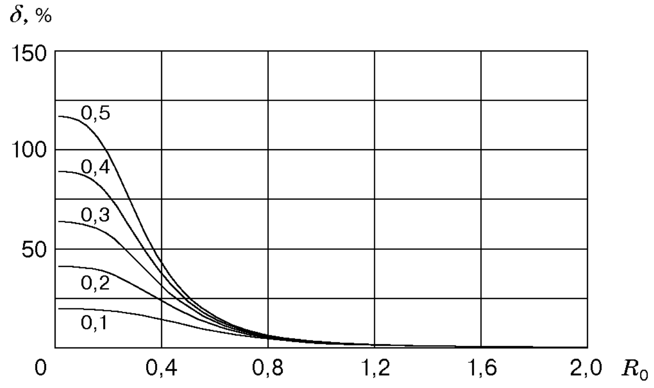


Рис. 4

вектора поворота, компоненты $\sigma_{\varphi\varphi}$ тензора напряжений от координаты φ при $\rho = R_0$ (обозначения те же, что на рис. 2).

Зависимости, приведенные на рис. 3,*а*, позволяют сделать вывод о том, что в качестве экспериментально измеряемой макровеличины можно выбрать параметр D, характеризующий степень искажения контура кругового отверстия.

Близость решения (2.5), полученного в рамках несимметричной теории, и классического решения (2.8) будем оценивать величиной $\delta = |(D - D^*)/D^*| \cdot 100\,\%$. Зависимость δ от размера отверстия R_0 при различных значениях α приведена на рис. 4. Из анализа кривых следует, что влияние моментного описания поведения материала на величину δ значительно усиливается по мере уменьшения характерного размера (радиуса кругового отверстия). Это объясняется тем, что безразмерное моментное решение зависит от характерного размера, а классическое не зависит.

Заключение. Качественный и численный анализ аналитических решений, полученных в работе, а также зависимостей, представленных на рис. 2–4, позволяет сделать следующие выводы.

Запись полученных аналитических решений в безразмерном виде позволила установить, что безразмерное моментное решение зависит от характерного размера, а классическое не зависит.

По мере уменьшения размера кругового отверстия увеличивается различие безразмерных макровеличин, полученных в рамках несимметричной теории, по сравнению с классическими теориями (рис. 4).

В качестве экспериментально измеряемой величины можно использовать параметр D, характеризующий искажение кругового отверстия.

Различия между классическим и несимметричным решениями, а также решением для псевдосреды Коссера зависят от материальных констант. Классическое решение является предельным случаем несимметричного решения при $\alpha \to 0$, решение для псевдосреды Коссера — при $\alpha \to \infty$. Различие классического решения и решения для псевдосреды Коссера определяется величиной $\gamma + \varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. **Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.** Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
3. **Пальмов В. А.** Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.

4. **Пальмов В. А.** Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1117–1120.
5. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
6. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. **Mindlin R. D.** Influence of couple-stress on stress concentrations // Experiment. Mech. 1963. V. 3, N 1. P. 1–7.
9. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
10. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
11. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
12. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 26/XII 2000 г.