УДК 532.5:529.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
Сибирский федеральный университет, 660036 Красноярск, Россия
E-mail: andr@icm.krasn.ru

С учетом адиабатического распределения давления газа во внутренней полости исследовано нестационарное движение сферического слоя идеальной жидкости. Установлено существование нелинейных колебаний слоя и найден их период. Показано, что имеется единственное равновесное состояние слоя. С учетом действия капиллярных сил на поверхностях слоя в линейном приближении получены амплитудные уравнения и на их основе изучена устойчивость нелинейных колебаний слоя. Рассмотрены предельные случаи: сферический пузырек и мыльная пленка.

Ключевые слова: идеальная жидкость, поверхность раздела, нелинейные колебания, малые возмущения, устойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20190211

1. Основное движение и его анализ. Радиальное движение идеальной несжимаемой жидкости в сферических координатах (r, θ, φ) описывается формулами [1]

$$u = \frac{\Phi(t)}{r^2}, \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\Phi'(t)}{r} - \frac{\Phi^2(t)}{2r^4} + f(t), \tag{1.1}$$

где $\rho > 0$ — плотность жидкости; $\Phi(t)$, $f(t)$ — произвольные функции времени; штрих означает дифференцирование по t.

Решение (1.1) используем для описания динамики сферически-симметричного слоя идеальной жидкости со свободными границами. Пусть $r_1(t)$, $r_2(t)$ ($r_1(0) = r_{10}$, $r_2(0) = r_{20}$, $r_{10} < r_{20}$) — свободные внутренняя и внешняя границы слоя, $p_\infty(t)$ — давление вне жидкого слоя, $p_1(t)$ — давление в газовой полости $0 \leqslant r \leqslant r_1(t)$. Из динамического условия на свободных границах слоя получаем

$$\Phi'\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big) + \frac{\Phi^2}{2}\Big(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4}\Big) + \frac{2}{\rho}\Big(\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}\Big) = \frac{1}{\rho}\,[p_1(t) - p_\infty(t)], \tag{1.2}$$

где $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$ — постоянные коэффициенты поверхностного натяжения.

Из кинематических условий на свободных границах слоя

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\Phi(t)}{r_1^2}, \qquad \frac{dr_2}{dt} = \frac{\Phi(t)}{r_2^2} \tag{1.3}$$

можно получить интеграл, представляющий собой закон сохранения объема слоя:

$$r_2^3(t) - r_1^3(t) = r_{20}^3 - r_{10}^3. \tag{1.4}$$

В случае если $p_1(t)$, $p_\infty(t)$ заданы, $\Phi(0) = \Phi_0$, $r_1(0) = r_{10}$, $r_2(0) = r_{20}$, движение сферического слоя полностью определяется решением задачи Коши для системы уравнений (1.2), (1.3). Однако порядок этой системы можно понизить, используя интеграл (1.4).

В работе [2] при $p_1(t) = 0$, $p_\infty(t) = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ найдены приближенные выражения для $r_{1,2}(t)$, $\Phi(t)$ в случае тонкого слоя, когда $(r_{20}^3 - r_{10}^3)/r_{10}^3 \ll 1$, и толстого слоя, когда имеет место обратное неравенство. Также в [2] выполнен анализ устойчивости этого движения. Пример построения точного решения уравнений гидродинамики с помощью метода лагранжевых координат в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ приведен в [3]. Схлопывание сферического слоя под действием только капиллярных сил при $\sigma_1 = \sigma_2 \ne 0$, $p_1(t) = 0$, $p_\infty(t) = 0$ изучено в работе [4]. Эволюция сферического слоя и малых возмущений его свободных границ при $\sigma_1 \ne 0$, $\sigma_2 \ne 0$, $p_1(t) = 0$, $p_\infty(t) = 0$ исследована в [5]. Обзор работ, в которых решение (1.1) используется для исследования различных задач движения и устойчивости сферических слоев, пузырей, приведен в [6].

Будем полагать, что давление внутри полости распределено в соответствии с адиабатическим законом

$$p_1 = p_0(V_0/V(t))^\gamma,$$

где $p_0 = \text{const} > 0$; $\gamma > 1$ — показатель адиабаты; $V_0 = 4\pi r_{10}^3/3$, $V(t) = 4\pi r_1^3(t)/3$ — начальный и текущий объемы полости.

Введем безразмерные переменные $y(\tau) = r_1/r_{10}$, $\tau = t/t_0$ (t_0 — характерное время) и параметры (здесь и далее $p_\infty = \text{const} \geqslant 0$)

$$\varepsilon = \Big(\frac{r_{20}}{r_{10}}\Big)^3 - 1, \qquad \mathrm{We}_j = \frac{\sigma_j t_0^2}{\rho r_{10}^3}, \qquad a = \frac{p_0 t_0^2}{\rho r_{10}^2}, \qquad b = \frac{p_\infty t_0^2}{\rho r_{10}^2}. \tag{1.5}$$

Параметры $\varepsilon > 0$, $a \geqslant 0$ характеризуют начальную толщину слоя и начальное внутреннее давление, параметр $b \geqslant 0$ — внешнее давление; $\mathrm{We}_j \geqslant 0$ — числа Вебера.

Исключая функцию $\Phi(t)$ из первого равенства (1.3) и уравнения (1.2), получаем нелинейное уравнение второго порядка для определения безразмерного внутреннего радиуса слоя y:

$$y\Big(1 - \frac{y}{(\varepsilon + y^3)^{1/3}}\Big)y'' + \Big(\frac{3}{2} - \frac{2y}{(\varepsilon + y^3)^{1/3}} + \frac{y^4}{2(\varepsilon + y^3)^{4/3}}\Big)y'^2 + \\ + \frac{2\,\mathrm{We}_1}{y} + \frac{2\,\mathrm{We}_2}{(\varepsilon + y^3)^{1/3}} - \frac{a}{y^{3\gamma}} + b = 0 \tag{1.6}$$

с начальными данными

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = y_0 \equiv \Phi_0 t_0/r_{10}^3. \tag{1.7}$$

Таким образом, движение сферического слоя определяется шестью безразмерными параметрами: ε, We_1, We_2, a, b, y_0. Умножая уравнение (1.6) на $2y^2y'$, находим его первый интеграл (закон сохранения энергии):

$$y'^2 = \frac{C - f(y)}{y^3(1 - y/(\varepsilon + y^3)^{1/3})}; \tag{1.8}$$

$$f(y) = \frac{2}{3}\Big(by^3 + \frac{a}{\gamma - 1}\, y^{3(1-\gamma)}\Big) + 2\,\mathrm{We}_1\, y^2 + 2\,\mathrm{We}_2(\varepsilon + y^3)^{2/3}. \tag{1.9}$$

Постоянная C зависит от начальных данных (1.7):

$$C = \Big(1 - \frac{1}{(\varepsilon+1)^{1/3}}\Big)y_0^2 + 2\,\mathrm{We}_1 + 2\,\mathrm{We}_2(\varepsilon+1)^{2/3} + \frac{2}{3}\Big(\frac{a}{\gamma-1} + b\Big) > 0.$$

Заметим, что решение является ограниченным, например, $y \leqslant \sqrt{C/(2\,\mathrm{We}_1)}$ при $\sigma_1 \neq 0$. Очевидно, что $f(y) \to +\infty$ при $y \to 0$ и $y \to \infty$, $f''(y) > 0$, т. е. функция $f(y)$ из (1.9) является выпуклой вниз. Физический смысл имеют значения y, для которых $0 < f(y) < C$. Следовательно, существуют $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, такие что $f(y_1) = f(y_2) = C$, причем $y_1 < y < y_2$ и слой жидкости периодически колеблется, внутренний радиус $r_1 = r_{10}y$ меняется между двумя граничными значениями $r_{1\,\min} = r_{10}y_1 \leqslant r_1 \leqslant r_{1\,\max} = r_{10}y_2$. Внешний радиус изменяется следующим образом: $r_{2\,\min} = r_{10}(y_1^3+\varepsilon)^{1/3} \leqslant r_2 \leqslant r_{2\,\max} = r_{10}(y_2^3+\varepsilon)^{1/3}$. Безразмерный период автоколебаний равен

$$\tau_* = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{y^3(1 - y(\varepsilon + y^3)^{-1/3})}{C - f(y)}\,dy,$$

размерный равен $T = t_0\tau_*$.

Замечание 1. При $\varepsilon \to \infty$ ($r_{20} \to \infty$) уравнение (1.6) сводится к уравнению колебаний сферического пузыря [1]

$$yy'' + \frac{3}{2}\,y'^2 + \frac{2\,\mathrm{We}_1}{y} - \frac{a}{y^{3\gamma}} + b = 0. \tag{1.10}$$

Период автоколебаний пузыря определяется выражением

$$\tau_* = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{y^3}{C_1 - f_1(y)}\,dy,$$

где

$$f_1(y) = \frac{2}{3}\Big(\frac{a}{(\gamma-1)y^{3(\gamma-1)}} + by^3\Big) + 2\,\mathrm{We}_2\,y^2,$$

$$C_1 = y_0^2 + 2\,\mathrm{We}_2 + \frac{2}{3}\Big(\frac{a}{\gamma-1} + b\Big), \qquad f_1(y_{1,2}) = C_1.$$

В другом предельном случае $r_{20} - r_{10} = h \ll 1$ (мыльный пузырь, пленка), полагая $\sigma_1 = \sigma_2$, из (1.6) получаем

$$y'' + 4\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{e}_1 y - \frac{\tilde{a}}{y^{3\gamma-2}} + \tilde{b}y^2 = 0. \tag{1.11}$$

Период автоколебаний пленки равен

$$\tau_* = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{C_2 - f_2(y)},$$

где

$$f_2(y) = \frac{2}{3}\Big(\frac{\tilde{a}}{(\gamma-1)y^{3(\gamma-1)}} + \tilde{b}y^3\Big) + 4\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{e}_1 y^2,$$

$$C_2 = y_0^2 + 4\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{e}_1 + \frac{2}{3}\Big(\frac{\tilde{a}}{\gamma-1} + \tilde{b}\Big), \qquad f_2(y_{1,2}) = C_2.$$

В (1.11) в выражениях для параметров $\widetilde{\mathrm{We}}_1$, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ плотность ρ из (1.5) заменена на $\tilde{\rho} = \rho h = \mathrm{const}$ при $h \to 0$, а r_{10}^3, r_{10}^2 — на r_{10}^2, r_{10}.

2. Равновесное состояние. В случае равновесного состояния $y' = 0$, $y'' = 0$ и уравнение (1.6) сводится к нелинейному алгебраическому уравнению

$$\frac{a_1}{y^{3\gamma}} - \frac{a_2}{(\varepsilon + y^3)^{1/3}} - \frac{1}{y} = a_3 \tag{2.1}$$

с новыми безразмерными параметрами $a_1 = p_0 r_{10}/(2\sigma_1)$, $a_2 = \sigma_2/\sigma_1$, $a_3 = p_\infty r_{10}/(2\sigma_1)$. Заметим, что в случае отсутствия внутреннего давления ($p_0 = 0$) слой не может находиться в состоянии равновесия. Можно доказать, что уравнение (2.1) имеет единственное решение $y_c < a_1^{1/(3\gamma-1)}$, $y_c \to 0$ при $a_3 \to \infty$. Заметим также, что из уравнения (2.1) следует $y_c > [a_1/(1 + \delta a_1^{1/(3\gamma-1)})]^{1/(3\gamma-1)}$, где $\delta = \varepsilon^{-1/3} a_2 + a_3$.

Замечание 2. Аналогичные утверждения имеют место для состояния равновесия сферического пузыря и мыльной пленки (уравнения (1.10), (1.11)).

3. Уравнения для малых возмущений. Пусть $(U(r,\theta,\varphi,t),\ V(r,\theta,\varphi,t),\ W(r,\theta,\varphi,t))$, $P(r,\theta,\varphi,t)$ — возмущения вектора скорости и давления основного движения (1.1). Тогда внутри слоя $r_1(t) < r < r_2(t)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ эти функции удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйлера

$$\begin{gathered} U_t + uU_r + u_r U = -\frac{1}{\rho} P_r, \qquad V_t + uV_r + \frac{u}{r} V = -\frac{1}{\rho r} P_\theta, \\ W_t + uW_r + \frac{u}{r} W = -\frac{1}{\rho r \sin\theta} P_\varphi, \qquad U_r + \frac{1}{r} V_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} W_\varphi + \frac{2}{r} U + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} V = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Представим возмущения границ слоя в виде $\tilde{r}_1 = r_1(t) + R_1(\theta,\varphi,t)$, $\tilde{r}_2 = r_2(t) + R_2(\theta,\varphi,t)$. Из динамического и кинематического условий на внутренней границе слоя при $r = r_1(t)$ получаем [6]

$$\begin{gathered} P_1(t) - P - p_r R_1 = -\sigma_1 \Big[\frac{2R_1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2}\Big(R_{1\theta\theta} + \operatorname{ctg}\theta R_{1\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} R_{1\varphi\varphi}\Big)\Big], \\ R_{1t} = u_r R_1 + U, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $P_1(t)$ — возмущение давления $p_1(t)$ внутри полости. В линейном приближении

$$P_1(t) = -\frac{3\gamma p_0 r_{10}^{3\gamma}}{4\pi r_1^{3\gamma+1}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} R_1(\theta,\varphi,t)\sin\theta\, d\theta d\varphi. \tag{3.3}$$

На внешней границе слоя при $r = r_2(t)$ должны выполняться условия [6]

$$\begin{gathered} -P - p_r R_2 = \sigma_2 \Big[\frac{2R_2}{r_2^2} + \frac{1}{r_2^2}\Big(R_{2\theta\theta} + \operatorname{ctg}\theta R_{2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} R_{2\varphi\varphi}\Big)\Big], \\ R_{2t} = u_r R_2 + U. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Соотношения (3.2), (3.4) получаются в результате линеаризации динамических и кинематических условий и их переноса на невозмущенные границы слоя.

К уравнениям (3.1)–(3.4) следует добавить начальные условия при $t = 0$

$$\begin{gathered} (U,V,W) = (U_0(r,\theta,\varphi), V_0(r,\theta,\varphi), W_0(r,\theta,\varphi)), \\ R_1 = R_{10}(\theta,\varphi), \quad R_2 = R_{20}(\theta,\varphi), \end{gathered} \tag{3.5}$$

причем функции U_0, V_0, W_0 должны удовлетворять уравнению неразрывности (последнее уравнение системы (3.1)).

4. Амплитудные уравнения. В рассматриваемой задаче об устойчивости сферического слоя идеальной жидкости угловые θ, φ и радиальные r, t переменные можно разделить.

Пусть $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ — сферические функции. При $l \neq 0$ решение задачи (3.1)–(3.5) ищем в виде

$$U = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(r,t)Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

$$\begin{aligned} V &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big(\frac{b_{lm}(r,t)}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} + \frac{c_{lm}(r,t)}{\sqrt{l(l+1)}\,\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\Big),\\ W &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big(\frac{b_{lm}(r,t)}{\sqrt{l(l+1)}\,\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{c_{lm}(r,t)}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\Big), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$(P,R_1,R_2) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\big(d_{lm}(r,t),\alpha_{lm}(t),\beta_{lm}(t)\big)Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Подставляя (4.1) в (3.1) и учитывая свойства сферических функций, получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial a_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\,(ua_{lm}) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial d_{lm}}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial b_{lm}}{\partial t} + \frac{u}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(rb_{lm}) + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\rho r}\,d_{lm} = 0,\\ \frac{\partial c_{lm}}{\partial t} + \frac{u}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(rc_{lm}) = 0, \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 a_{lm}) - \sqrt{l(l+1)}\,b_{lm} = 0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Возмущение внутреннего давления находим по формуле

$$P_1(t) = -\frac{3\gamma\alpha_{00}(t)p_0 r_{10}^{3\gamma}\delta_0^l}{[r_1(t)]^{3\gamma+1}},$$

где δ_0^l — символ Кронекера. Иными словами, $P_1(t)\neq 0$ только в случае радиальных возмущений.

При $r = r_1(t)$ $(l \geqslant 1)$ граничные условия (3.2) имеют вид

$$d_{lm} = -\Big(p_r + \frac{(l-1)(l-2)\sigma_1}{r_1^2}\Big)\alpha_{lm}, \qquad \frac{\partial\alpha_{lm}}{\partial t} = u_r\alpha_{lm} + a_{lm}.$$

На внешней границе при $r = r_2(t)$ из (3.4) получаем

$$d_{lm} = \Big(-p_r + \frac{(l-1)(l-2)\sigma_2}{r_2^2}\Big)\beta_{lm}, \qquad \frac{\partial\beta_{lm}}{\partial t} = u_r\beta_{lm} + a_{lm}. \tag{4.3}$$

При $t = 0$ имеем

$$\begin{gathered} a_{lm}(r,t) = a_{lm}^0(r), \qquad b_{lm}(r,t) = b_{lm}^0(r), \qquad c_{lm}(r,t) = c_{lm}^0(r),\\ \alpha_{lm}(0) = \alpha_{lm}^0, \qquad \beta_{lm}(0) = \beta_{lm}^0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Правые части в (4.3) представляют собой коэффициенты рядов Фурье (4.1) начальных данных (3.5) по системе сферических функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, причем

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 a_{lm}^0) = \sqrt{l(l+1)}\,b_{lm}^0. \tag{4.5}$$

Заметим, что задача для функций $c_{lm}(r,t)$ при фиксированных l, m не зависит от общей задачи и порядок системы амплитудных уравнений понижается.

5. Преобразование амплитудных уравнений. Для произвольной сферической гармоники ($l \geqslant 1$, m фиксированны) положим

$$A = a_{lm}, \quad B = b_{lm}, \quad D = D_{lm}, \quad N_1 = \alpha_{lm}, \quad N_2 = \beta_{lm}. \tag{5.1}$$

Исключая из системы уравнений (4.2) уравнения для c_{lm}, получаем

$$A_t + (uA)_r + \frac{1}{r}\,D_r = 0, \quad H_t + uH_r + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\rho}\,D = 0, \quad (r^2A)_r - \sqrt{l(l+1)}\,H = 0, \tag{5.2}$$

где $H = rB$. Систему (5.2) можно проинтегрировать:

$$\begin{gathered} A = lC_1(t)r^{l-1} - \frac{(l+1)C_2(t)}{r^{l+2}}, \qquad B = \frac{H}{r} = \sqrt{l(l+1)}\Big(C_1(t)r^{l-1} + \frac{C_2(t)}{r^{l+2}}\Big), \\ D = -\rho\Big[C_1'(t)r^l + \frac{C_2'(t)}{r^{l+1}} + \Phi(t)\Big(lC_1(t)r^{l-3} - \frac{(l+1)C_2(t)}{r^{l+4}}\Big)\Big]. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Введем безразмерные переменные $r_1 = r_{10}y$, $t = t_0\tau$, $C_1 = r_{10}^{2-l}\bar{C}_1/t_0$, $C_2 = r_{10}^{l+3}\bar{C}_2/t_0$, $N_1 = r_{10}\bar{N}_1$, $N_2 = r_{10}\bar{N}_2$, $y = y_1$, $y' = y_2$, $\bar{N}_1 = y_3$, $\bar{N}_2 = y_4$, $\bar{C}_1 = y_5$, $\bar{C}_2 = y_6$. Тогда из (1.8), (4.3)–(4.5), (5.1), (5.3) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} y_1' = y_2, \qquad y_2' = F_3, \qquad y_3' = -\frac{2y_2y_3}{y_1} + ly_1^{l-1}y_5 - (l+1)y_1^{-(l+2)}y_6, \\ y_4' = -\frac{2y_1^2y_2y_4}{(\varepsilon + y_1^3)^{2/3}} + l(\varepsilon + y_1^3)^{(l-1)/3}y_5 - (l+1)(\varepsilon + y_1^3)^{-(l+2)/3}y_6, \\ y_5' = \frac{y_1^{l+1}F_1 - (\varepsilon + y_1^3)^{(l+1)/3}F_2}{y_1^{2l+1} - (\varepsilon + y_1^3)^{(2l+1)/3}}, \qquad y_6' = \frac{(\varepsilon + y_1^3)^{(l+1)/3}y_1^{l+1}}{y_1^{2l+1} - (\varepsilon + y_1^3)^{(2l+1)/3}}\,[y_1^lF_2 - (\varepsilon + y_1^3)^{l/3}F_1], \end{gathered} \tag{5.4}$$

где

$$\begin{gathered} F_1 = -ly_1^{l-1}y_2y_5 + (l+1)y_1^{-(l+2)}y_2y_6 - \Big(F_3 - \frac{(l-1)(l+2)\,\mathrm{We}_1}{y_1^2}\Big)y_3, \\ F_2 = -l(\varepsilon + y_1^3)^{(l-3)/3}y_1^2y_2y_5 + (l+1)(\varepsilon + y_1^3)^{-(l+4)/3}y_1^2y_2y_6 - {} \\ {} - \big(y_1^2(\varepsilon + y_1^3)^{-2/3}F_3 + 2\varepsilon y_1(\varepsilon + y_1^3)^{-5/3}y_2^2 + (l-1)(l+2)(\varepsilon + y_1^3)^{-2/3}\,\mathrm{We}_2\big)y_4, \\ F_3 = y_1^{-1}\Big(1 - \frac{y_1}{(\varepsilon + y_1^3)^{1/3}}\Big)^{-1}\Big[ay_1^{-3\gamma} - b - \frac{2\,\mathrm{We}_1}{y_1} - \frac{2\,\mathrm{We}_2}{(\varepsilon + y_1^3)^{1/3}} - {} \\ {} - \Big(\frac{3}{2} - \frac{2y_1}{(\varepsilon + y_1^3)^{1/3}} + \frac{y_1^4}{2(\varepsilon + y_1^3)^{4/3}}\Big)y_2^2\Big]. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Для системы (5.4) выберем в качестве начальных следующие данные:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = \delta_1, \quad y_4(0) = \delta_2, \quad y_5(0) = 0, \quad y_6(0) = 0 \tag{5.6}$$

(δ_1, δ_2 — малые безразмерные амплитуды возмущений поверхностей слоя в начальный момент). Второе, пятое и шестое условия в (5.6) означают, что начальная скорость поверхностей слоя и начальная скорость возмущений жидкости равны нулю.

Результаты численного исследования решения задачи Коши (5.5), (5.6) показывают, что при $l \geqslant 1$ ($\gamma = 1{,}4$) имеют место колебания амплитуд возмущений границ внутреннего

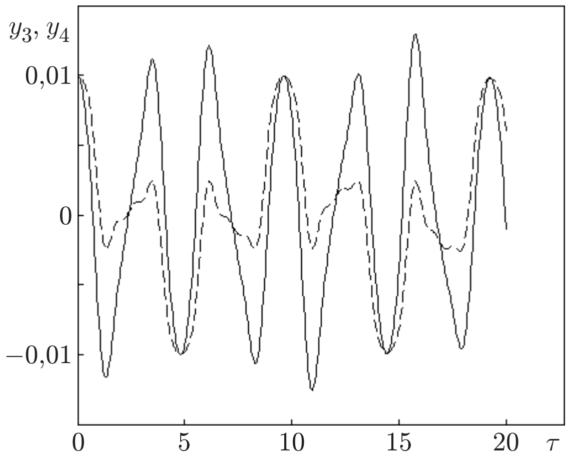

Рис. 1

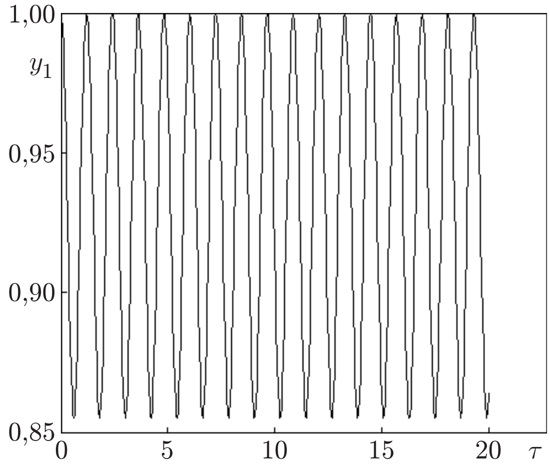

Рис. 2

Рис. 1. Возмущения границ слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{We}_1 = 1{,}0$, $\mathrm{We}_2 = 0{,}1$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}01$:
сплошная линия — внутренняя граница, штриховая — внешняя граница

Рис. 2. Нелинейные возмущения внутренней границы слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 1$, $\mathrm{We}_1 = 1{,}0$, $\mathrm{We}_2 = 0{,}1$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}01$

и внешнего слоев (рис. 1), причем с другим, отличным от основного, периодом (рис. 2). С увеличением толщины слоя (рис. 3) колебания амплитуд возмущений внутренней (и внешней) поверхности перестают быть периодическими, в то время как период нелинейных колебаний сферического слоя увеличивается (рис. 4).

Аналогичная ситуация имеет место при увеличении номера сферической гармоники l. Заметим также, что изменение поверхностного натяжения влияет только на период колебаний. Таким образом, нерадиальные возмущения нелинейных колебаний границ сферического слоя ограничены, следовательно, в данном случае такие колебания являются устойчивыми.

6. Радиальные возмущения. В случае радиальных возмущений $l = 0$ и все неизвестные не зависят от угловых переменных θ, φ. Тогда имеем

$$U = \frac{a_{00}(t)}{r^2}, \qquad V = 0, \qquad P = \frac{\rho a_{00}'}{r} - \frac{\rho a_{00}\Phi}{r^4} + g(t),$$

где $g(t)$ — произвольная функция. Поведение функции $W(r,t)$, определяемой из уравнения $(rW)_t + u(rW)_r = 0$, не оказывает влияния на амплитуды $\alpha_{00}(t)$, $\beta_{00}(t)$ возмущений границ слоя. Поскольку $\Phi(t) = r_1^2 r_1' = r_2^2 r_2'$, $p_r(r_{1,2},t) = -\rho r_{1,2}''$, получаем систему $N_1 = \alpha_{00}$, $N_2 = \beta_{00}$, $A = a_{00}$, которую можно записать в виде

$$N_1' = -\frac{2r_1'N_1}{r_1} + \frac{A}{r_1^2}, \qquad N_2' = -\frac{2r_2'N_2}{r_2} + \frac{A}{r_2^2},$$
$$\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big)A' = \frac{r_1'}{r_1^2}\Big(1 - \frac{r_1^4}{r_2^4}\Big)A + \Big(\frac{2\sigma_1}{\rho r_1^2} + r_1'' - \frac{3\gamma p_0 r_{10}^{3\gamma}}{\rho r_1^{3\gamma+1}}\Big)N_1 + \Big(\frac{2\sigma_2}{\rho r_2^2} - r_2''\Big)N_2. \tag{6.1}$$

Из первых двух уравнений (6.1) выводим равенства $A = (r_1^2 N_1)' = (r_2^2 N_2)'$, или

$$r_1^2 N_1 = r_2^2 N_2. \tag{6.2}$$

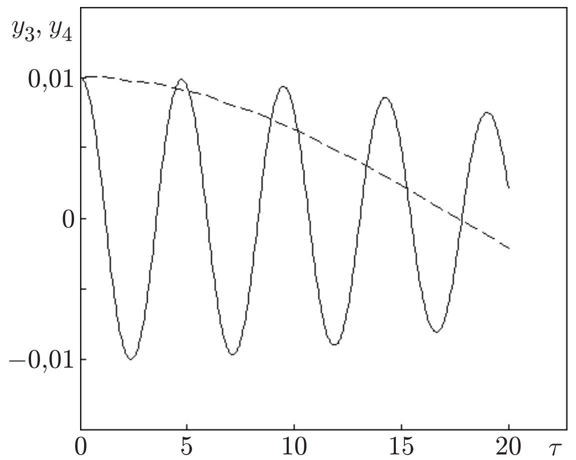

Рис. 3

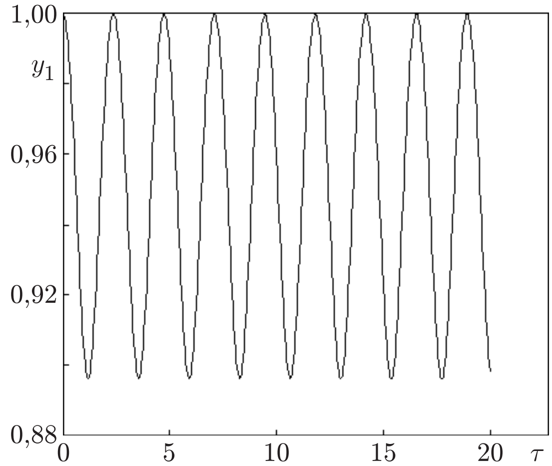

Рис. 4

Рис. 3. Возмущения границ слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 100$, $\mathrm{We}_1 = 1{,}0$, $\mathrm{We}_2 = 0{,}1$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}01$:
сплошная линия — внутренняя граница, штриховая — внешняя граница

Рис. 4. Нелинейные возмущения внутренней границы слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 100$, $\mathrm{We}_1 = 1{,}0$, $\mathrm{We}_2 = 0{,}1$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}01$

Постоянная интегрирования должна быть равна нулю, так как в случае радиальных возмущений соотношение (6.2) является следствием закона сохранения объема (1.4). Если возмущение одной из границ в начальный момент времени равно нулю, например $N_1(0) = 0$, то $N_1(t) = N_2(t) = A(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$, поскольку $A(0) = 0$. Для $N_1(0) \neq 0$ из (6.1), (6.2) в безразмерных переменных $\tau = t/t_0$, $y_1 = r_1/r_{10}$, $y_3 = N_1/r_{10}$, $y_4 = At_0/r_{10}^3$ получаем систему уравнений

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = F_3, \qquad y_3' = -\frac{2y_2y_3}{y_1} + \frac{y_4}{y_1^2},$$

$$y_4' = \frac{y_2}{y_1}\Big(1 + \frac{y_1}{(\varepsilon + y_1^3)^{1/3}} + \frac{y_1^2}{(\varepsilon + y_1^3)^{2/3}} + \frac{y_1^3}{\varepsilon + y_1^3}\Big)y_4 + \tag{6.3}$$

$$+ \frac{y_1}{1 - y_1(\varepsilon + y_1^3)^{-1/3}}\Big[\frac{2\,\mathrm{We}_1}{y_1^2} + \frac{2\,\mathrm{We}_2\,y_1^2}{(\varepsilon + y_1^3)^{4/3}} - \frac{2\varepsilon y_1 y_2^2}{(\varepsilon + y_1^3)^{5/3}} - \frac{3\gamma a}{y_1^{3\gamma+1}} + \Big(1 - \frac{y_1^2}{(\varepsilon + y_1^3)^{2/3}}\Big)F_3\Big]y_3$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = \delta_1, \quad y_4(0) = 0 \tag{6.4}$$

(функция F_3 взята из (5.5)).

Из решения задачи Коши (6.3), (6.4) следует, что на рост амплитуд возмущений границ слоя существенное влияние оказывают параметры a и b, характеризующие давление внутри и вне слоя. Как указывалось выше, параметр b дополнительного влияния на возмущения границ слоя не оказывает. Если параметры a и b имеют одинаковые значения, то возмущения границ слоя имеют колебательный характер (рис. 5). При увеличении a и b частота колебаний увеличивается, возмущения изменяются в том же диапазоне (рис. 6).

При $a \neq b$ амплитуды возмущений увеличиваются, достигая максимального значения $\max y_3 = 4{,}435 \cdot 10^5$ при $\tau = 20$ (рис. 7). Аналогичная ситуация имеет место при $b > a$, причем толщина слоя не оказывает влияния на характер радиальных возмущений.

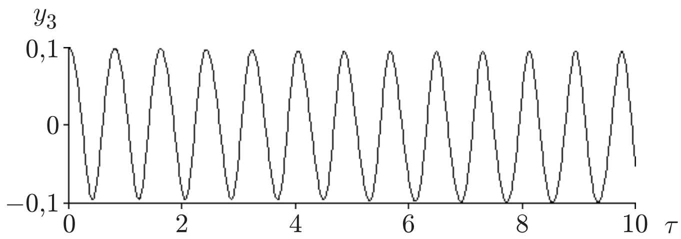

Рис. 5. Возмущения границ слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 999$, $\mathrm{We}_1 = \mathrm{We}_2 = 1$, $a = b = 10$, $\delta_1 = 0{,}1$

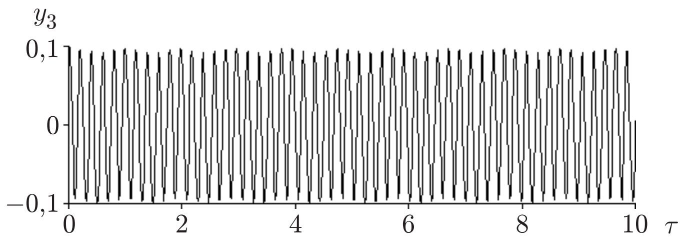

Рис. 6. Возмущения внутренней границы слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 10$, $\mathrm{We}_1 = \mathrm{We}_2 = 10$, $a = b = 100$, $\delta_1 = 0{,}1$

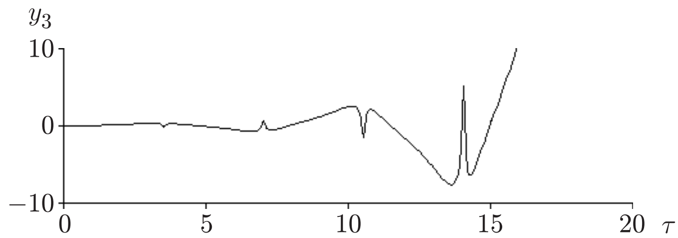

Рис. 7. Возмущения внутренней границы слоя при $l = 2$, $\varepsilon = 10$, $\mathrm{We}_1 = \mathrm{We}_2 = 1$, $a = b = 100$, $\delta_1 = 0{,}01$

На рис. 8 показана область устойчивости радиальных возмущений при $0 \leqslant a \leqslant 25$, $0 \leqslant b \leqslant 10$, $l = 2$, $\delta_1 = 0{,}1$, $\varepsilon = 10$, $\mathrm{We}_1 = \mathrm{We}_2 = 10$.

7. Устойчивость стационарного состояния слоя. В случае устойчивости стационарного состояния слоя уравнение (2.1) имеет единственное решение y_c:

$$\frac{2\,\mathrm{We}_1}{y_c} + \frac{2\,\mathrm{We}_2}{(\varepsilon + y_c^3)^{1/3}} - \frac{a}{y_c^{3\gamma}} + b = 0. \tag{7.1}$$

Сначала рассмотрим радиальные возмущения. В системе (6.3) необходимо положить $y_1 = y_c$, $y_2 = 0$, $F_3 = 0$ (последнее следует из равенства (7.1)). Тогда система (6.3) сводится к одному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y_3'' + \frac{1}{1 - y_1(\varepsilon + y_c^3)^{-1/3}}\Big(\frac{3\gamma a}{y_c^{3\gamma+2}} - \frac{2\,\mathrm{We}_1}{y_c^3} - \frac{2\,\mathrm{We}_2\, y_c}{(\varepsilon + y_c^3)^{4/3}}\Big) y_3 = 0.$$

Заменяя $a/y_c^{3\gamma}$ из (7.1), находим выражение в скобках

$$\frac{(6\gamma - 2)\,\mathrm{We}_1}{y_c^3} + \Big(\frac{6\gamma - 2}{y_c^2(\varepsilon + y_c^3)^{1/3}} + \frac{2\varepsilon}{y_c^2(\varepsilon + y_c^3)^{4/3}}\Big)\,\mathrm{We}_2 + \frac{3\gamma b}{y_c^2} \equiv G(y_c, \gamma, \varepsilon, \mathrm{We}_1, \mathrm{We}_2) > 0. \tag{7.2}$$

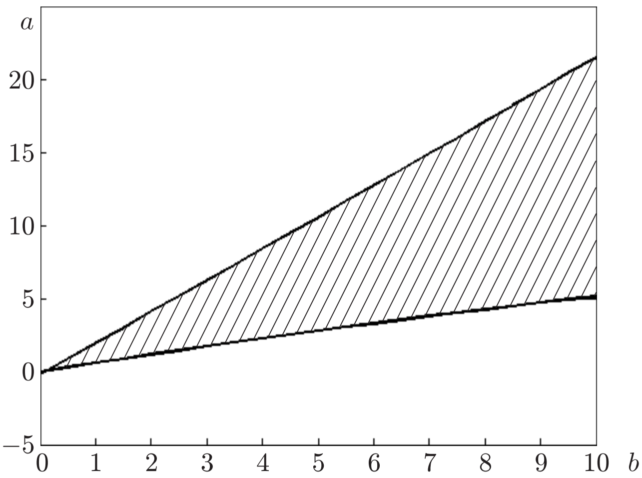

Рис. 8. Область устойчивости радиальных возмущений при $0 \leqslant a \leqslant 25$, $0 \leqslant b \leqslant 10$

Поэтому точка равновесия y_c является устойчивой (центром). Частота колебаний слоя в окрестности этой точки находится по формуле

$$\omega_c = \Big[\Big(1 - \frac{y_c}{(\varepsilon + y_c^3)^{1/3}}\Big)^{-1} G\Big]^{1/2} \tag{7.3}$$

(функция G взята из (7.2)).

Для возмущений общего вида ($l \geqslant 1$) характеристическое уравнение записывается следующим образом:

$$\omega^4 + A_1\omega^2 + A_2 = 0.$$

Здесь

$$A_1 = \frac{(l-1)(l+2)}{y_c^{2l+1} - (\varepsilon + y_c^3)^{(2l+1)/3}} \Big[\frac{1}{y_c^3}\big(l y_c^{2l+1} + (l+1)(\varepsilon + y_c^3)^{(2l+1)/3}\big)\,\mathrm{We}_1 + {}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon + y_c^3}\,\big((l+1)y_c^{2l+1} + l(\varepsilon + y_c^3)^{(2l+1)/3}\big)\,\mathrm{We}_2\Big], \tag{7.4}$$
$$A_2 = \frac{l(l+1)(l-1)^2(l+2)^2\,\mathrm{We}_1\,\mathrm{We}_2}{y_c^3(\varepsilon + y_c^3)}\,.$$

Поскольку $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, квадраты собственных частот положительны, равны

$$\omega_c^2 = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} > 0 \tag{7.5}$$

и зависят только от числа l, но не от m. Каждая частота в (7.5) соответствует $2l+1$ различным собственным колебаниям. Выражение (7.5) обращается в нуль при $l = 1$, что соответствует поступательному перемещению слоя как целого. Наименьшее возможное значение частоты слоя находится из выражения (7.5), в котором нужно выбрать знак “минус” и положить $l = 2$.

Таким образом, равновесное состояние сферического слоя является устойчивым.

Замечание 3. При $\varepsilon \to \infty$ из формул (7.2), (7.3) и (7.4), (7.5) получаем соответственно выражения для частот колебаний сферического пузырька в безграничной жидкости

$$(\omega_c^\infty)^2 = \frac{(6\gamma - 2)\,\mathrm{We}_1}{y_c^3} + \frac{3\gamma b}{y_c^2}\,, \qquad (\omega_c^\infty)^2 = \frac{(l-1)(l+1)(l+2)\,\mathrm{We}_1}{y_c^3},$$

где y_c — стационарное решение уравнения (1.11).

Замечание 4. Если $r_{20} - r_{10} = h \ll 1$, то при $h \to 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\tilde{\rho} = \rho h = \mathrm{const}$ из (7.2), (7.3) для частоты радиальных колебаний сферической пленки имеем выражение

$$(\omega_c^0)^2 = 4(3\gamma - 1)\tilde{\mathrm{We}}_1 + 3\gamma\tilde{b}y_c$$

(y_c — стационарное решение уравнения (1.11)).

Для несферических колебаний из (7.4), (7.5) находим

$$(\omega_C^0)^2 = (l - 1)(l + 2)\tilde{\mathrm{We}}_1.$$

Заключение. Изучено нестационарное движение сферического слоя идеальной жидкости, в случае когда давление внутри газовой полости распределено по адиабатическому закону. Движение описывается сильно нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, решение которого зависит от шести безразмерных параметров. Доказано, что при определенных условиях для этих параметров уравнение имеет периодическое решение, соответствующее нелинейным колебаниям слоя. Исследованы предельные случаи колебаний сферического и мыльного пузыря (пленки), стационарное состояние слоя.

Выведены уравнения малых возмущений нестационарных движений слоя с учетом капиллярных сил на его поверхностях. Путем специального разделения угловых переменных получена система амплитудных уравнений, которую можно проинтегрировать по радиальной переменной, в результате чего возникает задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка для возмущений. Результаты ее численного исследования показывают, что нерадиальные возмущения границ слоя являются периодическими, причем их период отличается от периода колебаний слоя при тех же значениях физических параметров. В случае если безразмерные внешние и внутренние давления не уравновешены, радиальные возмущения границ слоя могут со временем расти. Доказано также, что равновесное состояние сферического слоя, возможное только при наличии внутреннего давления, является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947.
2. **Hunt J. H.** Instability in a spherical fluid shell // Appl. Sci. Res. Ser. A. 1961. V. 10, N 1. P. 59–77.
3. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
4. **Классен Л. Г.** О схлопывании полости в идеальной несжимаемой жидкости силами поверхностного натяжения // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1973. Вып. 4. С. 106–111.
5. **Андреев В. К.** Малые возмущения сферического слоя жидкости // ПМТФ. 1981. № 1. С. 110–117.
6. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.

Поступила в редакцию 2/X 2018 г.,
после доработки — 2/X 2018 г.
Принята к публикации 29/X 2018 г.