УДК 536.46+541

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

А. Г. Князева, С. Н. Сорокова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634021 Томск, anna@ms.tsc.ru

Задача о распространении стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде решается методом сращиваемых асимптотических разложений в приближении малых деформаций. Предполагается, что поток тепла удовлетворяет закону Фурье, а компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны соотношениями Максвелла, включающими сдвиговый коэффициент вязкости. Найдены температура продуктов и скорость распространения стационарного фронта реакции. Решение задачи получено для предельных случаев малого и большого времени релаксации вязких напряжений. Показано, что в модели существуют различные режимы распространения фронта реакции, как и в связанных моделях твердофазного горения для термоупругого тела, а вязкие напряжения вносят дополнительные особенности.

Ключевые слова: стационарные режимы горения, связанная модель, термические напряжения, вязкоупругая среда, асимптотический анализ.

ВВЕДЕНИЕ

К числу твердофазных процессов относятся те, в которых одна из фаз, участвующих в превращении, является твердой. Как и реакции в газах и жидкостях, твердофазные превращения бывают быстрые и медленные; экзотермические и эндотермические; гомогенные и гетерогенные; протекающие без изменения химического состава фазы и с изменением химического состава. На протекание химических реакций в твердом теле оказывают влияние, кроме температуры, механические напряжения, диффузия, структура образца, напряженность электрического поля, окружающая среда. В твердом веществе все процессы взаимосвязаны и могут влиять друг на друга как прямо, так и косвенным образом.

Учет взаимовлияния различных процессов приводит к построению связанных моделей твердофазных превращений. В работах [1, 2] показано, что учет взаимодействия тепловых и механических процессов приводит к появлению различных режимов превращения. Напряжения и деформации в этих задачах считались упругими и удовлетворяли обобщенным соотношениям Дюамеля — Неймана.

Представляет интерес выяснить, приводит ли учет реологических особенностей среды к появлению новых закономерностей распространения фронта превращения. Так, в реальной ситуации твердофазные превращения осуществляются, если реагенты подготовлены в виде порошковой смеси. Реологическое поведение таких сред нельзя назвать упругим. Реагенты могут претерпевать фазовые превращения с изменением температуры и коагулировать, измельчаться под действием напряжений, возникающих в зоне реакции и др. Это типично, например, для металлотермических превращений. В работе [3] предложена математическая модель для описания металлотермических превращений, основанная на вязкоупругой модели Максвелла. Применимость модели такого типа к описанию механического поведения материалов, обладающих свойствами как жидкости, так и твердого тела, продемонстрирована, например, в [4]. Отдельные расчеты, представленные в этой работе, показали, что особенности связанной модели, характерные для упругих напряжений [1, 2], в вязкоупругой модели сохраняются. Подробное исследование задачи в работе не проводилось.

Целью настоящей работы являются нахождение стационарного решения задачи с использованием асимптотических методов и его анализ в широкой области изменения параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00074).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В приближении малых деформаций, скоростей и перемещений задача о распространении фронта превращения включает [2, 3] уравнение баланса внутренней энергии в форме уравнения теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\boldsymbol{J}_T - 3\alpha_T K T \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + Q_r \frac{\partial y}{\partial t},$$

уравнение химической кинетики для суммарной реакции A $\to$ B

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k_r \varphi(y) \exp\Big(-\frac{E_a}{RT}\Big),$$

уравнение баланса импульса, или уравнение движения,

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\nabla\sigma.$$

Здесь T — температура; y — доля суммарного продукта реакции или степень превращения; ρ — плотность; c_ε — теплоемкость; $\boldsymbol{J}_T$ — вектор плотности теплового потока; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений, компоненты $u_{i,j}$ которого связаны с компонентами тензора малых деформаций соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big);$$

α_T — линейный коэффициент теплового расширения; $K = \lambda + 2\mu/3$ — изотермический модуль всестороннего сжатия, λ, μ — коэффициенты Ламэ (μ соответствует модулю сдвига в теории упругости); Q_r — тепловыделение реакции; E_a — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; σ — полный тензор напряжений, который состоит из упругой и вязкой частей. Упругая часть тензора напряжений удовлетворяет обобщенному закону Гука

$$d\sigma^e_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[\lambda d\varepsilon_{kk} - K dw], \qquad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — первый инвариант тензора деформаций; w — относительное изменение локального объема, зависящее от величин, характеризующих различные необратимые процессы. В частном случае малых деформаций и при учете только термических напряжений имеем

$$w = 3\alpha_T(T - T_0).$$

Тогда из (1) получаем обычное соотношение Дюамеля — Неймана

$$\sigma^e_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[\lambda\varepsilon_{kk} - 3K\alpha_T(T - T_0)].$$

Просуммировав σ^e_{ij} по $i = j$, находим

$$\sigma^e_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - \alpha_T(T - T_0)) \qquad (2)$$

или

$$d\sigma^e_{kk} = 3K[d\varepsilon_{kk} - dw].$$

Разобьем полный тензор напряжений и тензор деформации на шаровую и девиаторную части:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3,$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3,$$

где $\tau_{ij} = \tau^e_{ij} + \tau^V_{ij}$ и $\sigma_{ij} = \sigma^e_{ij} + \sigma^V_{ij}$, а индекс V соответствует вязким напряжениям. Примем, что упругая часть тензора напряжений есть шаровой тензор, т. е. $\tau^e_{ij} = 0$. Соотношение (2) для упругого тензора остается в силе. Используя операторную связь

$$\begin{aligned} &A\tau^V_{ij} = Be_{ij}, \\ &A = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2æ}, \quad B = \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \qquad (3)$$

и полагая, что $\sigma^V_{kk} = 0$, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\mu}{æ}\sigma_{ij} = 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + \delta_{ij}\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\varepsilon_{kk} - 3K\alpha_T \times$$
$$\times (T - T_0)) + \frac{\mu}{æ}K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_T(T - T_0))\Big]. \qquad (4)$$

В (3), (4) æ — коэффициент сдвиговой вязкости. В предельном случае æ $\to \infty$ из (4) следует соотношение Дюамеля — Неймана, в случае æ $\to 0$ имеем соотношение между компонентами σ_{ij} и ε_{ij} для анизотропной невязкой жидкости. Операторное уравнение (3) соответствует вязкоупругой модели Максвелла, которое корректно для описания механического поведения сред, обладающих свойствами жидкости и твердого тела.

В случае плоского реакционного фронта справедливы соотношения

$$u_1 \neq 0, \quad u_2 = u_3 = 0;$$

$$|\varepsilon_{11}| \gg |\varepsilon_{22}|, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \to 0;$$

$$|\sigma_{11}| \leqslant |\sigma_{22}|, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33}.$$

Остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю. Примем далее $u_1 = u$ и $\varepsilon_{11} = \varepsilon$.

Для потока тепла используем закон Фурье $\boldsymbol{J}_T = -\lambda_T \nabla T$, в отличие от работы [1], где в модели учитывалась конечность времени релаксации потока тепла.

В результате задача о распространении плоского фронта превращения будет описываться следующей системой уравнений:

$$c_\varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + Q_r \frac{\partial y}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k_r \varphi(y) \exp\Big(-\frac{E_a}{RT}\Big); \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \text{ или } \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \frac{\mu}{\text{æ}}\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - 3K\alpha_T \frac{\partial T}{\partial t} + \\ + \frac{\mu}{\text{æ}} K(\varepsilon - 3\alpha_T (T - T_0)); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} + \frac{\mu}{\text{æ}}\sigma_{22} = \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - 3K\alpha_T \frac{\partial T}{\partial t} + \\ + \frac{\mu}{\text{æ}} K(\varepsilon - 3\alpha_T (T - T_0)).$$

Дополним систему (5)–(8) стандартными для подобных задач граничными условиями. Полагаем, что в исходном веществе (т. е. в реагентах) все возмущения нулевые:

$$T - T_0 = 0, \quad y = 0, \quad \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

а в продуктах реакции все возмущения затухают и

$$T \to T_b, \quad y \to 1, \quad (10)$$

где T_b — температура горения, которую требуется определить в ходе анализа задачи.

Рассмотрим реакцию первого порядка ($n = 1$), т. е. $\varphi(y) = 1 - y$.

В системе координат, связанной с фронтом реакции, движущимся вправо со скоростью υ_n, система (5)–(8) принимает вид:

$$c_\varepsilon \rho \Big[\frac{\partial T}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x'}\Big] = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} - \\ - 3K\alpha_T T \Big[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x'}\Big] + Q_r \Big[\frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial y}{\partial x'}\Big];$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial y}{\partial x'} = k_r \varphi(y) \exp\Big(-\frac{E_a}{RT}\Big);$$

$$\rho \Big[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - 2\upsilon_n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x'} + \upsilon_n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x'^2}\Big] = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x'^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x'} + \frac{\mu}{\text{æ}}\sigma_{11} = (2\mu + \lambda) \times \quad (11) \\ \times \Big[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x'}\Big] - 3K\alpha_T \Big[\frac{\partial T}{\partial t} - \upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x'}\Big] - \\ - \frac{\mu}{\text{æ}} K(\varepsilon - 3\alpha_T (T - T_0)),$$

где $x' = x - \int\limits_0^t \upsilon_n dt$.

Стационарная задача получается из (11) приравниванием нулю производных по времени.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В переменных

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, \ \xi = \frac{x'}{x_*}, \ y, \ e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \ S = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_*},$$

где

$$T_* = T_{b0} = T_0 + Q_r / c_\varepsilon \rho,$$

$$x_* = \text{æ}_T / \upsilon_n,$$

$$\sigma_* = 3K\alpha_T (T_* - T_0),$$

$$\varepsilon_* = \sigma_* / (2\mu + \lambda),$$

стационарная задача записывается в виде:

$$-\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \omega[\theta + \sigma]\frac{de}{d\xi} - \frac{dy}{d\xi}, \quad (12)$$

$$m\gamma \frac{dy}{d\xi} = \varphi(y) \exp\Big[-\frac{1 - \theta}{\beta(\theta + \sigma)}\Big], \quad (13)$$

$$\alpha \frac{d^2 e}{d\xi^2} = \frac{d^2 S}{d\xi^2}, \quad (14)$$

$$-\frac{dS}{d\xi} + \frac{S}{\tau_v} = -\frac{de}{d\xi} + \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{he - \theta}{\tau_v}, \quad (15)$$

где $\sigma = T_0/(T_* - T_0)$; $\omega = [(3\alpha_T K)^2(T_* - T_0)]/c_\varepsilon\rho(2\mu + \lambda)$ — коэффициент связанности полей деформации и температуры; $\alpha = (v_n/c_l)^2$ — аналог числа Маха для твердофазного горения [2], где $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — линейная скорость звука; $h = K/(\lambda+2\mu)$ — отношение объемной и продольной скоростей звука; $\tau_v = æv_n^2/\mu æ_T$ — время (или скорость) релаксации вязких напряжений; $\beta = RT_*/E_a$, $\gamma = c_\varepsilon\rho RT_*^2/E_aQ_r$ — обычные малые параметры тепловой теории горения; $m = v_n^2/\gamma v_{n*}^2$ — скорость распространения фронта реакции, которая является собственным значением задачи; v_{n*} — характерная скорость реакции.

Граничные условия в реагентах запишутся так:

$$\xi \to +\infty:\quad \theta = y = e = \frac{de}{d\xi} = 0,$$

в области продуктов реакции —

$$\xi \to -\infty:\quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0,\quad y \to 1.$$

Из уравнения (14) сразу находим первый интеграл: $S = \alpha e$, тогда уравнение (15) примет вид

$$(1-\alpha)\frac{de}{d\xi} + \frac{\alpha - h}{\tau_v}e = \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\theta}{\tau_v}.$$

Понизим порядок системы уравнений, для чего введем новую переменную $P = \dfrac{d\theta}{d\xi}$. В результате из (12), (13) и последнего уравнения получаем систему:

$$-1 = \frac{dP}{d\theta} + \omega(\theta+\sigma)\frac{de}{d\theta} - \frac{dy}{d\theta},$$
$$m\gamma\frac{dy}{d\theta}P = \varphi(y)\exp\Big[-\frac{1-\theta}{\beta(\theta+\sigma)}\Big], \qquad (16)$$
$$(1-\alpha)\frac{de}{d\theta}P + \frac{\alpha-h}{\tau_v} = P + \frac{\theta}{\tau_v}.$$

Ее граничные условия:

$$\theta \to 0:\quad P = \frac{d\theta}{d\xi} \to 0,\quad y = 0,\quad e = 0,$$

$$\theta \to \theta_b:\quad P \to 0,\quad y \to 1.$$

Требуется найти распределение температуры, напряжений и деформаций в волне горения, а также определить температуру продуктов $\theta_b = (T_b - T_0)/(T_{b0} - T_0)$ и скорость распространения фронта реакции m в зависимости от параметров модели ω, σ, α, h, τ_v, γ.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Учитывая малость величины γ, будем строить решение методом сращиваемых асимптотических разложений [5, 6].

Для получения инертного решения (решения во внешней области) в системе (16) устремляем γ к нулю. Тогда система примет вид:

$$-1 = \frac{dP}{d\theta} + \omega(\theta+\sigma)\frac{de}{d\theta},$$
$$(1-\alpha)\frac{de}{d\theta}P + \frac{\alpha-h}{\tau_v} = P + \frac{\theta}{\tau_v}; \qquad (17)$$

$$\theta \to 0:\quad P = \frac{d\theta}{d\xi} \to 0,\quad e \to 0. \qquad (18)$$

Будем искать внешние решения для двух предельных случаев: малого ($\tau_v \ll 1$) и большого ($\tau_v \gg 1$) времени релаксации вязких напряжений.

1. В случае малого времени релаксации ($\tau_v \ll 1$) будем искать решение в виде ряда по τ_v:

$$P = P_0 + \tau_v P_1 + \ldots,\quad e = e_0 + \tau_v e_1 + \ldots .$$

Подставляя разложения в систему (17), (18), получаем:

$$-1 = \Big[\frac{dP_0}{d\theta} + \tau_v\frac{dP_1}{d\theta} + \ldots\Big] + {}$$
$$+ \omega(\theta+\sigma)\Big[\frac{de_0}{d\theta} + \tau_v\frac{de_1}{d\theta} + \ldots\Big];$$
$$(1-\alpha)\tau_v\Big[\frac{de_0}{d\theta} + \tau_v\frac{de_1}{d\theta} + \ldots\Big] \times$$
$$\times (P_0 + \tau_v P_1 + \ldots) + (\alpha - h)(e_0 + \tau_v e_1 + \ldots) =$$
$$= \tau_v(P_0 + \tau_v P_1 + \ldots) + \theta.$$

Приравнивая слагаемые при одинаковых степенях τ_v, находим:
для нулевого приближения

$$-1 = \frac{dP_0}{d\theta} + \omega(\theta+\sigma)\frac{de_0}{d\theta},$$
$$(\alpha-h)e_0 = \theta;$$

для первого приближения

$$0 = \frac{dP_1}{d\theta} + \omega(\theta+\sigma)\frac{de_1}{d\theta},$$
$$(1-\alpha)\frac{de_0}{d\theta}P_0 + (\alpha-h)e_1 = P_0$$

и т. д. Граничные условия к внешней задаче следующие:
для нулевого приближения

$$P_0 \to 0, \quad e_0 \to 0,$$

для первого приближения

$$P_1 \to 0, \quad e_1 \to 0.$$

Ограничимся вторым порядком малости по τ_v, тогда решение внешней задачи примет вид:

$$P = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + O(\tau_v^2), \tag{19}$$

$$e = \frac{\theta}{\alpha - h} + \frac{\tau_v}{\alpha - h}\Big(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha - h}\Big) \times \\ \times \Big[\frac{\omega}{\alpha - h}\Big(\frac{\theta^2}{2} + \sigma\theta\Big) - \theta\Big] + O(\tau_v^2), \tag{20}$$

где

$$a = \frac{\tau_v}{3}\Big(\frac{\omega}{\alpha - h}\Big)^3\Big(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha - h}\Big),$$

$$b = \tau_v\Big(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha - h}\Big)\frac{\omega}{\alpha - h}\Big(\frac{\sigma\omega}{3} + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\omega}{\alpha - h},$$

$$c = \tau_v\Big[1 - \frac{1-\alpha}{\alpha - h}\Big]\frac{\sigma\omega}{\alpha - h}\Big(\frac{\sigma\omega}{\alpha - h} + 1\Big) - \\ - 1 - \frac{\sigma\omega}{\alpha - h}.$$

Из уравнения (19) после интегрирования находим уравнение для температуры:

$$\frac{1}{c}\ln\theta - \frac{1}{2c}\ln(a\theta^2 + b\theta + c) - \frac{b}{c\sqrt{4cb - b^2}} \times \\ \times \arctan\frac{2a\theta + b}{\sqrt{4ca - b^2}} + \mathrm{const} = \xi. \tag{21}$$

Константа интегрирования может быть найдена из условия сращивания (21) с внутренним решением.

2. В случае большого времени релаксации ($\tau_v \gg 1$) будем искать решение в виде ряда по τ_v^{-1}:

$$P = P_0 + \tau_v^{-1}P_1 + ..., \; e = e_0 + \tau_v^{-1}e_1 + ... \, .$$

Система уравнений для нахождения внешнего решения примет вид:

$$-1 = \Big[\frac{dP_0}{d\theta} + \tau_v^{-1}\frac{dP_1}{d\theta} + ...\Big] + \\ + \omega(\theta + \sigma)\Big[\frac{de_0}{d\theta} + \tau_v^{-1}\frac{de_1}{d\theta} + ...\Big];$$

$$(1-\alpha)\Big[\frac{de_0}{d\theta} + \tau_v^{-1}\frac{de_1}{d\theta} + ...\Big](P_0 + \tau_v^{-1}P_1 + ...) + \\ + \tau_v^{-1}(\alpha - h)[e_0 + \tau_v^{-1}e_1 + ...] = \\ = (P_0 + \tau_v^{-1}P_1 + ...) + \tau_v^{-1}\theta.$$

Аналогично предыдущему случаю имеем: для нулевого приближения

$$-1 = \frac{dP_0}{d\theta} + \omega(\theta + \sigma)\frac{de_0}{d\theta},$$

$$(1-\alpha)\frac{de_0}{d\theta}P_0 = P_0,$$

для первого приближения

$$0 = \frac{dP_1}{d\theta} + \omega(\theta + \sigma)\frac{de_1}{d\theta},$$

$$(1-\alpha)\Big[\frac{de_0}{d\theta}P_1 + \frac{de_1}{d\theta}P_0\Big] + (\alpha - h)e_0 = P_1 + \theta.$$

Граничные условия (18) для нулевого и первого приближений записываются соответственно в виде

$$P_0 \to 0, \quad e_0 \to 0;$$

$$P_1 \to 0, \quad e_1 \to 0.$$

Не представляет труда выписать рекуррентные соотношения для нахождения следующих приближений. С точностью до $O(\tau_v^{-2})$ внешнее решение примет вид:

$$P = -\theta - \frac{\omega}{1-\alpha}\Big(\frac{\theta^2}{2} - \sigma\theta\Big) + \frac{2}{\tau_v}\Big(1 - \frac{\alpha - h}{1-\alpha}\Big) \times \\ \times \Big[\theta + \frac{2(1-\alpha) + \omega\sigma}{\omega}\ln\frac{2(1-\alpha) + \omega\sigma}{\omega\theta + 2(1-\alpha) + 2\omega\sigma}\Big] + \\ + O(\tau_v^{-2}), \tag{22}$$

$$e = \frac{\theta}{1-\alpha} + \frac{2(2\alpha - h - 1)}{\omega\tau_v} \times \\ \times \ln\Big(2 + \frac{2\omega}{1-\alpha}\Big(\sigma + \frac{\theta}{2}\Big)\Big) + O(\tau_v^{-2}). \tag{23}$$

Для того чтобы найти решение внутренней задачи, перейдем в системе (16) к внутренней переменной

$$t = \frac{1-\theta}{\gamma}, \; d\theta = -\gamma dt.$$

Тогда для зоны химических реакций задача записывается в следующем виде:

$$-1 = -\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{dt} - \omega(\sigma + 1 - t\gamma)\frac{1}{\gamma}\frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma}\frac{dy}{dt},$$

$$mP\frac{dy}{dt} = \varphi(y)\phi(t), \tag{24}$$

$$(1-\alpha)\frac{P}{\gamma}\frac{de}{dt}+\frac{\alpha-h}{\tau_v}e=P+\frac{1-t\gamma}{\tau_v},$$

где $\phi(t)=\exp\Big(-\dfrac{1+\sigma}{1+\sigma-\gamma t}\Big)$, с условием

$$t\to t_b=\frac{1-\theta_b}{\gamma}:\quad P\to 0,\quad y\to 1.$$

Вторым условием является условие сращивания внешнего и внутреннего решений, которое позволяет определить скорость фронта и температуру продуктов реакции.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$P=P_0+\gamma P_1+\ldots,$$

$$e=e_0+\gamma e_1+\ldots,$$

$$y=y_0+\gamma y_1+\ldots,$$

$$m=m_0+\gamma m_1+\ldots\,.$$

Представим функцию $\phi(t)$ в виде ряда Тейлора по степеням малого параметра γ с точностью до слагаемых второго порядка малости:

$$\exp\Big(-\frac{t(\sigma+1)}{\sigma+1-t\gamma}\Big)=$$

$$=\exp(-t)-\exp(-t)\frac{t^2}{\sigma+1}\gamma+\ldots\,.$$

Подставляя разложения в систему уравнений (24), получим систему уравнений для нахождения нулевого приближения:

$$0=\frac{dP_0}{dt}+\omega(\sigma+1)\frac{de_0}{dt}-\frac{dy_0}{dt},$$

$$m_0\frac{dy_0}{dt}P_0=(1-y_0)\exp(-t), \qquad (25)$$

$$(1-\alpha)\frac{de_0}{dt}P_0=0.$$

Для первого приближения имеем:

$$1=\frac{dP_1}{dt}+\omega(\sigma+1)\frac{de_1}{dt}-\omega t\frac{de_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt};$$

$$m_1\frac{dy_0}{dt}P_0+m_0\frac{dy_1}{dt}P_0+m_0\frac{dy_0}{dt}P_1=$$

$$=-(1-y_0)\frac{t^2}{\sigma+1}\exp(-t)-y_1\exp(-t); \quad (26)$$

$$(1-\alpha)\Big[\frac{de_0}{dt}P_1+\frac{de_1}{dt}P_0\Big]+\frac{1}{\tau_v}(\alpha-h)e_0=P_0+\frac{1}{\tau_v}.$$

Граничными условиями для нулевого и первого приближений являются условие сращивания и соотношения

$$t\to t_b:\quad P_0\to 0,\ y_0\to 1 \text{ и } P_1\to 0,\ y_1\to 0. \quad (27)$$

Из системы (26) видно, что в первом приближении по γ случаи большого и малого времени релаксации следует анализировать отдельно. При малом времени релаксации решение различно для предельных случаев $\gamma\ll\tau_v$, $\gamma\gg\tau_v$ и $\gamma/\tau_v\approx 1$. В данной работе мы ограничились только нулевым приближением по γ.

Решение внутренней задачи (25) с учетом условия (27) имеет вид:

$$P_0=\frac{1}{m_0}\exp(-t)-1+O(\gamma),$$

$$y_0=\frac{1}{m_0}\Big(\exp(-t)-\exp\frac{\theta_b-1}{\gamma}+1\Big)+O(\gamma), \quad (28)$$

$$e_0=\text{const}.$$

Константу интегрирования, скорость фронта m_0 и температуру продуктов θ_b находим из условия сращивания внешнего и внутреннего решений, которое состоит в требовании одинакового предельного поведения внутренних и внешних разложений, записанных в одинаковых переменных. В нашей задаче условие сращивания сводится к следующей процедуре. Переходя в (28) к переменной θ, устремляем ее к внешнему пределу. Полученные выражения приравниваем к соответствующему внешнему решению для градиента и степени превращения при условии $\theta\to\theta_b$ (т. е. при стремлении к внутреннему пределу). Тогда при $y\to 0$ найдем уравнение для скорости фронта

$$m_0\approx\exp\frac{\theta_b-1}{\gamma}. \quad (29)$$

Сращивание решений для градиентов даст уравнение для температуры θ_b.

В случае большого времени релаксации находим равенство

$$1-\theta_b-\omega_1\Big(\frac{\theta_b^2}{2}+\sigma\theta_b\Big)+\frac{2}{\tau_v}(1-2\alpha+h)\times$$

$$\times\Big[\theta_b-\Big(\sigma+\frac{2}{\omega_1}\Big)\ln\frac{2+\theta_b\omega_1+2\sigma\omega_1}{2+2\sigma\omega_1}\Big]=0, \quad (30)$$

где $\omega_1=\omega/(1-\alpha)$.

В случае малого времени релаксации имеем

$$a\theta_b^3 + b\theta_b^2 + c\theta_b + d = 0, \qquad (31)$$

где a, b, c, d — константы уравнения, зависящие от параметров модели, $d = 1$. В зависимости от величины и знака дискриминанта это уравнение имеет одно или три действительных решения.

Величина деформаций в области продуктов реакции, а следовательно, и напряжений находится из уравнений (20), (23) или (28) соответственно для малого и большого времени релаксации вязких напряжений.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Анализ показал, что существует два типа решения задачи: низкоскоростное ($\alpha < 1$) и высокоскоростное ($\alpha > 1$), как и в случае чисто упругих напряжений [1]. С физической точки зрения скорость медленных стационарных режимов превращения определяется переносом энергии за счет теплопроводности, а скорость быстрых режимов превращения определяется переносом энергии волной механических возмущений [3]. В отличие от моделей для упругих сред здесь существуют особенности.

Подробное исследование полученных уравнений для температуры продуктов и скорости фронта горения проведено для случаев $\tau_v = 0.1$ и $\tau_v = 10$. Параметры α, ω, σ менялись в широких пределах, а значения параметров γ и h не менялись ($\gamma = 0.01$, $h = 0.83$).

В случае большого времени релаксации при низкоскоростном режиме ($\alpha < 1$) уравнение для температуры (30) имеет единственное положительное решение, меньшее единицы. При увеличении коэффициента связанности ω значение температуры продуктов θ_b уменьшается (рис. 1,*а*). С увеличением α (кривые *1–3*) от 0 до 1 и σ (кривые *1, 4*) температура продуктов также уменьшается. Следовательно, в соответствии с формулой (29) скорость распространения фронта реакции также уменьшается при увеличении σ и ω, что видно из рис. 1,*б*.

Возможность существования высокоскоростного режима ($\alpha > 1$) зависит от соотношения параметров ω, σ, α. Например, при $\alpha = 1.5$ и $\sigma = 0.3$ температура продуктов растет с увеличением ω от 0 до ω_* (рис. 2), при $\omega > \omega_*$ решение не существует. Критическое значение ω_* увеличивается с ростом α и уменьшается с

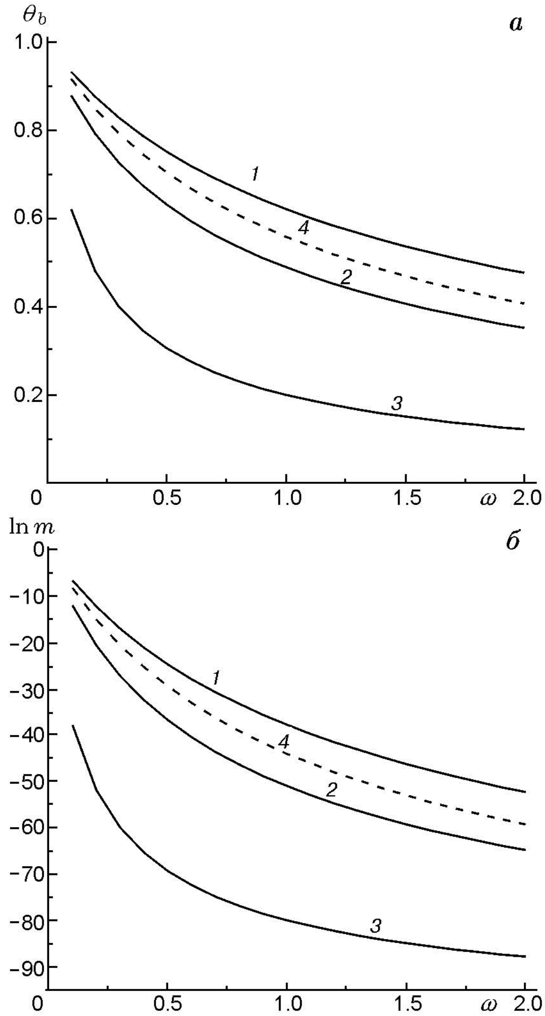

Рис. 1. Зависимость температуры продуктов (*а*) и скорости фронта (*б*) от коэффициента связанности в случае низкоскоростного режима при $\tau_v = 10$: *1–3* — $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.1$ (*1*), 0.5 (*2*), 0.9 (*3*); *4* — $\sigma = 0.5$, $\alpha = 0.1$

ростом относительного перепада температуры σ (рис. 3).

В этой области параметров уравнение для температуры имеет единственное положительное решение.

На рис. 4 показана зависимость температуры продуктов и стационарной скорости фронта от числа Маха для высокоскоростного режима ($\alpha > 1$) при различных значениях коэффициента связанности ω (кривые *1–3*) и относительного перепада температуры σ (кривые *1, 4*) в области существования решения. Чем ближе значение α к единице, тем больше отличие температуры продуктов от значения $\theta_b = 1$, которое соответствует решению чи-

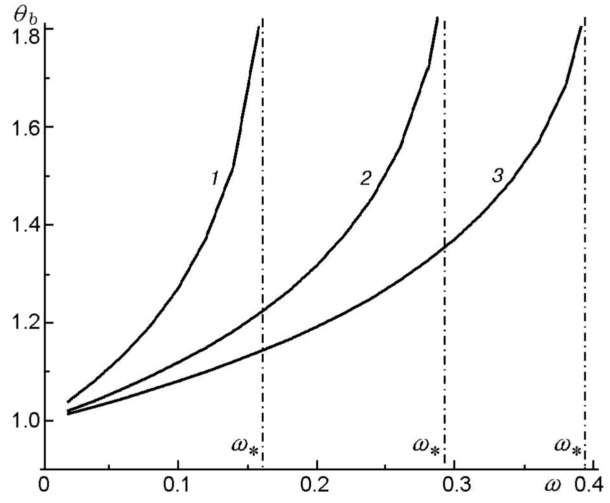

Рис. 2. Зависимость температуры продуктов от коэффициента связанности при $\sigma = 0.3$, $\tau_v = 10$, $\alpha = 1.5$ (*1*), 2 (*2*), 2.5 (*3*)

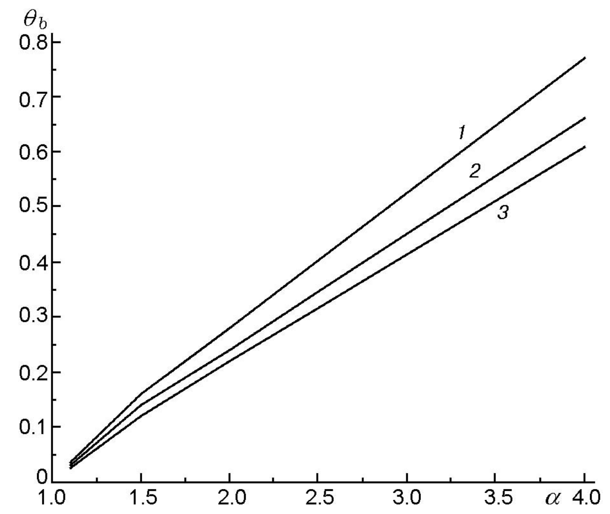

Рис. 3. Зависимость критического значения коэффициента связанности от α при $\tau_v = 10$, $\sigma = 0.3$ (*1*), 0.5 (*2*), 0.7 (*3*)

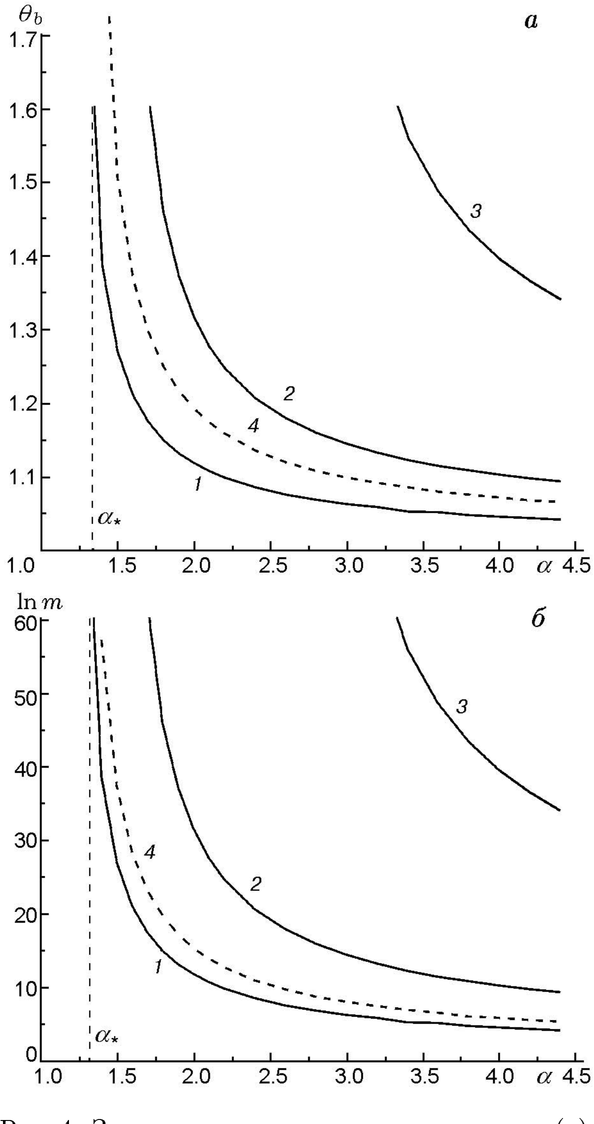

Рис. 4. Зависимость температуры продуктов (*а*) и скорости фронта (*б*) для высокоскоростного режима от параметров модели при $\tau_v \gg 1$:

1–3 — $\sigma = 0.3, \omega = 0.1$ (*1*), 0.2 (*2*), 0.5 (*3*), *4* — $\sigma = 0.5$, $\omega = 0.1$

сто тепловой задачи о распространении фронта превращения в твердой фазе. Критическое значение $\alpha_* > 1$, ниже которого ($\alpha > 1$) сверхзвуковых решений не существует, увеличивается с ростом ω и σ. Качественный характер решения не зависит от соотношения величины α и параметра h, равного отношению линейной и объемной скоростей звука.

В случае малого времени релаксации в зависимости от значений параметров ω, σ, α уравнение для температуры продуктов (31) может иметь один, два или три положительных корня, что приводит к интересным, неоднозначно трактуемым результатам.

Если $\alpha < 1$ и $\alpha < h$, что соответствует низкоскоростному режиму распространения фронта, то существует область параметров, где уравнение (31) имеет три решения, которые условно обозначим $\theta_{\rm I} < \theta_{\rm II} < \theta_{\rm III}$. При заданном значении коэффициента связанности ω минимальное значение температуры $\theta_{\rm I}$ растет, а $\theta_{\rm II}$ уменьшается с увеличением α; при некотором значении $\alpha = \alpha_*$ эти решения сливаются

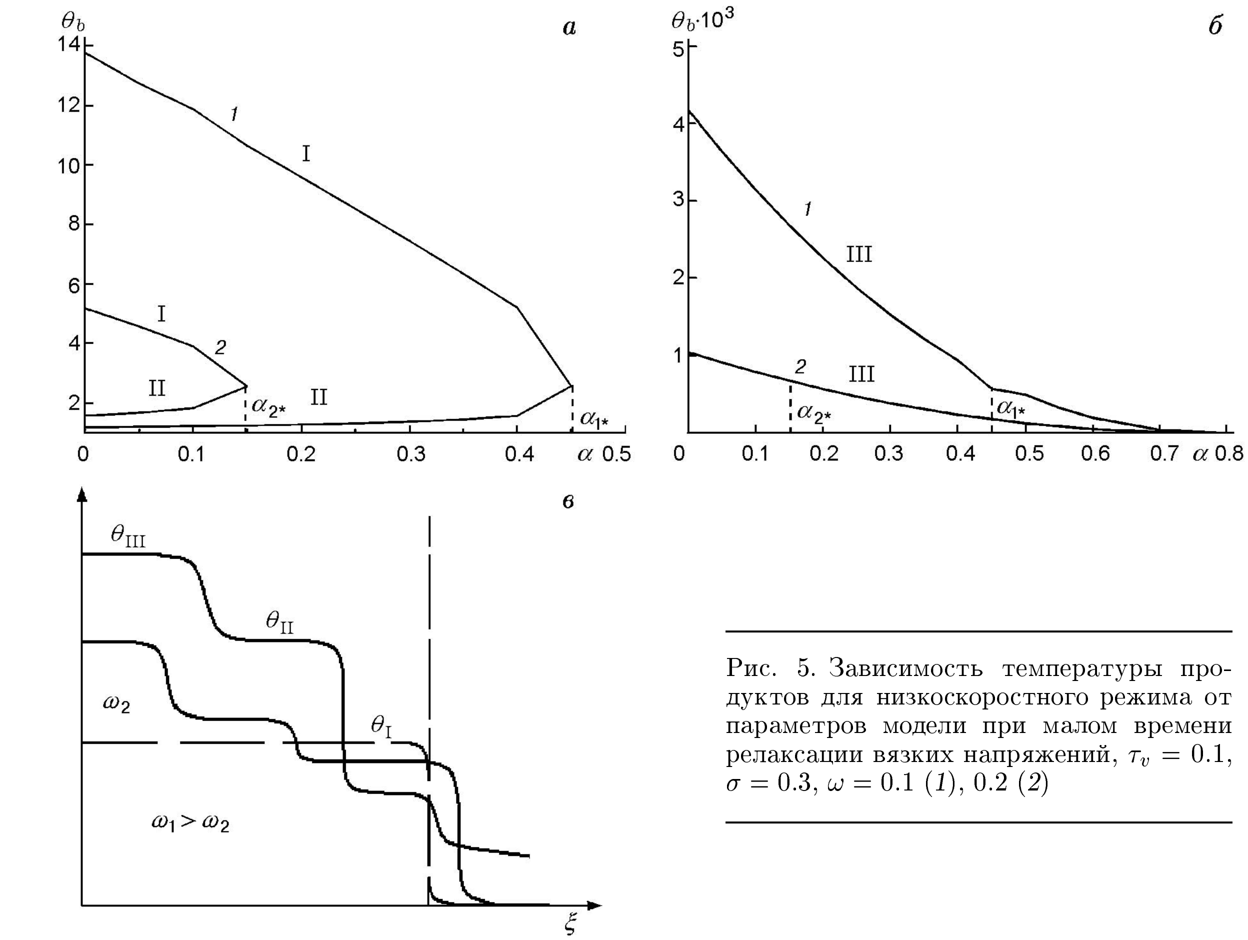

Рис. 5. Зависимость температуры продуктов для низкоскоростного режима от параметров модели при малом времени релаксации вязких напряжений, $\tau_v = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $\omega = 0.1$ (*1*), 0.2 (*2*)

(рис. 5,*а,б*) и при $\alpha > \alpha_*$ этих решений ($\theta_{\rm I}$ и $\theta_{\rm II}$) не существует. Температура $\theta_{\rm III}$ резко возрастает при $\alpha < \alpha_*$; при $\alpha > \alpha_*$ она постепенно уменьшается практически до нуля. Этот результат можно трактовать различным образом.

1. Реальному значению температуры продуктов соответствует минимальный положительный корень уравнения, а максимальный корень $\theta_{\rm III} \gg 1$ этого уравнения должен быть отброшен как физически нереальный. Тогда $\alpha = \alpha_*$ соответствует переходу в область параметров, где решение не существует. В некоторой области $\alpha > \alpha_*$, где корень $\theta_{\rm III}$ принимает конечные значения, можно вновь говорить о появлении «физически реального» решения. Но остается непонятным критерий «реального» значения $\theta_{\rm III}$.

2. Все три значения температуры имеют смысл. До $\alpha = \alpha_*$ фронт реакции имеет трехтемпературную структуру, например, такую, как на рис. 5,*в* (кривая *1*); при $\alpha > \alpha_*$ — однотемпературную, с высокой или низкой температурой продуктов и высокой скоростью, но меньшей скорости звука. Именно к такой трактовке приводит анализ результатов работ [1, 2, 7, 8]. Скорость фронта m рассчитываем, используя минимальное значение температуры.

3. Можно предложить и третий вариант: каждому значению температуры $\theta_{\rm I}$, $\theta_{\rm II}$ и $\theta_{\rm III}$ соответствует свое значение скорости m. Тогда $\alpha = \alpha_*$ есть «точка бифуркации», в которой число решений при уменьшении α утраивается.

По-видимому, стоит согласиться с авторами работы [7], что наиболее обоснована вторая точка зрения.

При $\alpha = h = 0.83$ решения уравнения (31) не существует.

В области изменения α от h до 1 существует единственный положительный корень уравнения для температуры продуктов, меньший единицы, и, очевидно, мы имеем высокоскоростной (но со скоростью меньше скорости звука) низкотемпературный режим. Темпера-

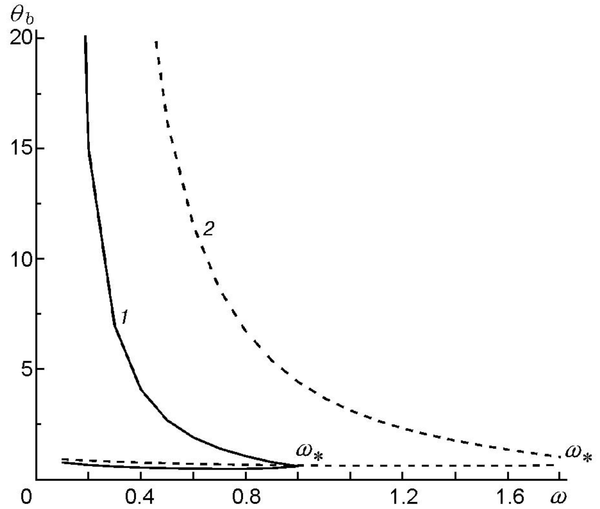

Рис. 6. Зависимость температуры продуктов от параметров модели для высокоскоростного режима при большом времени релаксации вязких напряжений, $\sigma = 0.3$, $\alpha = 1.1$ (*1*), 1.5 (*2*)

тура продуктов $\theta_b < 1$ и скорость фронта в этой области параметров уменьшаются с ростом ω и σ.

В сверхзвуковом режиме, в отличие от предыдущего случая ($\alpha < 1$), малому времени релаксации ($\tau_v \ll 1$) соответствуют два значения температуры или, что то же самое, при $\alpha > 1$ уравнение (31) имеет два положительных решения. Меньший корень сначала убывает с ростом коэффициента связанности ω (рис. 6), а затем возрастает, сливаясь с большим корнем при $\omega = \omega_*$, который, в свою очередь, уменьшается при увеличении α. При $\omega > \omega_*$ решение не существует. Критическое значение ω_* увеличивается с ростом α (кривые *1, 2*) и σ (на рисунке не показано). Этот результат аналогично предыдущему можно трактовать по-разному.

1. За температуру продуктов θ_b следует принимать меньший корень.

2. Каждому значению θ_b соответствует свое значение скорости фронта.

3. Можно говорить о двухтемпературной структуре стационарного фронта горения.

Прояснить ситуацию можно будет только при численном решении задачи, основанном на проведенном здесь асимптотическом исследовании и использовании качественных методов анализа динамических систем.

Отметим, что разнообразные режимы превращения со сложной структурой реакционного фронта наблюдаются в модели именно в области малого значения коэффициента связанности ω. В то же самое время классическая тепловая теория горения пренебрегает связанностью тепловых и механических процессов на основании малости этого же коэффициента. Проведенный анализ показывает, что малое значение какого-либо параметра может сильно влиять на результат решения задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено аналитическое решение задачи о распространении фронта превращения в вязкоупругой среде для малого и большого времени релаксации вязких напряжений (по сравнению с характерным временем химического превращения). Обнаружено, что уже малое отклонение параметра τ_v от значения, характерного для идеальных сред (твердого тела, для которого $\tau_v = \infty$, и вязкой жидкости, где $\tau_v = 0$), приводит к появлению новых качественных эффектов. Выявлены различные режимы превращения и области параметров модели, где эти режимы существуют. Показано, что реологические особенности среды оказывают существенное влияние как на число возможных режимов превращения, так и на их характеристики (скорость фронта, его структуру и температуру продуктов). Учитывая специфику асимптотических методов [5–8], следует ожидать, что применимость решения выходит за рамки ограничений $\tau_v \gg 1$ и $\tau_v \ll 1$, принятых при его построении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимохин А. М., Князева А. Г.** Режимы распространения фронта реакции в связной термомеханической модели твердофазного горения // Хим. физика. 1996. Т. 15, № 10. С. 1497–1514.
2. **Князева А. Г.** Решение задачи термоупругости в форме бегущей волны и его приложение к анализу возможных режимов твердофазных превращений // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 14–26.
3. **Князева А. Г., Дюкарев Е. А.** Модель распространения стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 41–51.
4. **Боли Б., Уайнер А.** Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
5. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
6. **Буркина Р. С., Вилюнов В. Н.** Асимптотика задач теории горения: Учебное пособие. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. С. 100.

7. **Холопов В. М., Худяев С. И.** Неединственность стационарной волны горения // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 5. С. 91–97.

8. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Асимптотический анализ распространения фронта экзотермической одноступенчатой реакции n-го порядка в конденсированной фазе // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11, № 2. С. 179–188.

Поступила в редакцию 5/VII 2004 г.,
в окончательном варианте — 13/IV 2006 г.