УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СИЛЬНОГО ИЗГИБА ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ ЖЕСТКИМИ МАТРИЦАМИ

И. О. Богульский

(*Красноярск*)

В работе [1] отмечено, что элементарная теория изгиба, основанная на гипотезе Кирхгофа — Лява, не применима для решения ряда контактных задач. Можно построить вариант теории изгиба, более общий по сравнению с элементарной теорией, позволяющий корректно формулировать плоскую контактную задачу теории упругости. Задача, рассматриваемая в работе, допускает «произвольные» повороты, но в случае, когда задано искривление одной из поверхностей, остается линейной.

1. Пусть.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1,\ \mathbf{r}_* = \mathbf{r} + \mathbf{W},$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_*$ — радиусы-векторы точек нижней поверхности слоя до и после деформации соответственно (фиг. 1); $\mathbf{W} = u_*(x)\mathbf{e}_1 + v_*(x)\mathbf{e}_2$ — вектор смещений; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — единичные орты вдоль координатных осей. Определим $\varepsilon_1(x)$ (деформацию нижней поверхности) следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{*,1}^2 - \mathbf{r}_{,1}^2\right) = u_{*,1} + \frac{1}{2}u_{*,1}^2 + \frac{1}{2}v_{*,1}^2$$

(здесь и в дальнейшем индекс внизу после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате).

Пусть $\theta(x)$ — угол между касательной к деформированной нижней поверхности и $\mathbf{e}_1$ (см. фиг. 1), тогда

$$\operatorname{tg}\theta = v_{*,1}/(1 + u_{*,1}).$$

Обозначим через $\mathbf{e}_{1*}$, $\mathbf{e}_{2*}$ единичные векторы касательной и нормали к деформированной нижней поверхности. Тогда $\mathbf{e}_{1*} = \cos\theta\cdot\mathbf{e}_1 + \sin\theta\cdot\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{2*} = -\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1 + \cos\theta\cdot\mathbf{e}_2$. Заметим, что $\mathbf{e}_{1*,1} = \theta_{,1}\mathbf{e}_{2*}$, $\mathbf{e}_{2*,1} = -\theta_{,1}\mathbf{e}_{1*}$. Пусть при деформации слоя точка M, определяемая по деформации радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, перейдет в точку M' (см. фиг. 1), определяемую радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho}_* = \mathbf{r} + \mathbf{W} + (y + v)\mathbf{e}_{2*} + u\mathbf{e}_{1*}, \tag{1.1}$$

где $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$; $u(x, 0) \equiv 0$; $v(x, 0) \equiv 0$.

Так как в случае $u(x, y) \equiv 0$, $v(x, y) \equiv 0$ выполнена гипотеза Кирхгофа — Лява, будем называть u и v дополнительными смещениями внутри слоя.

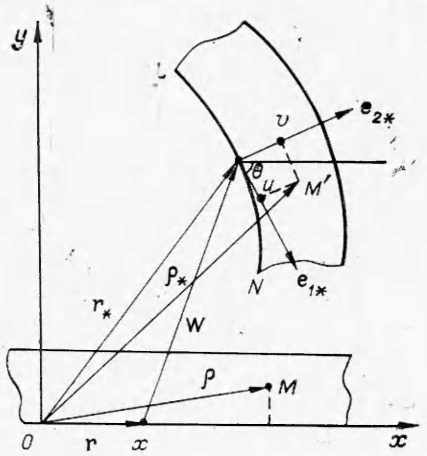
Предположим, что задача допускает «произвольные» повороты, но удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, а толщина слоя много меньше радиуса кривизны, т. е.

$$h\theta_{,1} \sim \varepsilon,\ \text{где } 1 + \varepsilon \approx 1, \tag{1.2}$$

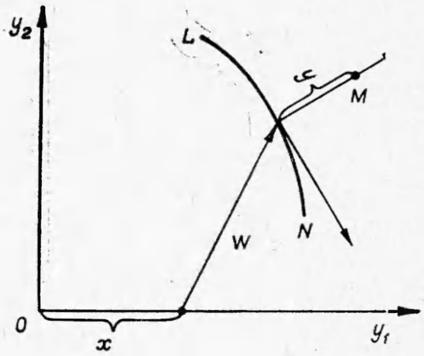
$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon,\quad \text{где } 1+\varepsilon\approx 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y} \sim \varepsilon,\quad \text{где } 1 + \varepsilon \approx 1.$$

Обозначим через ε_1^y, ε_2^y, ε_{12}^y деформации окрестности частицы.



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда

$$\varepsilon_1^y = \frac{1}{2}\left(\rho_{*,1}^2 - \rho_{,1}^2\right), \quad \varepsilon_2^y = \frac{1}{2}\left(\rho_{*,2}^2 - \rho_{,2}^2\right), \quad \varepsilon_{12}^y = \frac{1}{2}\rho_{*,1}\rho_{*,2}. \tag{1.3}$$

Используя (1.1)—(1.3), получим

$$\varepsilon_1^y = \varepsilon_1 - y\theta_{,1} + \frac{\partial u}{\partial x} - v\theta_{,1}, \quad \varepsilon_2^y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12}^y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u\theta_{,1}\right). \tag{1.4}$$

2. Пусть (y_1, y_2) — декартова система координат, (x_1, x_2) — ортогональная криволинейная система координат. Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

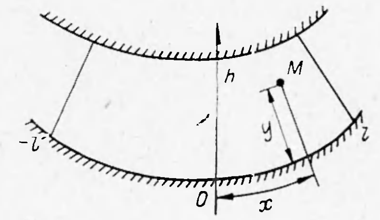
$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,P^{\alpha\beta})}{\partial x^\alpha} + \sqrt{g}\,P^{\sigma\alpha}\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta, \sigma = 1, 2),$$

где $\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\omega\alpha}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\omega}\right)$ — символы Кристоффеля второго рода; $g_{\alpha\beta} = Э_\alpha \cdot Э_\beta$ — компоненты метрического тензора, $Э_\alpha = (\partial y^\beta/\partial x^\alpha)e_\beta$ ($\beta = 1$; 2). Рассмотрим криволинейные координаты (x, y), связанные с искривленной нижней поверхностью слоя (фиг. 2). За координату x точки M примем декартову координату той точки, которая при деформации перейдет в основание перпендикуляра, опущенного из M на кривую LN. Координата y — расстояние от точки M до кривой LN. Тогда $g_{11} = (\sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - y\theta_{,1})^2$, $g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$. Перейдя к физическим компонентам тензора напряжений $P^{\alpha\beta} = P_*^{\alpha\beta}\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}$ и обозначив $\sigma_1 = P_*^{11}$, $\sigma_2 = P_*^{22}$, $\tau_{12} = P_*^{12}$, получим, используя (1.2),

$$\partial\sigma_1/\partial x + \partial\tau_{12}/\partial y - 2\theta_{,1}\tau_{12} = 0, \quad \partial\tau_{12}/\partial x + \partial\sigma_2/\partial y - \theta_{,1}(\sigma_2 - \sigma_1) = 0. \tag{2.1}$$

Уравнения, аналогичные (1.4), (2.1), получены в [2] при описании пограничного слоя.

3. Пусть упругое тело занимает объем криволинейного прямоугольника $\Omega = \{x, y | y \in [0, h], x \in [-l, l]\}$ (фиг. 3) и находится в состоянии плоской деформации. Пусть задано искривление нижней поверхности, т. е. функция $\theta_{,1}(x)$ известна. Задача состоит в отыскании функций σ_1, σ_2, τ_{12}, ε_1^y, ε_2^y, ε_{12}^y, ε_1, u, v, удовлетворяющих уравнениям (1.4), (2.1), за-



Фиг. 3

кону Гука

$$\sigma_1 = \alpha\varepsilon_1^y + \beta\varepsilon_2^y, \quad \sigma_2 = \beta\varepsilon_1^y + \alpha\varepsilon_2^y, \quad \tau_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}^y \tag{3.1}$$

при $\alpha = \lambda + 2\mu$, $\beta = \lambda$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ внутри области Ω и следующим соотношениям на границе области:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \ \tau_{12}|_{y=0} = \tau_-, \tag{3.2}$$

$$v|_{y=h} = v_+ \text{ либо } \sigma_2|_{y=h} = \sigma_{2+}, \ \tau_{12}|_{y=h} = \tau_+ \text{ либо } u|_{y=h} = u_+;$$

$$\sigma_1|_{x=\pm l} = \sigma_{*\pm}, \ \tau_{12}|_{x=\pm l} = \tau_{*\pm}. \tag{3.3}$$

Специфика задачи заключается в том что хотя использование уравнений (1.4), (2.1) допускает произвольные повороты, но, так как функция $\theta,_1(x)$ задана, задача становится линейной. Ввиду того, что система координат, связанная с нижней поверхностью, неизвестным образом деформирована (в уравнения входит неизвестная функция ε_1 — деформация нижней поверхности, в общем случае нелинейная функция смещений этой поверхности), на поверхности $y=0$ необходимо ставить дополнительное в отличие от обычной задачи теории упругости условие: $u|_{y=0} = 0$.

4. Предположим, что решение задачи существует. Умножая (2.1) на u и v соответственно, складывая и интегрируя по Ω, получаем

$$\int_0^h (\sigma_1 u + \tau_{12} v)|_{-l}^{l}\, dy + \int_{-l}^{l} (\tau_{12} u + \sigma_2 v)|_0^h\, dx = \tag{4.1}$$

$$= \int_\Omega \left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (\varepsilon_1 - y\theta,_1)\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] d\Omega.$$

Проинтегрировав первое из уравнений (2.1) по y от 0 до h и использовав граничное условие (3.3), получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}h\theta,_1 - \frac{1}{\alpha h}\int_0^h \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy. \tag{4.2}$$

Из (4.1), (4.2) получаем

$$\int_0^h (\sigma_1 u + \tau_{12} v)|_{-l}^{l}\, dy + \int_{-l}^{l} (\tau_{12} u + \sigma_2 v)|_0^h\, dx = \tag{4.3}$$

$$= \int_\Omega \left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right] d\Omega + \int_\Omega \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{h}{2} - y\right)\theta,_1 \times$$

$$\times\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega - \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{\alpha h}\left(\int_0^h \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy\right)^2\right] dx.$$

Отметим, что

$$(4.4)\qquad \int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{\alpha h}\left(\int_{0}^{h}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right)^2\right]dx \leqslant \int_{\Omega}\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\beta^2}{\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega.$$

Таким образом, выполнено энергетическое тождество, откуда можно показать единственность решения задачи. Действительно, пусть существует два решения задачи. Обозначим разность этих решений соответствующей буквой. Учитывая, что решения совпадают на границе области, из (4.3) получим

$$(4.5)\qquad \int_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\Omega+\int_{-l}^{l}\left\{\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dy-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha h}\left(\int_{0}^{h}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right)^2\right\}dx=0.$$

Ввиду (4.4) второе слагаемое в (4.5) неотрицательно, и, следовательно,

$$(4.6)\qquad 0=\int_{-l}^{l}\left\{\int_{0}^{h}\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dy-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha h}\left(\int_{0}^{h}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right)^2\right\}dx \geqslant \int_{\Omega}\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 d\Omega;$$

$$(4.7)\qquad \partial u/\partial y+\partial v/\partial x\equiv 0.$$

Так как $(\alpha^2-\beta^2)/\alpha>0$,

$$(4.8)\qquad \partial v/\partial y\equiv 0.$$

Подставляя (4.8) в (4.6), получим ($y=hz$)

$$(4.9)\qquad \int_{-l}^{l}\left[\int_{0}^{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy-\frac{1}{h}\left(\int_{0}^{h}\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)^2\right]dx=0.$$

Представим $\partial u/\partial x$ в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра, ортогональным на $[0,1]$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=0}^{\infty}c_i(x)P_i(z).$$

Из (4.9) получаем $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i+1}c_i^2=0$, следовательно, $c_i\equiv 0,\ \forall i=1,\ldots$ Таким образом, $\partial u/\partial x=e_0=\mathrm{const}$, но из (3.2) $\partial u/\partial x|_{y=0}=0$, следовательно, $\partial u/\partial x\equiv 0$. Вместе с (4.7), (4.8) это показывает единственность решения задачи.

5. Предлагается решать задачу методом, описанным в [3], использующим разложение неизвестных функций в ряды по полиномам Лежандра. Первое приближение следующее:

$$u=u_0P_0+u_1P_1+u_2P_2+u_3P_3,$$
$$v=v_0P_0+v_1P_1+v_2P_2,$$

$$\sigma_1 = d_0P_0 + d_1P_1,\ \sigma_2 = q_0\ P_0 + q_1P_1,\ \tau_{12} = s_0P_0 + s_1P_1 + s_2P_2,$$

где $P_i(z)$ — полиномы Лежандра, ортогональные на $[0,1]$,

$$P_i(z) = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dz^i}[z^i(z-1)^i], \qquad z = y/h.$$

Выполнены уравнения

$$\int_0^1\left(\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x} + \frac{1}{h}\frac{\partial\sigma_2}{\partial z}\right)P_0dz = 0, \quad \int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{1}{h}\frac{\partial\tau_{12}}{\partial z}\right)P_kdz = 0 \qquad (k = 0;\ 1),$$

$$\int_0^1(\sigma_1 - \alpha\varepsilon_1^y - \beta\varepsilon_2^y)P_kdz = 0, \quad \int_0^1(\sigma_2 - \beta\varepsilon_1^y - \alpha\varepsilon_2^y)P_kdz = 0,$$

$$\int_0^1(\tau_{12} - 2\mu\varepsilon_{12}^y)P_kdz = 0 \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Деформации ε_1^y, ε_2^y, ε_{12}^y берутся в виде

$$\varepsilon_1^y = \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}h\theta_{,1}\right)P_0 - \frac{1}{2}h\theta_{,1}P_1 + \frac{\partial}{\partial x}(u_0P_0 + u_1P_1),$$

$$\varepsilon_2^y = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(v_0P_0 + v_1P_1 + v_2P_2),$$

$$2\varepsilon_{12}^y = \frac{\partial}{\partial z}(v_0p_0) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(u_0P_0 + u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3).$$

Граничные условия на поверхностях $y = 0$, $y = h$ дают следующие уравнения:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 = 0,\ v_0 - v_1 + v_2 = 0,\ s_0 - s_1 + s_2 = \tau_-,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 = v_+ \text{ либо } q_0 + q_1 = \sigma_{2+},$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = \overset{*}{\tau}_{12+} \text{ либо } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = u_+.$$

Таким образом, задача (1.4), (2.1), (3.1), (3.3) сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями:

$$d_0|_{x=\pm l} = d_{0\pm},\ d_1|_{x=\pm l} = d_{1\pm},\ s_0|_{x=\pm l} = s_{0\pm}.$$

6. В качестве примера рассмотрим задачу о сжатии упругого слоя жесткими круговыми цилиндрическими матрицами. Пусть слой длиной $2l$ и толщиной h сжимается матрицами постоянной кривизны $\theta_{,1}(x) = \varkappa =$ $=$ const. Предположим, что осуществляется контакт и нижней и верхней поверхностей слоя с матрицами. Ввиду симметрии задачи относительно $x = 0$ ищем решение ее в области

$$\Omega = \{x,\ y|x \in [0,\ l],\ y \in [0,\ h]\}.$$

Потребуем, чтобы на границе Ω неизвестные функции принимали следующие значения:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = \tau_{12}|_{y=0} = 0,\ \tau_{12}|_{y=h} = 0,\ v|_{y=h} = k_1h,$$

где $k_1 =$ const, $k_1 < 0$,

$$\sigma_1|_{x=l} = \tau_{12}|_{x=l} = u|_{x=0} = \partial v/\partial x|_{x=0} = 0.$$

Не нарушая общности, считаем, что $\nu = 0{,}25$ или, что то же самое, $\lambda = \mu$.

Применение вышеописанной процедуры разложения по полиномам Лежандра сводит задачу к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

(6.1)
$$d_{0,11} = 0,$$
$$6u_{1,11} - 11\frac{2}{h}v_{0,1} - 5\frac{4}{h^2}u_1 = 0,$$
$$\frac{5}{6}v_{0,11} + \frac{11\cdot 2}{6h}u_{1,1} - 9\frac{4}{h^2}v_0 = \varkappa - \frac{18k_1}{h}$$

(остальные неизвестные функции однозначно выражаются через d_0, u_1, v_0) с пятью краевыми условиями

(6.2)
$$u_1|_{x=0} = v_0|_{x=0} = 0, \quad d_0|_{x=l} = 0,$$
$$\left(\frac{2}{h}u_1 + v_{0,1}\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad \left(u_{1,1} - \frac{2}{h}v_0\right)\Big|_{x=l} = \frac{\varkappa h}{2} - k_1.$$

Подставляя решение (6.1), найденное с точностью до неопределенных коэффициентов в (6.2), находим

(6.3)
$$\sigma_2|_{y=h} = \mu\frac{\varkappa h}{2}\left[-\frac{8}{3}k_* + \frac{8}{3(q_3 - q_4)}\left(q_3 e^{\frac{2q_3(x-l)}{h}} - q_4 e^{\frac{2q_4(x-l)}{h}}\right)\right];$$

(6.4)
$$\sigma_2|_{y=0} = \mu\frac{\varkappa h}{2}\left[-\frac{8}{3}k_* - \frac{8}{3(q_3 - q_4)}\left(q_3 e^{\frac{2q_3(x-l)}{h}} - q_4 e^{\frac{2q_4(x-l)}{h}}\right)\right],$$

где $k_* = -(2/\varkappa h)k$.

Графически напряжения $\sigma_2|_{y=0}$, $\sigma_2|_{y=h}$ представлены на фиг. 4. Точка x_{**} на фиг. 4 отвечает максимальному сжимающему напряжению на поверхности $y = h$ и минимальному при $y = 0$ $(l - x_{**})/l = h/l\cdot\ln(q_3/q_4)/(q_3 - q_4)$, т. е. x_{**} приближается к l при росте отношения длины l к толщине h.

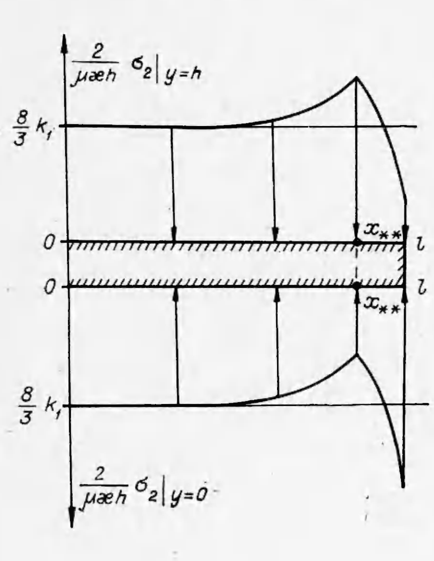
Из постановки задачи ясно, что напряжения $\sigma_2|_{y=0}$, $\sigma_2|_{y=h}$ должны быть сжимающими на всей поверхности, т. е.

(6.5)
$$\sigma_2|_{y=0} \leqslant 0, \quad \sigma_2|_{y=h} \leqslant 0.$$

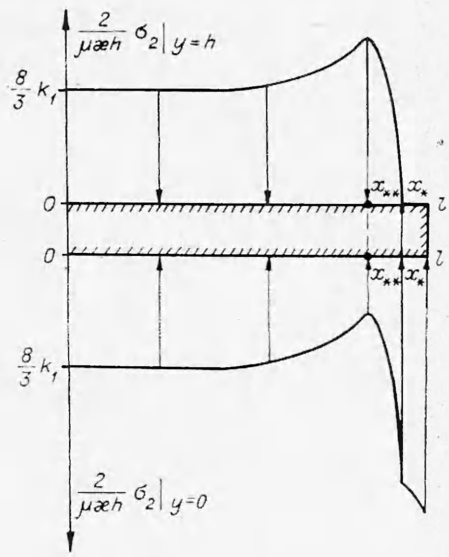
Если же на некоторой части поверхности одно из условий (6.5) нарушается (происходит «отход» соответствующей части поверхности от жесткой матрицы), граничные условия следует формулировать в ином виде, а именно, считать соответствующий участок поверхности свободным от напряжений. В этом случае необходимо удовлетворять условию, что упругий слой «не заходит в матрицу», т. е.

(6.6)
$$v|_{y=0} \geqslant 0, \quad v|_{y=h} \leqslant k_1 h.$$

В [1] показано, что условия (6.5), (6.6) позволяют однозначно получить решение контактной задачи с неизвестной зоной контакта. Из (6.3), (6.4) видно, что условие (6.5) выполнено для $-k_1 \geqslant \varkappa h/2$. Заметим, что при $-k_1 < \varkappa h/2$ условие (6.5) нарушается на поверхности $y = h$ в близкой к концу слоя области, а это значит, что при $-k_1 < \varkappa h/2$ концы этой поверхности отходят от матрицы. Поэтому сформулируем задачу следующим образом.



Фиг. 4



Фиг. 5

Пусть в области $\Omega_{\rm I} = \{x, y|x \in [0, x_*], y \in [0, h]\}$ неизвестные функции удовлетворяют уравнениям (1.4), (2.1), (3.1) и на поверхностях $y = 0$, $y = h$, $x = 0$ принимают значения

$$u^{\rm I}|_{y=0} = v^{\rm I}|_{y=0} = \tau_{12}^{\rm I}|_{y=0} = 0, \quad \tau_{12}^{\rm I}|_{y=h} = 0, \; v^{\rm I}|_{y=h} = k_1 h,$$
$$u^{\rm I}|_{x=0} = \partial v^{\rm I}/\partial x|_{x=0} = 0,$$

а в области $\Omega_{\rm II} = \{x, y|x \in [x_*, l], y \in [0, h]\}$ удовлетворяют тем же уравнениям и соотношениям на поверхностях $y = 0$, $y = h$, $x = l$:

$$u^{\rm II}|_{y=0} = v^{\rm II}|_{y=0} = \tau_{12}^{\rm II}|_{y=0}| = \tau_{12}^{\rm II}|_{y=h} = \sigma_2^{\rm II}|_{y=h} = 0,$$
$$\sigma_1^{\rm II}|_{x=l} = \tau_{12}^{\rm II}|_{x=l} = 0.$$

Кроме того, выполнены условия сопряжения при $x = x_*$

$$u^{\rm I} = u^{\rm II}, \; v^{\rm I} = v^{\rm II}, \; \sigma_1^{\rm I} = \sigma_1^{\rm II}, \; \tau_{12}^{\rm I} = \tau_{12}^{\rm II}.$$

Применяя процедуру разложения функций по полиномам Лежандра, сводим задачу к краевой задаче для двух систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами пятого порядка каждая

(6.7)
$$d_{0,1}^{\rm I} = 0,$$
$$6u_{1,11}^{\rm I} - 11\frac{2}{h}v_{0,1}^{\rm I} - 5\frac{4}{h^2}u_1^{\rm I} = 0,$$
$$\frac{5}{6}v_{0,11}^{\rm I} + \frac{11}{6}\frac{2}{h}u_{1,1}^{\rm I} - 9\frac{4}{h^2}v_0^{\rm I} = \varkappa - \frac{18k_1}{h};$$

(6.8)
$$d_{0,1}^{\rm II} = 0,$$
$$192\,u_{1,11}^{\rm II} - 223\,v_{0,1}^{\rm II}\frac{2}{h} - 175\frac{4}{h^2}u_1^{\rm II} = 0,$$
$$175\,v_{0,11}^{\rm II} + 223\,u_{1,1}^{\rm II}\frac{2}{h} - 432\frac{4}{h^2}v_0^{\rm II} = \frac{\varkappa h}{2},$$

с пятью краевыми условиями

$$u_1^{\mathrm{I}}\big|_{x=0} = v_{0,1}^{\mathrm{I}}\big|_{x=0} = 0, \quad d_0^{\mathrm{II}}\big|_{x=l} = 0,$$

$$\left(\frac{2}{h} u_1^{\mathrm{II}} + v_{0,1}^{\mathrm{II}}\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad \left(4u_{1,1}^{\mathrm{II}} - \frac{2}{h} v_0^{\mathrm{II}}\right)\Big|_{x=l} = 4\frac{\varkappa h}{2}$$

и пятью условиями сопряжения при $x = x_*$

$$d_0^{\mathrm{I}} = d_0^{\mathrm{II}},\ u_1^{\mathrm{I}} = u_1^{\mathrm{II}},\ v_0^{\mathrm{I}} = v_0^{\mathrm{II}},$$

$$d_1^{\mathrm{I}} = d_1^{\mathrm{II}},\ s_0^{\mathrm{I}} = s_0^{\mathrm{II}}.$$

Вид решения системы (6.7) известен, а корни характеристического многочлена для системы (6.8) равны $\lambda_{1,2} = \pm(q_{*5} + iq_{*6})$, $\lambda_{3,4} = \pm(q_{*5} - iq_{*6})$, $q_{*5} = \sqrt{49/40}$, $q_{*6} = \sqrt{11/40}$, $q_{*3,4} = 2(19 \pm 2\sqrt{34})/5$. Условия (6.5), (6.6) однозначно определяют неизвестную границу контакта x_*. В выборе l/h есть определенный произвол, например, можно считать $x_*/h = \pi + 2\pi n$. В этом случае

$$\frac{l - x_*}{x_*} = \frac{q_{*6}}{\pi(q_{*3} + q_{*4})}\frac{(1 - k_*)}{k_*}.$$

Напряжения $\sigma_2|_{y=0}$ и $\sigma_2|_{y=h}$ представлены на фиг. 5. В результате решения получается, что напряжение $\sigma_2^{\mathrm{II}}|_{y=0}$ пропорционально $v^{\mathrm{II}}|_{y=h}$ и будет отрицательным, если выполнено неравенство (6.6). В области Ω_{I}

$$\sigma_2\Big|_{\substack{y=0\\y=h}} = \mu\frac{\varkappa h}{2}\left[-\frac{8}{3}k_* \mp \frac{1}{11}\left(\frac{45 - 43q_{*3}^2}{q_{*3}}c_1 e^{\frac{2q_{*3}(x-x_*)}{h}} + \frac{45 - 43q_{*4}^2}{q_{*4}}c_2 e^{\frac{2q_{*4}(x-x_*)}{h}}\right)\right],$$

$$c_1 = -\frac{(q_{*4}^2 + 1)}{3q_{*4}(q_{*3}^2 - q_{*4}^2)}\left[4k_*(3 + q_{*4}^2) - (1 - k_*)(9k_* - q_{*4}^2)\right],$$

$$c_2 = \frac{(q_{*3}^2 + 1)}{3q_{*3}(q_{*3}^2 - q_{*4}^2)}\left[4k_*(3 + q_{*3}^2) - (1 - k_*)(9k_* - q_{*3}^2)\right].$$

На фиг. 5 x_{**} — точка наибольшего и наименьшего сжимающего напряжения на поверхностях $y = h$ и $y = 0$ соответственно. Из равенства

$$(x_* - x_{**})/x_* = (h/x_*)A$$

(A — постоянная, выражающаяся через q_3, q_4), определяющего точку x_{**}, следует, что x_{**} приближается к x_* при росте отношения x_*/h и, следовательно, l/h. Неравенство (6.5) выполнено при $k_* \geqslant 0{,}14$. При $k_* \approx 0{,}14$ «зона отхода» $(l - x_*)/l$ будет максимальной и составляет $\approx \frac{1}{(1+2n)}\cdot 20\%$.

Автор выражает благодарность Г. В. Иванову за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

Поступила 20 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя.— Динамика твердого тела. Вып. 25. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР.
2. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М., «Высш. школа», 1969.
3. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра.— ПМТФ, 1976, № 6.