ПМТФ, № 5, 1962

О РАЗОГРЕВЕ ЭЛЕКТРОНОВ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

В. М. Елеонский, Ю. Я. Поляк

(*Свердловск*)

Явление омического нагрева электронов покоящейся плазмы наиболее полно рассмотрено в работах В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича [1,2]. Было показано, что как в сильно ионизованной плазме, так и в слабо ионизованной плазме инертных газов могут реализоваться два устойчивых состояния, с существенно различными значениями электронной температуры. Необходимым условием является быстрое падение сечения рассеяния электрона с возрастанием скорости. Последнее имеет место в сильно ионизованной плазме из-за падения резерфордовского сечения рассеяния электрона на ионах с ростом скорости и в плазме инертных газов из-за быстрого падения рамзауэровских сечений рассеяния электронов на инертных атомах при возрастании скорости электронов. Было найдено, что переход из слабо разогретого состояния в сильно разогретое состояние происходит, если напряженность внешнего электрического поля превосходит некоторое критическое значение и определена зависимость последнего от параметров плазмы.

В настоящем сообщении рассмотрен разогрев электронов в потоке плазмы, движущейся поперек магнитного поля с постоянной скоростью. При этом принято, что разогрев обусловлен полем $E_0 = \frac{1}{c} U_0 \times B$. Получена зависимость электронной температуры от температуры торможения плазменного потока для слабо и сильно ионизованной плазмы. Для модели постоянной длины свободного пробега выполнено сравнение значений средней энергии, вычисленной по точной функции распределения и в гидродинамическом приближении.

Для слабо ионизованной плазмы, движущейся поперек магнитного поля $\mathbf{B}$, на основании метода, впервые предложенного Б. И. Давыдовым [3] и развитого в работах В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича [1], находим, что система уравнений, определяющих функцию распределения электронов

$$f(\mathbf{v}, t) = f_0(v, t) + \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \delta\mathbf{f}(v, t)$$

имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^{-2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[\frac{2}{3} \frac{e}{mc} \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B} \delta\mathbf{f} - \Delta E(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} - v\omega_{\Delta E} f_0 \right] \right\} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{f} + \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \delta\mathbf{f} + \frac{e}{mc} \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \omega_{\Delta p} \delta\mathbf{f} = 0$$

$$\omega_{\Delta p} = v \Sigma_\alpha n_\alpha \sigma_{l,\alpha}(v), \qquad \omega_{\Delta E} = v \Sigma_\alpha \frac{2m}{M_\alpha} n_\alpha \sigma_{l,\alpha}(v), \qquad \Delta E(v) = \frac{kT_0}{m} \omega_{\Delta E}$$

Здесь $\mathbf{U}_0$ — скорость плазменного потока поперек магнитного поля; $\omega_{\Delta p}$ — частота столкновений с передачей импульса; $\omega_{\Delta E}$ — частота столкновений с передачей энергии; наконец, $\sigma_{l,\alpha}(v)$ — транспортное сечение рассеяния электрона на α-й тяжелой компоненте плазмы; предполагается, что температура всех тяжелых компонент плазмы одинакова. Кроме того, в (1) удержаны столкновительные члены, соответствующие только упругим процессам. Используя разложение

$$\delta\mathbf{f} = \frac{e}{m} \left[\mathbf{E}_0 \delta f_\parallel + \frac{\mathbf{B}}{B} \times \mathbf{E}_0 \delta f_1 \right], \qquad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}$$

находим, что

$$\ln f_0 = -\int_0^v u\,du \left\{\frac{kT_0}{m} + \frac{2}{3}\,\frac{\omega_{\Delta p}(E_0 e/m)^2}{\omega_{\Delta E}\,[\omega_{\Delta p}^2 + \omega_c^2]}\right\}^{-1} \tag{2}$$

$$\delta f_{\perp} = \frac{\omega_c}{\omega_{\Delta p}{}^2 + \omega_c{}^2}\,\frac{\partial f_0}{\partial v}, \qquad \delta f_{\parallel} = \frac{\omega_{\Delta p}}{\omega_{\Delta p}{}^2 + \omega_c{}^2}\,\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{3}$$

Соотношения (2), (3) приводят к тензору статической электропроводности $\sigma_{\alpha\beta}$, обладающему структурой

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(\sigma_{\parallel}\,\delta_{\beta\gamma} + \sigma_{\perp}\,\frac{B\delta}{B}\,e_{\alpha\beta\gamma}\right)\Omega_{\alpha\gamma} \tag{4}$$

где

$$\sigma_{\parallel} = -\frac{e^2 n_e}{m}\int_0^\infty dv\,v^3\,\frac{\omega_{\Delta p}}{\omega_{\Delta p}^2 + \omega_c{}^2}\,\frac{\partial f_0}{\partial v} \qquad \left(\Omega_{\alpha\beta} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\varphi\,\sin\theta\,d\theta\,\frac{v_\alpha v_\beta}{v^2}\right)$$

$$\sigma_{\perp} = -\frac{e^2 n_e}{m}\int_0^\infty dv\,v^2\,\frac{\omega_c}{\omega_{\Delta p}^2 + \omega_c{}^2}\,\frac{\partial f_0}{\partial v} \qquad \left(\omega_c = \frac{eB}{mc}\right)$$

$\Omega_{\alpha\beta}$ — универсальный тензор второго ранга, $e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Полагая $\omega_{\Delta E} / \omega_{\Delta p} = 2m / M$, найдем, что функция распределения электронов слабо ионизованной плазмы, движущейся поперек магнитного поля, имеет вид

$$f_0(E) = \exp\left\{-\beta_0\int_0^E dE\,\varphi(E)\right\} \tag{5}$$

Здесь

$$\varphi(E) = \left[1 + \frac{\Delta T}{T_0}\,\frac{\omega_c{}^2}{\omega_c{}^2 + \omega_{\Delta p}^2}\right]^{-1}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{kT_0}, \qquad E = \frac{mv^2}{2}, \qquad \frac{3k\Delta T}{2} = \frac{MU_0}{2}$$

Следовательно, $T_0 + \Delta T$ — температура торможения плазменного потока. Перейдем к определению средней энергии электронов в гидродинамическом приближении, для чего совершим над функцией распределения $f_0(E)$ тождественное преобразование

$$f_0(E) = \exp\left\{-\beta_0\int_0^E \varphi(E)\,dE\right\} \equiv e^{-\beta^\circ E}\exp\left\{\beta^\circ E - \int_0^E \varphi(E)\,\beta_0\,dE\right\} =$$

$$= e^{-\beta^\circ E}\left(1 + \left[\beta^\circ E - \beta_0\int_0^E dE\,\varphi(E)\right] + \ldots\right) \tag{6}$$

где β° — параметр, который будет доопределен ниже. Используя разложение (6), получаем для средней энергии электронов

$$\langle E\rangle = \langle E^\circ\rangle\left(1 + \frac{5}{2} - \beta_0\int_0^\infty dE\,\varphi(E)\,\frac{\Gamma[^5/_2, \beta^\circ E]}{\Gamma[^5/_2]} + \ldots\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{3}{2} - \beta_0\int_0^\infty dE\,\varphi(E)\,\frac{\Gamma[^3/_2, \beta^\circ E]}{\Gamma[^3/_2]} + \ldots\right)^{-1} \tag{7}$$

Здесь

$$\langle E^\circ\rangle = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta^\circ}, \qquad \Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

Соотношения (6), (7) являются по существу рядами теории возмущений по отношению к основному — гидродинамическому состоянию $f^\circ = e^{-\beta^\circ E}$. Полагая, что отклонения от распределения Максвелла в среднем малы, можно доопределить параметр β° из требования обращения в нуль поправки первого приближения к средней энергии гидродинамического состояния. Последнее приводит к трансцендентному уравнению для β° вида

$$1 = \beta_0 \int_0^\infty dE \varphi(E) \left(\frac{\Gamma[{}^5/_2, \beta^\circ E]}{\Gamma[{}^5/_2]} - \frac{\Gamma[{}^3/_2, \beta^\circ E]}{\Gamma[{}^3/_2]}\right) \tag{8}$$

или

$$\beta^\circ = \beta_0 \int_0^\infty dx e^{-x} \frac{x^{3/2}}{\Gamma[{}^3/_2 + 1]} \varphi\left[\frac{x}{\beta^\circ}\right] \tag{9}$$

На основании теоремы о среднем получаем более простое уравнение

$$\frac{T^\circ}{T_0} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega_{\Delta p}^2 [{}^3/_2 k T_\Gamma]} \tag{10}$$

совпадающее с уравнением элементарной теории разогрева электронов плазмы [1].

Рассмотрим случай постоянной длины свободного пробега $\lambda = \mathrm{const}$. Соотношение (5) приводит к

$$f_0(E) = \left[1 + \frac{\beta_0 E}{E_\lambda (1 + \Delta T / T_0)}\right]^{E_\lambda \Delta T / T_0} e^{-\beta_0 E} \qquad \left(E_\lambda = \frac{m(\lambda\omega_c)^2}{2kT_0}\right) \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim f_0(E) = \exp[-\beta_0 E] \quad \text{при } E_\lambda \to 0$$

$$\lim f_0(E) = \exp\left[-\frac{\beta_0 E}{1 + \Delta T / T_0}\right] \quad \text{при } E_\lambda \to \infty$$

Таким образом, при любом E_λ функция распределения электронов расположена между максвелловскими распределениями с температурами T_0 и $T_0 + \Delta T$. Для средней энергии электронов, соответствующей распределению (11), можно найти аналитическое выражение, а именно

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}\beta_0 \left[E_\lambda\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)\right]^{1/2} \frac{W_{\nu-1/2,\, \nu+3/2}[E_\lambda(1 + \Delta T / T_0)]}{W_{\nu,\, \nu+1}[E_\lambda(1 + \Delta T / T_0)]} \tag{12}$$

$$\left(\nu = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} E_\lambda \frac{\Delta T}{T_0}\right)$$

Здесь $W_{\nu,\mu}$ — функция Уиттекера.

С другой стороны, в гидродинамическом приближении на основании (10) получаем следующее уравнение для электронной температуры:

$$\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right)^2 + (E_\lambda - 1)\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right) - E_\lambda\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right) = 0 \tag{13}$$

Приводим сравнение точного значения средней энергии $\langle E\rangle = {}^3/_2 kT$ со значением $\langle E^\circ\rangle = {}^3/_2 kT^\circ$, соответствующим гидродинамическому приближению при $E_\lambda = 1$

$\Delta T / T_c=0$	1	2	3	4	5
$T/T_c=1$	1.286	1.506	1.691	1.839	2.035
$T^\circ/T_c=1$	1.414	1.732	2.000	2.236	2.449

Отметим, что из (13) следует существование единственной стационарной ветви для электронной температуры, причем последняя монотонно возрастает с возрастанием температуры торможения потока и приближается к зависимости $T^\circ = T_0 + \Delta T$ при $E_\lambda \to \infty$.

Наконец, рассмотрим разогрев электронов в потоке сильно ионизованной плазмы. Уравнение (10) приводит к уравнению четвертой степени

$$\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right)^4 - \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right)^3 + (\omega_c\tau)^{-2}\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right) - (\omega_c\tau)^{-2} = 0 \qquad (14)$$

Очевидно, что последнее имеет не менее двух действительных корней разных знаков. Исследование дискриминатора и ряда функций Штурма уравнения (14) показывает, что при одновременном выполнении неравенств

$$\Delta T / T_0 > 3, \qquad \omega_c T < 0.24 \qquad (15)$$

последнее обладает тремя положительными корнями, причем больший корень не превосходит значения $T_0 + \Delta T$. Действительно, записав (14) в виде

$$\left[\left(\frac{T^\circ}{T_0}\right)^3 + (\omega_c\tau)^{-2}\right]\left[\frac{T^\circ}{T_0} - 1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right] = -(\omega_c\tau)^{-2}\frac{\Delta T}{T_0}$$

находим, что для $T^\circ / T_0 > 0$ соотношение может быть удовлетворено, если $T_e / T_0 < 1 + \Delta T / T_0$. Таким образом, условия (15) будут необходимыми для существования в сильно ионизованной движущейся плазме двух ветвей электронной температуры. Численные расчеты показывают, что для $\omega_c\tau = 0.20$ при $1 \leqslant \Delta T / T_0 \lesssim 4$ происходит медленный рост электронной температуры с ростом температуры торможения потока. Далее, при $\Delta T / T_0 \gtrsim 4$ происходит переход с нижней стационарной ветви на верхнюю, сопровождающийся резким возрастанием электронной температуры плазмы.

В заключение авторы благодарят А. В. Гуревича за обсуждение работы и З. П. Антоненко, выполнившую численные расчеты.

Поступила 16 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. и Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. УФН, 1960, т. 70, стр. 201.
2. Гуревич А. В. О некоторых особенностях омического нагревания электронного газа в плазме. ЖЭТФ, 1960, т. 38, стр. 116.
3. Давыдов Б. И. К теории движения электронов в газах и в полупроводниках. ЖЭТФ, 1937, т. 7, стр. 1069.