

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. ПОДЪЕМ ОБЛАКА АТОМНОГО ВЗРЫВА

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

Рассматривается движение вихревого кольца под действием силы тяжести. Вводится система уравнений, определяющая движение, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Анализируется случай движения кольца при малом отличии плотности в нем от плотности в окружающей среде. Получено численное решение системы уравнений в случае движения кольца, образующегося при взрыве, в неоднородной атмосфере. Приведено сравнение с опытными данными и другими теориями, имеющимися в литературе.

Изучение движения вихревого кольца, содержащего в ядре жидкость с плотностью, отличной от плотности окружающей среды, под действием силы тяжести представляет интерес в связи с рядом явлений, встречающихся в природе и деятельности людей.

Из наблюдения за поведением кучевых облаков и специальных экспериментов установлено, что конвекция, произведенная силами плавучести, состоит большей частью из более или менее изолированных масс всплывающего воздуха, перемешивающихся с окружающей средой. При этом воздух внутри поднимающегося объема циркулирует скорее всего, как в вихревом кольце [1].

В ряде случаев, например при взрывах зарядов ВВ или атомной бомбы, образуется объем сильно нагретого воздуха, который в виде облака устремляется вверх, почти сразу же превращаясь в вихревое кольцо. Это отчетливо видно на ряде фотографий, опубликованных в литературе [2, 3], а также по кинофильмам, показывающим атомный взрыв. В случае атомного взрыва знать движение облака весьма важно, так как в нем содержатся радиоактивные продукты, представляющие опасность для людей. Аналогичное явление может произойти при аварии атомного реактора.

В работе теоретически рассматривается движение вихревого кольца под действием силы тяжести для случаев, моделирующих метеорологические явления, когда разность плотностей в облаке и вне его мала, и для случая взрыва, когда разность плотностей велика, на основании схемы движения, предложенной С. А. Христиановичем в 1954 г.

Рассмотрим общую картину явления. В случае взрыва, после ухода ударной волны на значительное расстояние, в месте взрыва остается светящийся объем горячего воздуха — огненный шар. Когда размеры огненного шара перестают увеличиваться, он устремляется вверх. Очень быстро масса поднимающегося воздуха начинает клубиться и превращается в вихревое кольцо. За несколько секунд поднимающийся объем развивает максимальную скорость подъема, затем скорость уменьшается и в конце концов подъем прекращается. Облако увлекается ветром и расплывается в результате диффузии. Горизонтальные размеры кольца при подъеме постепенно увеличиваются, вращение воздуха в нем прекращается, и облако принимает сплюснутую форму. Если взрыв был произведен у поверхности земли, то подъем облака сопровождается образованием и подъемом пылевого столба. Тогда облако со столбом имеют «грибообразную» форму [4].

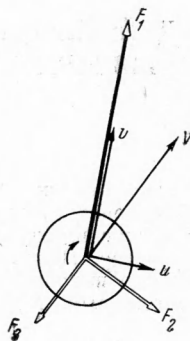
Основная сила, определяющая подъем облака, — сила Архимеда — возникает вследствие разницы плотностей воздуха внутри облака и в атмосфере. На начальной стадии подъема огненного шара в нем под воздействием сил трения, которые определяются турбулентным перемешиванием, возникает вихревое циркуляционное движение. По мере увеличения скорости подъема огненный шар начинает сплющиваться, так как в передней и тыльной критических точках давление по сравнению с атмосферным повышено, а на экваторе шара — понижено. В конце концов, поднимающийся объем приобретает форму тора, воздух внутри которого вращается вокруг горизонтальной кольцевой осевой линии, а вне тора образуется циркуляционное течение.

Из-за существования вокруг элемента вихревого кольца циркуляции на него действует сила Жуковского, направленная перпендикулярно к направлению скорости движения элемента кольца. Горизонтальная составляющая этой силы растягивает кольцо в стороны, а вертикальная составляющая несколько тормозит подъем кольца.

Из-за срыва потока на тыльной стороне элемента кольца на него будет действовать

сила сопротивления, которая направлена противоположно скорости. Схема сил, действующих на элемент кольца, показана на фиг. 1.

Температура воздуха в кольце в начале подъема велика (в расчетах она принята равной трем тысячам градусов), но затем температура уменьшается из-за адиабатического расширения, так как давление в атмосфере падает с высотой и турбулентного перемешивания нагретого воздуха с окружающим холодным воздухом. Охлаждением из-за теплового излучения при таких температурах можно пренебречь, поскольку длина пробега излучения значительно больше размеров облака.



Фиг. 1

Из-за перемешивания содержимого ядра вихревого кольца с окружающим воздухом происходит уменьшение угловой скорости вращения массы воздуха в ядре, а это влечет за собой уменьшение циркуляции внешнего потока. В результате убывает сила Жуковского, растягивающая кольцо в стороны. Скорость горизонтального движения элемента кольца будет падать под воздействием силы трения со стороны окружающего воздуха.

Задача о подъеме вихревого кольца решается при следующих предположениях.

1. Давление внутри кольца равно давлению в окружающей атмосфере, при подъеме происходит адиабатическое расширение.

2. Внутри кольца все величины: плотность, температура, скорость, завихренность — одинаковы по сечению, их изменение с высотой происходит сразу по всему объему кольца.

3. По поверхности кольца происходит турбулентное перемешивание теплого воздуха с окружающим холодным воздухом, аналогично случаю турбулентных струй.

4. Движение элемента вихревого кольца рассматривается как движение круглого цилиндра.

5. Распределение температуры и давления в атмосфере принято соответствующими международной стандартной атмосфере и результатам измерений для больших высот [5].

Результаты расчетов можно применять для рассмотрения движения облака, которое образуется в результате взрыва заряда ВВ.

Качественно то же самое происходит и при падении небольших объемов жидкости в среде иной плотности в случае малой разности плотностей. Описание экспериментов и их результаты приведены в работе Скорера [1]. Ниже результаты этих экспериментов будут использованы для определения значений параметров, от которых зависит решение системы уравнений, описывающих движение вихревого кольца.

Обозначения

ρ, p, T — плотность, давление и температура воздуха внутри кольца;	α — коэффициент вовлечения при турбулентном перемешивании;
ρ_1, p_1, T_1 — те же величины для воздуха в атмосфере;	Γ — циркуляция внешнего потока около кольца;
ζ — отношение плотностей воздуха внутри и вне кольца;	v_i — «индуктивная» скорость движения вихревого кольца (скорость установившегося движения вихревого кольца, не подверженного действию внешних сил [6, 7]);
θ — потенциальная температура;	g — ускорение свободного падения;
R — радиус осевого кольца тора;	q — величина тротилового эквивалента энергии взрыва в m ;
r — радиус поперечного сечения тора;	a_0 — радиус огненного шара к началу подъема облака;
W — объем тора;	H — высота подъема осевой линии кольца;
S — площадь боковой поверхности элемента кольца;	H^+ — высота подъема верхней кромки кольца;
S_1 — площадь миделева сечения элемента кольца;	d — вертикальные размеры кольца;
M — масса воздуха в вихревом кольце;	D — величина горизонтальных размеров кольца;
M_1 — «присоединенная» масса тора при неустановившемся движении;	t^+ — время достижения облаком максимальной высоты;
v — скорость подъема тора;	κ — отношение удельных теплоемкостей.
u — скорость горизонтального движения элемента кольца;	
V — скорость движения элемента кольца;	
C_x — коэффициент сопротивления;	

$$\zeta = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{T_1}{T}, \quad \theta = T_1 \left[\frac{\rho_{01}}{\rho_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad H^+ = H + r$$

$$D = 2(R + r), \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad M_1 \approx \rho_1 V, \quad Re = \frac{2rV}{\nu}$$

1. Вывод уравнений, описывающих движение вихревого кольца.
Уравнение движения. Изменение количества движения массы элемента вихревого кольца и окружающего воздуха (что выражается через введение «присоединенной» массы M_1) в единицу времени равно сумме действующих на элемент кольца сил: силы Архимеда F_1 , силы Жуковского F_2 и силы сопротивления F_3

$$F_2 = \rho_1 V \Gamma R d\varphi, \quad F_3 = 1/2 C_x \rho_1 V^2 S_1$$

Проектируя соответствующее векторное уравнение на горизонтальное и вертикальное направления, получаем уравнения движения элемента вихревого кольца:

а) проекция на вертикальное направление

$$\frac{d}{dt} [v (M + M_1)] = gW\rho_1 (1 - \zeta) - 2\pi\rho_1 \Gamma R u - \frac{C_x S_1}{2} \rho_1 v V \quad (1.1)$$

б) проекция на горизонтальное направление

$$\frac{d}{dt} [u (M + M_1)] = 2\pi\rho_1 \Gamma v R - \frac{C_x S_1}{2} \rho_1 u V \quad (1.2)$$

Уравнение баланса тепла. Рассмотрим баланс тепла за время изменения высоты облака на величину dH [8]. Пусть на уровне, где давление равно p , масса облака была M , температура воздуха в нем $T(p)$. При изменении высоты подъема облака на dH давление станет равным $p + dp$. Если бы не было перемешивания с окружающим воздухом, то температура воздуха в облаке стала бы равной

$$T(p) \left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{dp}{p} \right]$$

из-за адиабатического расширения. Однако за это время в облако вовлекается масса воздуха dM . Будем все вовлечение массы в интервале относить к уровню $p + dp$. Тогда общее теплосодержание смешанной массы должно быть равно сумме теплосодержаний первоначальной и вовлеченной масс. Пренебрегая малыми второго порядка и разницей в значениях удельных теплоемкостей, получим

$$\frac{dT}{T} = \frac{dT_1}{T_1} - \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{dp}{p} - (1 - \zeta) \frac{dM}{M} \quad (1.3)$$

Перемешивание с холодным окружающим воздухом. На поверхности кольца происходит турбулентное перемешивание нагретого воздуха, заключенного внутри кольца, и холодного окружающего воздуха. Суммарно эффект перемешивания учтем, приняв зависимость между скоростью вовлечения на границе, скоростью движения кольца и значениями плотности воздуха в кольце и вне его такого же вида, как для турбулентного перемешивания струи газа в среде иной плотности [9, 10]. Если скорость на оси струи V , плотность воздуха на оси струи ρ , плотность окружающего воздуха ρ_1 , то скорость вовлечения окружающего воздуха на границе струи $v^\circ = \alpha V \sqrt{\rho / \rho_1}$.

Используя это выражение, получим для массы воздуха, вовлекаемого в единицу времени через площадь S боковой поверхности, выражение

$$dM / dt = \alpha V S (\rho \rho_1)^{1/2}$$

В рассматриваемой задаче примем такое же соотношение

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{2\alpha V}{r \sqrt{\xi}} \quad (1.4)$$

Уравнение для определения величины циркуляции. Величина циркуляции внешнего потока около тора определяется значением угловой скорости вращения массы воздуха в ядре тора. Из-за увеличения массы воздуха в ядре величина угловой скорости уменьшается. Нарушение соответствия между величинами угловой скорости вращения ядра кольца и внешней циркуляции вызывает отрыв вихрей и унос их потоком, что приводит к изменению величины циркуляции.

Момент количества движения массы воздуха в ядре на элемент длины $Rd\varphi$, равный $1/4 (M\Gamma/\pi)^{1/2} \pi^2 d\varphi$ в предположении постоянства угловой скорости вращения по сечению тора, изменяется под действием момента силы трения, который определяется переносом количества движения при перемешивании.

Примем, что величины угловой скорости и циркуляции внешнего потока связаны линейно. Тогда момент силы трения зависит от величины массы жидкости, вовлекаемой в ядро в единицу времени, скорости элемента кольца и циркуляции внешнего потока. Из соображений размерности следует, что выражение для него должно иметь вид

$$\text{const} \frac{dM}{dt} \Gamma = \text{const} 2\pi\alpha V \sqrt{\rho\rho_1 R r} \Gamma d\varphi$$

аналогичный виду выражения для момента силы трения в случае вращения твердого цилиндра в потоке жидкости [11], т. е. получаем уравнение для определения величины циркуляции потока

$$d\Gamma / dt = -\beta 2\alpha\Gamma V / r \sqrt{\xi} \quad (1.5)$$

Значение постоянной следует подобрать из сравнения расчетов с опытными данными. Добавляя к уравнениям (1.1) — (1.5) соотношения

$$u = dR / dt, \quad v + v_i = dH / dt \quad (1.6)$$

$$M = \rho_1 \xi 2\pi^2 r^2 R, \quad v_i \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \left\{ \ln \frac{8R}{r} - \frac{1}{4} - \frac{12 \ln(8R/r) - 15}{32} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \quad (1.7)$$

получаем систему уравнений для определения v , u , R , r , H , Γ , ξ — величин, характеризующих движение вихревого кольца.

Начальные данные. Интегрирование системы уравнений будет начинаться с момента t_0 , в который происходит образование вихревого кольца. В этот момент времени зависимость между скоростью подъема v_0 и величиной циркуляции Γ_0 можно определить, приравнявая сумму скоростей $v_0 + v_i$ значению скорости, которая индуцируется вихревой нитью радиуса R_0 на оси в плоскости кольца

$$v_0 = \Gamma_0 / 2R_0 - v_i \approx 0.64 \Gamma_0 / a_0$$

В момент t_0 примем также следующие соотношения: $\xi_0 = 0,1$; равенство нулю скорости горизонтального движения элемента кольца $u_0 = 0$; равенство объемов огненного шара и тора, откуда следует, что $R_0 = r_0 = 0.596 a_0$. Будем считать, что до момента t_0 подъем облака происходил только под действием силы тяжести, что величина ξ остава-

лась за это время постоянной, а значение «присоединенной» массы примем равным значению для тора; получим

$$t_0 = 0.78 \gamma_0 \sqrt{a_0/g}, \quad H_0 = 0.25 \gamma_0^2 a_0, \quad \gamma_0 = \Gamma_0/a_0 \sqrt{a_0 g}$$

Здесь γ_0 — безразмерное значение циркуляции.

Уравнения и начальные условия можно записать в безразмерном виде. Введем характерные величины a_0 для длины, $\sqrt{a_0 g}$ — для скорости и $\sqrt{a_0/g}$ — для времени. Тогда имеем

$$R' = \frac{R}{a_0}, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{a_0 g}}, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{a_0/g}}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{a_0 \sqrt{a_0 g}} \text{ и т. п.}$$

Величина a_0 , характеризующая масштаб явления, входит в уравнения множителем при выражении $d \ln \theta / dH$, величина которого определяет степень устойчивости стратификации атмосферы. При $d \ln \theta / dH = 0$ (однородная или адиабатическая атмосфера) существовало бы подобие по отношению к масштабам явления, однако практически такое рассмотрение неприменимо, так как при этом $\max H \rightarrow \infty$. В неоднородной атмосфере ($d \ln \theta / dH > 0$) значение $\max H$ конечно, зато нет подобия. Чем больше величина a_0 , тем большее значение имеют члены уравнений, содержащие градиенты величин p_1 , ρ_1 и T_1 . В начале движения эти члены малы, и должно существовать приближенное подобие по отношению к величине a_0 на начальной стадии движения. К концу же подъема облака именно эти члены наиболее существенны для определения значения максимальной высоты подъема облака.

Решение системы уравнений зависит от параметров α , β и γ_0 . Из опытов по турбулентному перемешиванию струй известно [12,13], что величина α заключена в пределах от 0.03 до 0.08. В расчетах было принято значение $\alpha = 0.055$. Порядок величины γ_0 можно оценить из рассмотрения начальной стадии движения огненного шара.

Выделим элементарный сектор. Момент количества движения массы воздуха в нем относительно оси вихря будет изменяться под действием сил трения по поверхности. Геометрическую форму объема и скорость внешнего потока возьмем соответствующими моменту t_0 , так как именно в этот момент скорость наибольшая, а следовательно — и наибольший вклад сил трения в создание циркуляции. Используя уравнение (1.5) и соотношение между величинами v_0 и γ_0 , получаем

$$\gamma_0 = \left[\frac{3}{8\pi 4.4 (0.64)^2 \alpha} \right]^{1/2} \frac{(1-\zeta) \sqrt{\zeta}}{1+\zeta}^{1/2}$$

При $\zeta = 0.1$ значение $\gamma_0 = 0.55$. Такой порядок величины соответствует окружной скорости вращения воздуха в ядре, равной нескольким м/сек, что вполне подходит по смыслу. Примем полученный вид зависимости γ_0 от ζ , значение же постоянной определим из сравнения с экспериментальными данными

$$\gamma_0 = \gamma^* \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right)^{1/2} \zeta^{1/4} \quad (1.8)$$

При малых отклонениях плотности полученная зависимость совпадает с выражением, указанным в работе [1]. Значение параметра β также следует выбрать из сравнения с экспериментальными данными; $\beta = +1$ соответствует сохранению постоянным момента количества движения, $\beta = 0$ — сохранению постоянной циркуляции вихревого кольца.

Таким образом, решается следующая система уравнений, определяющая движение облака — вихревого кольца

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dt'} &= \frac{1-\zeta}{1+\zeta} - \frac{\gamma u'}{\pi(1+\zeta)(r')^2} - \frac{v'V'}{r'} \left[\frac{C_x}{\pi(1+\zeta)} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\zeta}} \right] + \frac{v'}{(1+\zeta)\zeta} \frac{d\zeta}{dt'} \\ \frac{du'}{dt'} &= \frac{\gamma v'}{\pi(1+\zeta)(r')^2} - \frac{u'V'}{r'} \left[\frac{C_x}{\pi(1+\zeta)} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\zeta}} \right] + \frac{u'}{(1+\zeta)\zeta} \frac{d\zeta}{dt'} \\ \frac{d\gamma}{dt'} &= -\frac{2\alpha\beta\gamma V'}{r'\sqrt{\zeta}}, \quad \frac{dr'}{dt'} = \frac{r'}{2} \left[\frac{2\alpha V'}{r'\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt'} - \frac{u'}{R'} - v' \frac{d \ln \rho_1}{dH} a_0 \right] \\ \frac{d\zeta}{dt'} &= \zeta \left[\frac{2\alpha(1-\zeta)V'}{r'\sqrt{\zeta}} + v' a_0 \frac{d \ln \theta}{dH} \right], \quad \frac{dH'}{dt'} = v' + v_i', \quad \frac{dR'}{dt'} = u' \\ V' &= \sqrt{(u')^2 + (v')^2}, \quad v_i' = \frac{\gamma}{4\pi R'} \left[\ln \frac{8R'}{r'} - \frac{1}{4} - \frac{12 \ln(8R'/r') - 15}{32} \left(\frac{r'}{R'} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} t_0' &= 0.78\gamma_0, \quad H_0' = 0.25\gamma_0^2 + h_0', \quad v_0' = 0.64\gamma_0 \\ u_0' &= 0, \quad R_0' = r_0' = 0.596, \quad \zeta_0 = 0.1 \end{aligned}$$

2. Движение вихревого кольца в случае малой разницы плотностей и определение значений параметров. Описание и результаты экспериментов [1]. Над резервуаром с водой опрокидывалась чашка с раствором, плотность которого превышала плотность воды. Объем более тяжелой жидкости ускоренно двигался вниз, быстро превращаясь в вихревое кольцо. После того как кольцо проходило расстояние, равное примерно полутора диаметрам чашки (диаметр чашки равен 7.62 см), движение его становилось замедленным. Измерения относились к замедленной части движения. В течение измеряемой части разность плотностей была в большинстве случаев меньше 5% и к концу движения уменьшалась почти до 0.1%. Расстояние в 107 см проходило за 5—30 сек в зависимости от превышения веса. Движение полностью турбулентное и не зависит от величины вязкости. При помощи безразмерного анализа в указанной работе получены зависимости, подтвержденные экспериментально

$$k_1 (H')^2 = t' (1 - \zeta_0)^{1/2}, \quad H'^+ = 1/2 D' n, \quad v = C [1/2 g D (1 - \zeta)]^{1/2} \quad (2.1)$$

Здесь постоянная $k_1 \approx 0,09$; величина n остается постоянной в течение движения вихревого кольца (обнаружено систематическое увеличение n с ростом $1 - \zeta_0$); постоянная $C = 1.2$.

Решение системы уравнений. В случае однородной жидкости в окружающей среде на основе общих уравнений имеем

$$W(1 - \zeta) = \text{const}, \quad \gamma = \gamma_0 \left[\frac{(1 - \zeta)\zeta_0}{(1 - \zeta_0)\zeta} \right]^\beta \quad (2.2)$$

Используя их, а также выражение для величины циркуляции в начальный момент (1.8) и вводя обозначения $1 - \zeta = \Delta$ и $\Delta / \Delta_0 = x$, запишем уравнения в виде

$$\frac{d}{dx} \frac{V'^2}{\Delta_0} = \frac{1}{(2 - \Delta_0 x) x \sqrt{1 - \Delta_0 x}} \left\{ \frac{V'^2}{\Delta_0} \left[\frac{C_x}{\pi\alpha} + 4 \sqrt{1 - \Delta_0 x} \right] - \frac{v' r'}{V' r_0'} x \frac{r_0'}{\alpha} \right\} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{u'}{\sqrt{\Delta_0}} &= \frac{1}{2(2 - \Delta_0 x) x \sqrt{1 - \Delta_0 x}} \left\{ \frac{u'}{\sqrt{\Delta_0}} \left[\frac{C_x}{\pi\alpha} + 4 \sqrt{1 - \Delta_0 x} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^* (1 - \Delta_0)^{\beta+1/4} r_0' v'}{\pi\alpha r_0' (2 - \Delta_0)^{1/2} r' V'} \frac{x^\beta}{(1 - \Delta_0 x)^\beta} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{2}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{r_0'}{r'} \right)^3 = \frac{1}{x} \left(\frac{r_0'}{r'} \right)^3 - \frac{1}{2\alpha \sqrt{1 - \Delta_0 x}} \frac{u'}{V'} \quad (2.5)$$

$$\frac{dH'}{dx} = -\frac{r_0'}{2\alpha x \sqrt{1-\Delta_0 x}} \frac{r' v'}{r_0' V'}, \quad \frac{d}{dx} [t' \sqrt{\Delta_0}] = -\frac{r_0'}{2\alpha x \sqrt{1-\Delta_0 x}} \frac{\sqrt{\Delta_0}}{V'} \frac{r'}{r_0'}$$

$$\frac{R'}{R_0'} = \left(\frac{r_0'}{r'}\right)^2 \frac{1}{x} \quad (2.6)$$

и начальные условия

$$x = 1, \quad \frac{R'}{R_0'} = \frac{r'}{r_0'} = 1, \quad H' = t' = u' = 0, \quad \frac{v'}{\Delta_0^{1/2}} = 0.64 \frac{(1-\Delta_0)^{1/4}}{(2-\Delta_0)^{1/2}}$$

Чтобы получить представление о ходе решения на участке замедления и о зависимости решения от величины параметров, рассмотрим приближенно поведение решения системы уравнений при $x \rightarrow 0$. Для этого пренебрежем в уравнениях (2.3), (2.4) и (2.5) левыми частями (законность такого пренебрежения подтверждается численным счетом и полученными оценками), будем также считать, что $v' = V'$. Тогда получаем выражения

$$\frac{r'}{r_0'} \rightarrow \left(\frac{B}{x^{1+2\beta}}\right)^{1/3}, \quad \frac{R'}{R_0'} \rightarrow \left(\frac{1}{B^2 x^{1-4\beta}}\right)^{1/3}, \quad \frac{v'}{\Delta_0^{1/2}} \rightarrow \left[\frac{\pi r_0'}{C_x + 4\pi\alpha}\right]^{1/2} \left(\frac{\sqrt{B}}{x^{1-\beta}}\right)^{1/3}$$

$$B = \frac{4\pi\alpha^2 (r_0')^3 (2-\Delta_0) (C_x + 4\pi\alpha)}{(\gamma^*)^2 (1-\Delta_0)^{1/2} (1+4\beta)}$$

Используя эти зависимости, интегрируем следующие два уравнения:

$$H' \rightarrow \frac{3r_0'}{2\alpha(1+2\beta)} \left(\frac{B}{x^{1+2\beta}}\right)^{1/3}, \quad t' \Delta_0^{1/2} \rightarrow \frac{3r_0'}{2\alpha(2+\beta)} \left(\frac{\sqrt{B}}{x^{2+\beta}}\right)^{1/3} \left(\frac{C_x + 4\pi\alpha}{\pi r_0'}\right)^{1/2}$$

Отметим, что величина H' довольно слабо зависит от значения коэффициента α . Для n получается выражение

$$n = \frac{H' + r'}{R' + r'} = \frac{6\pi\alpha (r_0')^3 (C_x + 4\pi\alpha) (2-\Delta_0)}{(1+2\beta) \gamma^* (1-\Delta_0)^{1/2} (1+4\beta) x^{2\beta}}$$

Величина n в полученном решении растет с уменьшением x , однако основная часть пути вихревого кольца приходится на довольно узкую область изменения x вблизи значения 0.01 (как показывает численный счет), поэтому практически n близко к постоянной на большей части пути. Важным в выражении для n является зависимость от величины Δ_0 . Если обозначить через n_0 значение, соответствующее $\Delta_0 = 0$, то получаем

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2-\Delta_0}{2(1-\Delta_0)^{1/2} (1+4\beta)}$$

т. е. n/n_0 монотонно возрастает с увеличением перепада плотностей Δ_0 . Величина $t' \sqrt{\Delta_0} (H')^{-2}$ также не остается постоянной при $\beta \neq 0$, но практически она мало изменяется на протяжении большей части пути.

Значение $\beta = 0$ соответствует случаю $\gamma = \text{const}$, при этом строго получаются соотношения (2.1), однако n не зависит от величины Δ_0 . В течение большей части пути, на которой проводились измерения, циркуляция вихревого кольца изменяется мало.

Значение $\beta = 1$ соответствует случаю сохранения момента количества движения, при этом n слишком резко зависит от Δ_0 . Результаты расчетов, проведенных для случая $\Delta_0 \rightarrow 0$, сопоставленные с опытными зависимостями, дают значения параметров $\beta = +0.2$ и $\gamma^* = 0.4$. Численное решение для этих значений параметров дано в табл. 1. Для более точного определения параметров необходимо иметь более подробные данные, в работе [1] даны только величины $\Delta_0 W_0$. Если принять, что объем выпускаемой жидкости равен объему чашки, то $a_0 = 3$ см. Замедление движения кольца начинается по расчетам после прохождения расстояния 9 см, что составляет 1.2 диаметра чашки. Экспериментально это расстояние получилось равным 1.5 диаметрам чашки. Для ско-

Таблица 1

x	$v'/\sqrt{\Delta_0}$	$w'/\sqrt{\Delta_0}$	R'/R_0'	r'/r_0'	H'	$t'\sqrt{\Delta_0}$	n	k_1
1.0	0.19	0	1.0	1.0	0	0		
0.98	0.362	0.014	1.002		0.111	0.41		
0.90	0.708	0.068	1.04		0.597	1.31		
0.80	0.847	0.121	1.16	1.04	1.26	2.16		
0.70	0.900	0.165	1.32	1.04	2.02	3.03		
0.50	0.809	0.216	1.90	1.03	3.93	5.27		
0.30	0.625	0.219	3.14	1.03	6.81	9.35	2.95	
0.10	0.382	0.168	6.95	1.20	14.5	23.4	3.10	
0.06	0.311	0.139	9.30	1.34	18.2	33.7	2.96	
0.04	0.264	0.118	11.3	1.50	21.3	44.5	2.89	0.092
0.02	0.210	0.087	14.8	1.84	27.8	72.4	2.90	
0.01	0.166	0.061	18.8	2.31	36.0	117	2.96	0.091
0.006	0.140	0.046	22.1	2.74	43.1	165	3.01	0.082

рости движения кольца из решения уравнений получаем выражение $v = 1.3 (gr\Delta)^{1/2}$, которое хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью (3.3). Время прохождения расстояния в 107 см равно

$$\frac{6}{\sqrt{\Delta_0}} \left[\frac{1 - \Delta_0/2}{(1 - \Delta_0)^{0.9}} \right]^{1/6}$$

что дает значения в 10—60 сек при изменении Δ_0 от 0.4 до 0.01.

Приведенное рассмотрение позволяет сделать вывод, что рассмотренная схема движения вихревого кольца достаточно хорошо описывает экспериментальные зависимости. По данным экспериментов с вихревыми кольцами небольших размеров с малыми разностями плотностей подобраны значения параметров β и γ^* , которые можно использовать при расчетах движения больших объемов с большими перепадами плотностей. Следует только учесть еще зависимость величины коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. В случае модельных экспериментов было использовано значение $C_x = 1.2$, поскольку числа Рейнольдса $R = 10^3 - 10^5$, а в случае расчетов движения облака атомного взрыва $C_x = 0.4$, поскольку число $R > 10^6$ [12].

3. Определение зависимости радиуса огненного шара от величины энергии взрыва. В результате взрыва массы газа, заключенной в огненном шаре, сообщается тепловая энергия, величину которой можно подсчитать, воспользовавшись результатами расчета точечного взрыва с учетом противодействия [14]. Примерно одна треть всей выделившейся при взрыве энергии испускается в виде излучения [15]. В итоге энергия, заключенная в огненном шаре к началу его подъема, составляет примерно одну четверть от всей энергии взрыва. Объем огненного шара определяется из соотношения

$$\frac{4\pi a_0^3 p_0}{3(\kappa - 1)} = 0.25 E_0$$

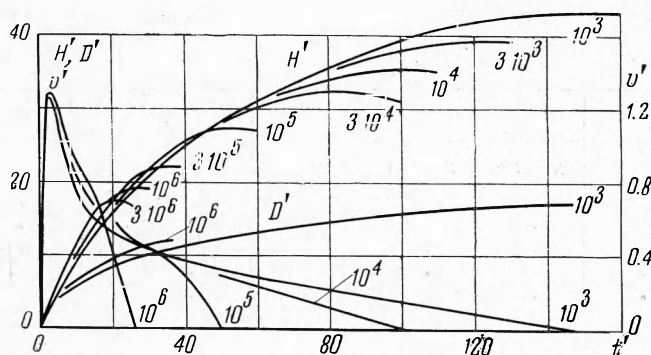
Радиус огненного шара зависит от величины тротилового эквивалента следующим образом [16]: a_0 [м]

$$a_0 = \left(\frac{p_{00}}{p_0} \right)^{1/3} q^{1/3} \cdot 10 \quad (3.1)$$

Здесь p_{00} — давление в атмосфере на уровне моря (760 мм рт. ст.), p_0 — давление в атмосфере на высоте подрыва h_0 .

4. Результаты решения системы уравнений, определяющих движение облака атомного взрыва для стандартной атмосферы. Значения безразмерных величин H' — h'_0 , D' , v' в зависимости от времени t' для ряда величин тротилового эквивалента при $h'_0 = 0$ приведены на фиг. 2. К размерным величинам следует переходить по указанным выше выражениям,

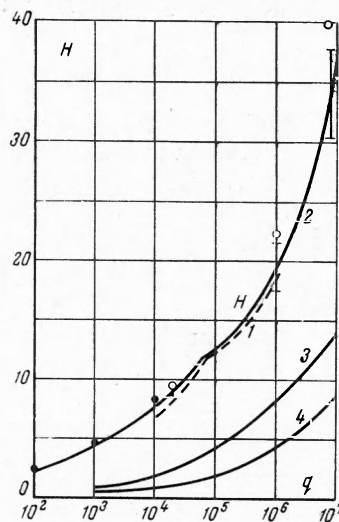
используя зависимость a_0 от q . Как отмечалось, подобие решений для взрывов с разными значениями тротилового эквивалента нарушается тем, что атмосфера неоднородна по высоте. Уменьшение безразмерной



Фиг. 2

высоты подъема облака связано с тем, что с ростом a_0 одно и то же значение H' соответствует большим высотам, а значит, меньшим давлениям и большему адиабатическому охлаждению. Поэтому подъемная сила для больших a_0 с ростом H' убывает быстрее, и достигаемая облаком высота H' уменьшается. Высота же подъема облака, выраженная в км, растет с увеличением эквивалента. График величины H' приведен на фиг. 3. По кривым фиг. 2 можно судить о существовании подобия величин H' , D' и v' (как функций от t') на начальном участке движения облака. С увеличением времени t' подобие начинает нарушаться, и интервал величин q , для которых оно еще сохраняется, сужается.

Характерным является увеличение растекания облака в стороны с ростом величины q после достижения им максимальной высоты. Попадая в более разреженные слои атмосферы, каждый элемент кольца медленнее теряет количество движения в горизонтальном направлении, приобретенное под действием силы Жуковского в начале движения, и облако сильнее растекается в стороны. В табл. 2 приведены данные, характеризующие степень растекания.



Фиг. 3

Максимальная высота подъема центра облака лежит выше уровня, на котором плотности воздуха внутри облака и вне его равны (уровень равновесия — H_1). С ростом q это превышение становится более значительным. В табл. 3 приведены данные, характеризующие величину $H - H_1 = \Delta H$ в зависимости от значения эквивалента.

Колебания больших масс воздуха с такими значительными амплитудами должны вызывать распространение в атмосфере колебаний так называемых внутренних волн [17, 18]. Облако проскакивает по инерции «уровень равновесия», а затем совершает около него колебания с затухающей

амплитудой. Период колебаний облака можно определять по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{[1/2gd \ln \theta / dH]^{1/2}} \text{ [сек]}$$

Эта формула получена из решения системы уравнений вблизи уровня

Таблица 2

q TH	maxH'+	D'/maxH'+	
		t' = t'+	t' = 200
10 ³	46	0.39	0.41
10 ⁴	38	0.42	0.49
10 ⁵	29.4	0.45	0.62
10 ⁶	21.7	0.51	0.87

Таблица 3

q TH	maxH'	H'	maxH'/H'	ΔH км
10 ³	44	38.3	1.15	0.57
10 ⁴	36	31.1	1.16	1.05
10 ⁵	27.4	24.2	1.13	1.48
3·10 ⁵	22.8	19.4	1.17	2.38
10 ⁶	19.7	15.7	1.25	4

равновесия, где можно сделать упрощения, считая величины v' и $1 - \zeta$ малыми и пренебрегая растеканием кольца в стороны. Период колебаний, таким образом, зависит от высоты «уровня равновесия». Для принятой в расчетах атмосферы он будет меняться следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} H_1 = & 0-11 & 11-25 & 30 & 40 & 45 & \text{км} \\ \tau = & 780-750 & 417 & 380 & 405 & 415 & \text{сек} \end{array}$$

Значение времени достижения облаком максимальной высоты с ростом эквивалента уменьшается:

$$\begin{array}{cccc} q = & 10^3 & 10^4 & 10^5 & 10^6 & m \\ t_+ = & 480 & 465 & 340 & 260 & \text{сек} \end{array}$$

Приближенная зависимость для определения величины максимальной высоты подъема облака. Будем считать, что $v' = V$ и $2\alpha/r' = \text{const}$. О возможности таких допущений можно судить по данным численного счета, первое из них выполняется хорошо. Тогда из уравнений для H' и ζ получаем

$$\frac{dH'}{d\zeta} = \left[(1 - \zeta) \zeta^{1/2} \frac{2\alpha}{r'} + \zeta a_0 \frac{d \ln \theta}{dH} \right]^{-1}$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$H' \approx \frac{r'}{2\alpha} \ln \left[\frac{(1 + \sqrt{\zeta})(1 - \sqrt{\zeta_0})}{(1 - \sqrt{\zeta} - 1/4 a_0 r' \alpha^{-1} d \ln \theta / dH)(1 + \sqrt{\zeta_0})} \right]$$

так как можно пренебречь величиной $1/4 a_0 r' \alpha^{-1} d \ln \theta / dH$ по сравнению с 1. Хотя облако, как видно из точного решения, достигает максимальной высоты при $\zeta > 1$, проскакивая по инерции положение равновесия, будем считать $\zeta_{\text{max}} = 1$. Тогда имеем приближенное выражение для величины максимальной высоты подъема центра облака в зависимости от размеров огненного шара

$$H'_{\text{max}} \approx \frac{r'}{2\alpha} \ln \left[\frac{(1 - \sqrt{\zeta_0}) 8\alpha}{(1 + \sqrt{\zeta_0}) r' a_0 d \ln \theta / dH} \right] \quad (4.1)$$

В атмосфере с более устойчивой стратификацией (большее значение градиента $d \ln \theta / dH$) высота подъема облака будет меньше. Значение высоты подъема довольно слабо зависит от начального отношения плотностей ζ_0 .

Так как все же ζ_{\max} отлично от 1 (и тем больше, чем больше величина q), то следует пользоваться зависимостью, коэффициенты в которой определены по результатам численного счета

$$H_{\max} \approx 11a_0 \ln \frac{5750}{a_0} \quad (4.2)$$

5. Образование и подъем пылевого столба. Атомный взрыв сопровождается образованием приземного слоя пыли и подъемом в эпицентре клубящегося пылевого столба [4]. Размеры пылевого столба и характер его движения зависят при одном и том же значении эквивалента q от высоты подрыва h_0 . Ниже приводится качественное рассмотрение подъема верхушки пылевого столба.

Под воздействием теплового излучения верхний слой почвы испаряется, и образовавшийся слой запыленного воздуха прогревается излучением. Распределение температуры в этом слое имеет характер горба с максимумом в эпицентре. Значение температуры в эпицентре и скорость убывания ее вдоль радиуса зависят от энергии взрыва и высоты подрыва. Существование слоя воздуха, нагретого таким образом, должно привести к появлению в эпицентре восходящего потока. Так возникает и развивается пылевой столб. Постепенно за счет турбулентного перемешивания и расширения воздух охлаждается, скорость подъема падает и, наконец, подъем столба прекращается. Если взрыв произведен у самой поверхности, то на образование и подъем пылевого столба оказывает влияние подъем огненного шара и создаваемое им разрежение в следе. Однако такое разрежение слабо для того, чтобы обеспечить догон пылевым столбом облака при взрыве на высотах $h_0 > a_0$.

Движение вершины столба можно в грубом приближении рассмотреть изолированно от движения других частей столба в виде подъема сферы нагретого воздуха некоторого радиуса (величина которого определяется из опыта или специальных расчетов), так как воздух в вершине столба наиболее нагрет, он подвержен действию большей подъемной силы и как бы все более опережает другие части пылевого столба. При $q = \text{const}$ нагрев вершины пылевого столба зависит от высоты подрыва и уменьшается с ростом h_0 . Выбирая значения температур, определенных для разных h_0 в качестве начальных данных, можно проинтегрировать систему уравнений, аналогичную случаю подъема облака, и рассчитать траектории вершины пылевого столба. Накладывая на эту серию кривых траектории облака для соответствующих значений h_0 , получим, что до некоторого значения высоты подрыва h_0^* пылевой столб будет догонять облако. При $h_0 > h_0^*$ догона происходить не будет. На ряде фотографий [2, 3] видно, что столб пыли в течение длительного промежутка времени после взрыва еще не соединился с облаком.

6. Сопоставление расчетов с данными, имеющимися в литературе. В литературе [19-23] приводятся два способа определения максимальной высоты подъема облака атомного взрыва. В работах Сэттона и Мэчта предполагается, что подъем облака вызывается силой Архимеда, а охлаждение происходит в результате адиабатического расширения и перемешивания с окружающим воздухом; при этом циркуляция в облаке, а также влияние инерции не учитываются. В этих работах вычисляется только величина максимальной высоты подъема облака, за которую принимается «уровень равновесия». Вопросам подъема облака посвящена также статья Тэйлора, Моргана и Гарнера [24], в которой учитывается охлаждение облака, а также его колебания; циркуляция в облаке не вводится в рассмотрение.

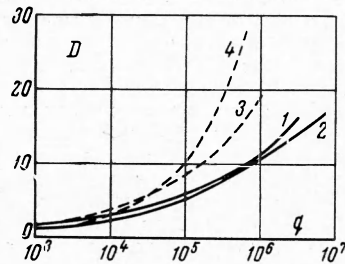
Сэттон дает для высоты подъема ($\kappa м$) зависимость

$$\max H = 0.665 q^{0.276}$$

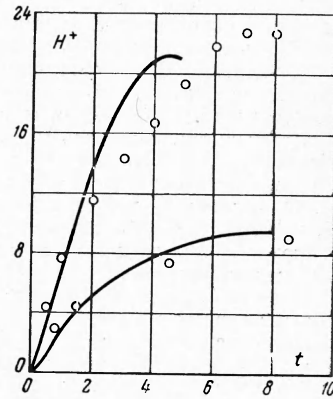
Этой формулой можно пользоваться до высоты, равной 11 км, так как в ней принята линейная зависимость потенциальной температуры от высоты, справедливая в этом интервале высот. Полученные в работе результаты хорошо согласуются с формулой Сэттона в диапазоне q от 10^{-1} до 10^3 т. Мэчта дает формулу

$$\max H = \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dH} \right)^{-1} \ln \left\{ \frac{1}{d\theta} \frac{1}{dH} \frac{1}{M} \frac{dM}{dH} \left[(\Delta\theta)_0 + \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dH} \right)^{-1} \frac{d\theta}{dH} \right] \right\}$$

Эта формула по своей структуре сходна с приближенной зависимостью (4.1), полученной в работе. Однако у Мэча не входит явно зависимость от величины энергии взрыва, в связи с чем ошибочно указывается на ограниченность применения этой формулы. Эта ошибка исправлена в работе [25], в которой приведены зависимости максимальной высоты подъема облака от энергии взрыва в интервале величин эквивалента от $5 \cdot 10^3$ до 10^6 т для разных случаев распределения потенциальной температуры по высоте (средние широты, тропики). В этой же статье приведены экспериментальные данные о зависимости диаметра и вертикальных размеров облака от величины эквивалента. Указано на растекание облака в стороны после достижения им $\max H$, которое увеличивается с ростом энергии взрыва. Указано также, что подъем облака прекращается через 4–6 мин.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3 приведено сравнение данных о максимальной высоте подъема облака, полученных по формулам Сэттона (темные точки), Мэча кривая 1 и изложенной схеме, кривая 2. Светлыми точками приведены опытные данные [15, 26]. В интервале эквивалентов от 10^3 до $3 \cdot 10^6$ т наши расчетные данные хорошо совпадают с данными работы [25]. При $q = 2 \cdot 10^4$, 10^6 и $8 \cdot 10^6$ т вертикальной чертой показаны расчетные вертикальные размеры облака; наблюдения качественно подтверждают изменения вертикальных размеров облака с ростом эквивалента (кривая 4), однако эти значения в два раза меньше опытных [25] (кривая 3). Причиной такого расхождения может быть и переупрощение расчетной схемы: однородность всех величин в облаке по объему.

Приведенные на фиг. 4 горизонтальные размеры (км) по работе [25] (кривая 2) в момент достижения максимальной высоты хорошо совпадают с расчетными (кривая 1), а растекание по расчетам (кривая 3) получилось меньшим (кривая 4). В книге [27] приведены следующие данные: при взрыве водородной бомбы с эквивалентом $8 \cdot 10^6$ т тротила (1 XI 52) облако поднялось на высоту 25 миль (40 км). По расчетам центр облака для величины эквивалента в $10 \cdot 10^6$ т поднимается на высоту, равную 37 км.

На фиг. 5 приведено сравнение зависимостей $H^+(t)$ (высота в км, время в мин.) для $q = 2 \cdot 10^4$ и 10^6 т с опытными данными, приведенными в книгах [15, 26] (сплошные кривые — расчет), т. е. во всем интервале сравниваемых величин q от 10^{-1} до 10^7 т расчетные значения $\max H$ удовлетворительно совпадают с данными, приведенными в литературе.

Автор благодарит С. А. Христиановича за руководство и постоянное внимание, а также В. И. Кожевникова, который выполнил программирование и расчеты на электронной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scorer R. S. Experiments on convection of isolated masses of bouyant fluid. *J. Fluid. Mech.*, 1957, vol. 2, part 6, p. 583—594.
2. Dietz L. Atomic energy in the coming era. New York, 1945.
3. Teller E., Latter A. L. Our nuclear future. New York, 1958.
4. Атомная энергия. Краткая энциклопедия (отв. ред. Емельянов В. С.). Изд. БСЭ, 1958.
5. Сводка ракетных данных о строении высоких слоев атмосферы на январь 1952 г. *Успехи физ. наук*, 1953, т. 50, № 1.
6. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. Изд. иностр. лит., 1954.
7. D y s o n F. W. The Potential of an Anchor Ring. *Phylos. Trans., Roy. Soc., A*, 1892, vol. 184, p. 43—96.
8. Х р г и а н А. X. Физика атмосферы. Гостехиздат, 1953.
9. В у л и с Л. А., Т е р е х и н а Н. А. Распространение турбулентной струи газа в среде иной плотности. *Ж. техн. физ.*, 1956, т. 26, № 6.
10. Е р ш и н Ш. А., С а к и п о в З. Б. Исследование начального участка турбулентной струи сжимаемого газа. *Ж. техн. физ.*, 1959, т. 29, № 1.
11. Thom A. Air torque on a cylinder rotating in an air stream. *Aeronaut. Res. Committle. R. and M.*, 1933, No. 1520.
12. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, тт. 1, 2 (под ред. С. Гольдштейна). Изд. иностр. лит., 1948.
13. А б р а м о в и ч Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Госэнергоиздат, 1948.
14. О х о ц и м с к и й Д. Е., К о н д р а ш о в а И. Я., В л а с о в а Э. П., К а з а к о в а Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. *Тр. Матем. ин-та АН СССР*, 1957, т. 50.
15. The Effects of Atomic Weapons. New York, 1950.
16. Л е й п у н с к и й О. И. Гамма-излучение атомного взрыва. Атомиздат, 1959.
17. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
18. О б у х о в А. М., М о н и н А. С. Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей. *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.*, 1958, № 11.
19. S u t t o n O. G. The Atom bomb as an experiment in convection. *Weather*, 1947, No. 4.
20. M a c h t a L. Eintrainment and the Maximum Height of an Atomic Cloud. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 1950, vol. 31, No. 6, 215—216.
21. S u t t o n O. G. Note on Eintrainment and the Maximum Height of an Atomic Cloud by Lester Machta. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 1950, vol. 31, No. 6, p. 217—218.
22. У э к с л е р Х., М э ч т а Л., П э к Д. X., У а й т Ф. Д. Атомная энергия и метеорология. Сб. «Дозиметрия ионизирующих излучений», Гостехиздат, 1956.
23. Метеорология и атомная энергия, Изд. иностр. лит., 1959.
24. M o r t o n V. R., T a y l o r G. J., T u r n e r Y. S. Turbulent gravitational Convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc., A*, 1956, vol. 234, No. 1196, p. 1—23.
25. K e l l o g g W. W., R a p p R. R., G r e e n f i e l d S. M. J. *Meteorol.*, 1957, vol. 14, No. 1 (русск. перев. Келлог У., Раш Р., Гринфилд С. Ближнее выпадение продуктов атомного взрыва, приложение в книге [23]).
26. The Effects of Nuclear Weapons. Washington, 1957 (русск. перев. Действие ядерного оружия. Оборонгиз, 1960).
27. Л э п п Р. Атомы и люди. Изд. иностр. лит., 1959.