

4. Кутушев А. Г. Об экранирующих свойствах однородных и неоднородных слоев моно- и полидисперсных газовзвесей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1991.— Вып. 100.
5. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1.
6. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесах // Итоги науки. Механика жидкости и газа.— М.: ВИНТИ, 1981.— Т. 16.
7. Тараканов С. В., Павлов И. Ю., Тодес О. М., Гольцикер А. Д. Анализ процесса формирования релаксационной ударной волны в аэровзвеси химически инертных жидких частиц // Взрывное дело.— 1978.— № 80/37.
8. Аманбаев Т. Р., Ивандаев А. И. Структура ударных волн в двухфазных смесях газа с каплями жидкости // ПМТФ.— 1988.— № 2.
9. Engel O. G. Fragmentation of water drops in the zone behind an air shock // J. Res. Nat. Bur. Stand.— 1958.— V. 60, N 3.
10. Ranger A. A., Nicholls J. A. Aerodynamic shattering of liquid drops // AIAA J.— 1969.— V. 7, N 2.
11. Борисов А. А., Гельфанд Б. Е., Натанзон М. С., Коссов О. М. О режимах дробления капель и критериях их существования // ИФЖ.— 1981.— Т. 40, № 1.
12. Базаров И. П. Термодинамика.— М.: Высш. шк., 1983.
13. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике.— М.: Наука, 1982.
14. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Модифицированный метод «крупных частиц» для расчета нестационарных волновых процессов в многофазных дисперсных средах // ЖВММФ.— 1977.— Т. 17, № 6.
15. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г. Численное исследование нестационарных волновых течений газовзвесей с выделением границ двухфазных областей и контактных разрывов в несущем газе // ЧММСС.— 1983.— Т. 14, № 6.

г. Тюмень

Поступила 16/VI 1992 г.

УДК 536.46

С. Ю. Менжинский, Н. Н. Пилюгин

ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ГОРЯЩЕГО ТЕЛА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

Исследование сверхзвукового обтекания горячей модели представляет интерес для создания математической теории внутренней баллистики, для понимания процессов горения твердого топлива при вылете из сопла двигателя, для имитации физических процессов при метеорных явлениях [1], при изучении особенностей горения и детонации взрывоопасных газовзвесей. К настоящему времени достаточно полно изучены стационарные процессы горения углерода или материалов теплозащитного покрытия на его основе [2]. В то же время для горения материалов сложного произвольного химического состава такой полный теоретический анализ отсутствует и приходится использовать в основном эмпирические данные. Одной из неисследованных задач является вопрос о выгорании поверхности тела при сверхзвуковом движении и об изменении его аэродинамических характеристик. В [1] приведены результаты экспериментов на баллистической установке упора массы и картины сверхзвукового течения около хорошо горящих моделей из пиротехнического состава.

В данной работе найдено изменение формы при горении сферического и параболического тел, их сопротивления и массы в конце гиперзвукового движения в баллистической трассе для условий [1]. Вычислены изменения по времени радиуса кривизны и боковой площади, которая определяет свечение поверхности горящих моделей.

1. Основные представления и допущения. В настоящее время имеется большое число различных механизмов, объясняющих горение твердых топлив конкретного состава [3]. Упрощенная модель горения твердой поверхности пиротехнического состава типа пороха состоит в сле-

дующем. Считается, что химическая реакция начинается при мгновенном поджиге модели в стволе [4] и подчиняется простейшей схеме: кислородосодержащее топливо $\rightarrow$ газообразные продукты реакции. Все тепло, поступающее из зоны реакции в твердую фазу, обеспечивает необходимый для поддержания непрерывного горения тепловой поток. Предполагается [3, 4], что температура горящей поверхности постоянная, горение имеет одномерный характер и происходит послойно, газификация материала идет в узкой приповерхностной зоне. Газовая фаза рассматривается как квазистационарная, мгновенно подстраивающаяся к тепловому состоянию приповерхностного слоя.

Согласно современным представлениям, поток продуктов горения, движущийся вдоль поверхности, существенно влияет на процессы тепло- и массопередачи. Турбулизация пограничного слоя приводит к интенсификации процессов переноса, а также к увеличению конвективного теплообмена, что вызывает рост скорости горения поверхности. Это явление называется эрозийным горением [3, 4]. В известных теориях эрозийного горения отсутствует обоснование правомочности использования зависимости теории турбулентного перемешивающего пограничного слоя для описания процессов переноса в зоне горения [3]. Если бы основные характеристики всех физико-химических процессов были хорошо известны, то можно было бы рассчитать линейную скорость горения поверхности в зависимости от давления, температуры и состава, т. е. скорость перемещения границы раздела фаз относительно неподвижной конденсированной фазы. Однако процессы, сопровождающие явление эрозийного горения, пока полностью не исследованы [3—5]. Поэтому при обработке экспериментальных данных по горению материалов типа порохов широко используется экстраполяционная формула, задающая скорость горения в виде [3, 4]

$$(1.1) \quad v_n = A p_w^{\nu},$$

где A , ν — эмпирические константы; p_w — давление на поверхности тела.

В [6] выполнена обработка экспериментальных данных [1] по излучению паров и получены константы A , ν , которые использованы ниже. Скорость горения (1.1) лимитируется скоростью реакции в газовой фазе [4], которая обеспечивает необходимый для поддержания непрерывного горения тепловой поток. Это приводит к поддержанию постоянной температуры поверхности T_w , равной температуре разложения материала [4]. Для порохов превращение конденсированного вещества в газ осуществляется необратимым образом вследствие химической реакции разложения. Предположение о постоянной температуре поверхности горящего материала является оправданным при больших энергиях активации этой реакции [3]. Теорию горения, использующую приближение постоянной температуры, называют теорией идеального горения [4]. Процесс горения идеален в том смысле, что делается важное предположение относительно кинетики его разложения.

Оценки безразмерных параметров в [1, 6] показали, что вдув массы газообразных продуктов с поверхности для данного материала достаточно интенсивен, так что применима асимптотическая модель сильного вдува [7]. В этом случае течение в ударном слое можно представить в виде трех подобластей: невязкого течения воздуха за скачком уплотнения, невязкой области вдува около поверхности и разделяющей их тонкой области «подвешенного» пограничного слоя. Асимптотическое решение газодинамических уравнений в слое вдува и сравнение с численными расчетами [6, 7] показало, что распределение давления около поверхности с высокой точностью подчиняется формуле Ньютона. При тепловыделении вблизи поверхности может меняться структура течения, однако далее считается, что на распределение давления это существенно не влияет (или влияет только через изменение формы горящей поверхности).

2. Решение уравнения, описывающего изменение формы горящего тела. Рассмотрим задачу об уносе массы и изменении формы пространственного тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью при горении его поверхности. Ограничимся случаем движения тела под нулевым углом атаки, при отсутствии подъемной силы и без вращения.

В данной работе поверхность тела рассматривается как поверхность разрыва, форма и движение которой должны быть найдены в процессе решения. Пусть x, y, z — прямоугольные координаты, где ось z направлена против набегающего потока. Если уравнение поверхности тела задано в явном виде $z = z(x, y, t)$, то для скорости перемещения по нормали точек поверхности имеем [8]

$$(2.1) \quad v_n = \frac{-\frac{\partial z}{\partial t}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Уравнение (2.1) описывает изменение формы тела при известной зависимости v_n от геометрии тела, физических процессов на поверхности и начальном условии $t = 0, z = z_0(x, y, 0)$. В качестве дополнительного условия задается скорость горения в виде (1.4).

При гиперзвуковых скоростях полета распределение давления для широкого класса тел при равномерном обтекании хорошо описывается формулой Ньютона [6, 7]

$$(2.2) \quad p_w = \rho_\infty v_\infty^2(t) n_z^2,$$

$$(2.3) \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}};$$

$$(2.4) \quad z_x' = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y' = \frac{\partial z}{\partial y},$$

где $v_\infty(t)$ — скорость тела; ρ_∞ — плотность набегающего потока газа. Подставляя выражение для скорости горения (1.4) и (2.3) в соотношение (2.1), получим

$$(2.5) \quad -\frac{\partial z}{\partial \tau} = (1 + p^2 + q^2)^{1/2 - \nu} = H(p, q), \quad \tau = \int_0^t A(\rho_\infty v_\infty^2(t))^\nu dt, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Рассмотрим решение уравнения (2.5) в случае, когда начальная форма задана параметрически:

$$t = 0: x = s_1, y = s_2, z = z_0(s_1, s_2), p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial s_1}, q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial s_2}.$$

Тогда, используя метод характеристик (метод Коши) [9], находим решение в явном виде

$$(2.6) \quad x(\tau) = s_1 + \tau \frac{(1 - 2\nu) p_0}{(1 + q_0^2 + p_0^2)^{\nu+1/2}}, \quad y(\tau) = s_2 + \tau \frac{(1 - 2\nu) q_0}{(1 + q_0^2 + p_0^2)^{\nu+1/2}},$$

$$z(\tau) = z_0(s_1, s_2) - \tau \frac{2\nu(p_0^2 + q_0^2) + 1}{(1 + q_0^2 + p_0^2)^{\nu+1/2}}.$$

Уравнения (2.6) описывают изменение формы пространственного тела с течением времени. Рассмотрим подробнее случай, когда имеется осесимметричное тело с уравнением поверхности $y = y(x, t)$, где x, y — декартова система координат, связанная с первоначальной формой тела $y = y_0(x)$, начало которой находится в критической точке, а ось Ox направлена по вектору скорости набегающего потока, ось Oy — по нормали к Ox . Тогда, проводя те же рассуждения, получим уравнение, опи-

связующее изменение формы осесимметричного тела с течением времени:

$$(2.7) \quad -\frac{\partial y}{\partial \tau} = q_0^{2\nu} (1 + q^2)^{1/2-\nu} = H(q), \quad \tau = \int_0^t A(\rho_\infty v_\infty^2)^\nu dt, \quad q = y'_x.$$

Если начальные условия заданы как

$$t = 0, \quad x = s, \quad y = y_0(s), \quad \frac{dy_0}{ds} = q_0,$$

то, применяя метод характеристик, находим решение в явном виде

$$(2.8) \quad x(s, \tau) = s + \tau \frac{q_0^{2\nu-1} (2\nu + q_0^2)}{(1 + q_0^2)^{\nu+1/2}}, \quad y(s, \tau) = y_0(s) + \tau \frac{q_0^{2\nu} (2\nu - 1)}{(1 + q_0^2)^{\nu+1/2}}.$$

Вычислим радиус кривизны в любой точке тела. Так как поверхность задана уравнением $y = y(x, t)$, то

$$(2.9) \quad y(s, t) = y(x(s, t), t), \quad y'_s = q_0 x'_s.$$

Используя (2.9), для радиуса кривизны имеем

$$R = \frac{1}{\left| \frac{dq_0}{ds} \right|} (1 + q_0^2)^{3/2} \left| 1 + \tau \frac{(2\nu - 1) q_0^{2\nu-2} (2\nu - q_0^2)}{(1 + q_0^2)^{3/2+\nu}} \frac{dq_0}{ds} \right|,$$

откуда для момента времени $t = 0$ получим

$$R_0 = \frac{1}{\left| \frac{dq_0}{ds} \right|} (1 + q_0^2)^{3/2}.$$

Окончательно радиус тела примет вид

$$(2.10) \quad \frac{R}{R_0} = \left| 1 + \tau \frac{(2\nu - 1) q_0^{2\nu-2} (2\nu - q_0^2)}{(1 + q_0^2)^{3/2+\nu}} \frac{dq_0}{ds} \right|.$$

Характеристиками уравнения (2.7) являются прямые линии. Если ввести φ и ψ — углы наклона к оси Ox исходной образующей тела и произвольной характеристики, то между φ и ψ из (2.8) имеет место связь

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi (2\nu - 1)}{2\nu + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

На рис. 1 приведена зависимость $\operatorname{tg} \psi$ от φ для $\nu = 0,27; 0,4; 1,0; 3,0$ (кривые 1—4 соответственно). Функция $\psi = f(\varphi)$ имеет экстремум при $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2\nu}$, который равен $\operatorname{tg} \psi = \sqrt{2\nu}(2\nu - 1)/4\nu$. Этот экстремум является максимумом при $\nu > 1/2$ и минимумом при $\nu < 1/2$.

При $\nu = 1/2$ характеристики уравнения (2.7) параллельны оси Ox . В дальнейшем будет показано, что для затупленных тел случай $\nu = 1/2$ критический.

3. Изменение формы, массы и коэффициента сопротивления для сферического тела. Все полученные выше соотношения справедливы для произвольного осесимметричного тела. Рассмотрим частный случай, когда в начальный момент тело имело форму сферы с начальным радиусом R_0 . Тогда для его формы запишем соотношения

$$(3.1) \quad x_0(s) = R_0(1 - s), \quad y_0(s) = R_0 \sqrt{1 - s^2}, \quad q_0 = \frac{dy_0}{ds} = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}},$$

подставляя которые в (2.8), получим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x &= R_0(1 - s) + \tau s^{2\nu-1} [2\nu + (1 - 2\nu)s^2], \\ y &= R_0 \sqrt{1 - s^2} + \tau (2\nu - 1) s^{2\nu} \sqrt{1 - s^2}. \end{aligned}$$

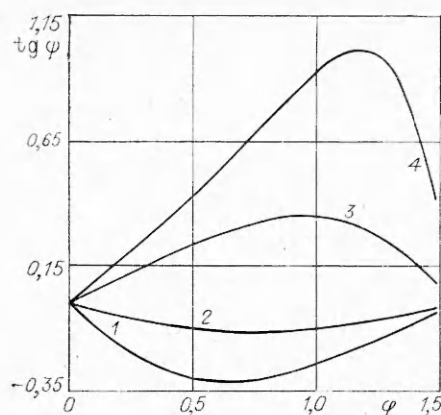


Рис. 1

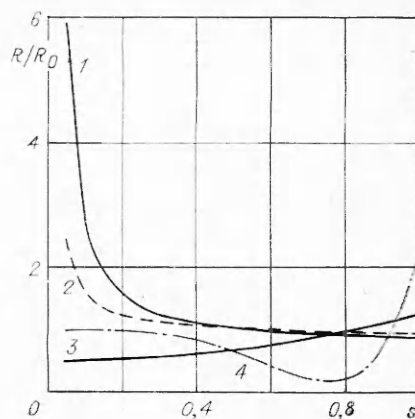


Рис. 2

Соотношение (3.2) описывает изменение формы тела с течением времени. Найдем выражение для радиуса кривизны тела в любой его точке. Для этого подставим в уравнение (2.10) соотношение (3.1):

$$R/R_0 = 1 - \sigma [2\nu(2\nu - 1)s^{2\nu-2} + (1 - 4\nu^2)s^{2\nu}], \quad \sigma = \tau/R_0.$$

В критической точке ($s = 1$) отсюда следует

$$R/R_0 = 1 + (2\nu - 1)\sigma.$$

На рис. 2 построена зависимость R/R_0 от s для $\sigma = 0,2$ и разных ν . Кривые 1—4 соответствуют $\nu = 0,27; 0,4; 1,0; 3,0$. Отметим, что при $\nu > 1$ радиус $R(s)$ меняется немонотонным образом.

Видно, что при $\nu > 1/2$ с течением времени тело в критической точке становится все более затупленным. При $\nu = 1/2$ радиус кривизны не меняется не только в критической точке, но и во всех других точках тела. В этом случае тело «сгорает» параллельно самому себе. Для затупленного носка из (3.2) при $s \rightarrow 1$, $q_0 \rightarrow \infty$ получим изменение его координаты со временем: $x(0, \tau) = \tau$. При $\nu > 1/2$ точка $s = 0$ не меняет своего положения в нашей системе координат с течением времени. В случае, когда $\nu < 1/2$, положение точки $s = 0$ меняется с течением времени.

Выведем соотношения, выражающие изменение коэффициента лобового сопротивления C_D с течением времени, который имеет вид

$$C_D = C_p + C_R,$$

где C_p — коэффициент волнового сопротивления:

$$C_p = R^2 \left[\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 F \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_*} p_w(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi;$$

C_R — коэффициент реактивной силы, учитывающий влияние вдува:

$$C_R = R^2 \left[\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 F \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_*} \rho_w(\theta) v_w^2(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi;$$

F — переменная площадь миделя; ρ_w , v_w — плотность и скорость вдуваемых паров.

Оценки дают соотношение

$$\frac{C_R}{C_p} = \delta_0^2 = \frac{\rho_w^* v_w^{*2}}{\rho_\infty v_\infty^2} \sim 0,01 \ll 1.$$

Поэтому будем считать, что $C_D \approx C_p$. Используя формулу Ньютона (2.2), получим

$$(3.3) \quad C_p = \frac{4\pi}{F} \int_{\tau}^R \frac{yy'_x{}^3 dx}{1 + y'^2}.$$

Рассмотрим изменение массы тела с течением времени. Используя закон сохранения массы, запишем

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{F_1} (\rho_1 v_n) dF_1$$

(ρ_1 — плотность тела, dF_1 — элемент площади поверхности тела).

Применяя соотношение (1.1) и формулу Ньютона для давления на поверхности тела, а также переходя от дифференцирования по t к дифференцированию по τ , находим

$$\frac{dM}{d\tau} = - 2\pi\rho_1 \int_{\tau}^{R_0} \frac{yy'_x{}^{2\nu}}{(1 + y'^2)^{\nu-1/2}} dx.$$

Формула, выражающая зависимость площади боковой поверхности тела F_1 от времени, имеет вид

$$(3.4) \quad F_1 = 2\pi \int_{\tau}^{R_0} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Рассмотрим отдельно три случая ($\nu < 1/2$, $\nu > 1/2$, $\nu = 1/2$) и для каждого из них найдем зависимость коэффициента лобового сопротивления и массы от времени.

1. $\nu > 1/2$. Используя соотношения (3.1) и (3.2), а также переходя в (3.3) от интегрирования по x к интегрированию по s , получим

$$C_p = 1 + \sigma \frac{8\nu - 4}{(\nu + 2)(\nu + 1)} + \sigma^2 \frac{(2\nu - 1)^2}{2(2\nu + 2)(2\nu + 1)}, \quad \sigma = \frac{\tau}{R_0}.$$

Здесь $F = \pi R_0^2$, так как площадь мицеля тела с течением времени не изменяется; $C_p(0) = 1$ при $\tau = 0$.

Рассмотрим теперь изменение массы тела с течением времени. Из соотношений (3.1) и (3.2) находим

$$\frac{dM}{d\tau} = - 2\pi\rho_1 \left[\frac{R_0^2}{2\nu + 1} + \frac{R_0^2 \tau}{2\nu + 1} \frac{2(2\nu - 1)^2}{16\nu^2 - 1} + \tau^2 \frac{(2\nu - 1)^3}{36\nu^2 - 1} \right].$$

Проинтегрируем это выражение по τ и разделим на $M_0 = \frac{2}{3} \pi R_0^3 \rho_1$, тогда

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{3\sigma}{2\nu + 1} - \frac{3(2\nu - 1)^2 \sigma^2}{16\nu^2 - 1} - \frac{(2\nu - 1)^3 \sigma^3}{36\nu^2 - 1}.$$

Таким образом, для $\nu > 1/2$ получаем в конечном виде нужные зависимости от времени коэффициента лобового сопротивления и массы. Проводя аналогичные рассуждения для площади боковой поверхности тела из (3.4), имеем

$$\frac{F_1}{F_{10}} = 1 - \frac{2\sigma}{2\nu + 1} - \frac{(2\nu - 1)^2}{16\nu^2 - 1} \sigma^2,$$

где F_{10} — площадь поверхности в начальный момент времени.

2. $\nu = 1/2$. В этом случае уравнения, описывающие изменение формы тела, примут вид

$$(3.5) \quad x = R_0(1 - s) + \tau, \quad y = R_0 \sqrt{1 - s^2}.$$

Тогда

$$C_p = (\pi R_0^2 / F)(1 - \sigma^4).$$

Для того чтобы найти окончательное соотношение для коэффициента C_p , нужно знать, как меняется радиус миделя с течением времени. Очевидно, что тело имеет наибольшую площадь вертикального сечения при $x = R_0$ и радиус миделя в этой точке есть не что иное, как значение y_0 , соответствующее $x = R_0$. Найдем эту величину. Из соотношения (3.5) $x = R_0$, $s = \sigma$ следует

$$y = R_m = R_0 \sqrt{1 - \sigma^2},$$

где R_m — радиус миделя. Тогда $F = \pi R_m^2 = \pi R_0^2 (1 - \sigma^2)$.

Окончательно получаем

$$\frac{C_p}{C_p(0)} = 1 + \sigma^2, \quad \sigma = \frac{\tau}{R_0}.$$

Теперь рассмотрим унос массы с поверхности тела. Используя соотношения (3.5) и интегрируя, после деления на M_0 окончательно имеем

$$\frac{M}{M_0} = 1 + \frac{1}{2} \sigma^3 - \frac{3}{2} \sigma.$$

Из соотношения (3.4) для площади боковой поверхности находим

$$F_1 / F_{10} = 1 - \sigma.$$

3. $v < 1/2$. Перейдем в соотношении (3.3) от интегрирования по x к интегрированию по s . Для этого будем использовать уравнения (3.1) и (3.2). Точке $x = \tau$ соответствует точка $s = 1$, а точке $x = R_0$ — точка $s_0(\tau)$, которая является корнем уравнения

$$(3.6) \quad R_0 = R_0(1 - s) + \tau s^{2v-1} [2v + (1 - 2v)s^2].$$

Тогда на основе (3.3) получим

$$(3.7) \quad \frac{C_p}{C_p(0)} = \frac{\pi R_0^2}{F} \left[1 - s_0^4(\tau) + \sigma(8v - 4) \left\{ \frac{v+1}{v+2} (1 - s_0^{2v+4}(\tau)) - \frac{v}{v+1} (1 - s_0^{2v+2}(\tau)) \right\} + 2\sigma^2(2v-1)^2 \left\{ \frac{2v+1}{2v+2} (1 - s_0^{4v+4}(\tau)) - \frac{2v}{2v+1} (1 - s_0^{4v+2}(\tau)) \right\} \right],$$

где F — площадь миделя; R_0 — радиус тела в начальный момент времени. Аналогично подсчитаем изменение массы:

$$(3.8) \quad \frac{dM}{d\tau} = -2\pi\rho_1 \left[\frac{R_0^2}{2v+1} (1 - s_0^{2v+1}(\tau)) + R_0\tau(2v-1) \left\{ \frac{2v+2}{2v+1} (1 - s_0^{4v+1}(\tau)) - \frac{2v}{4v-1} (1 - s_0^{4v-1}(\tau)) \right\} + \tau^2(2v-1)^2 \left\{ \frac{2v+1}{6v+1} (1 - s_0^{6v+1}(\tau)) - \frac{2v}{6v-1} (1 - s_0^{6v-1}(\tau)) \right\} \right].$$

Для того чтобы проинтегрировать соотношение (3.8), нужно знать явную зависимость $s_0(\tau)$ от τ . Явно найти ее не удастся, поэтому попытаемся найти приближенно. Для этого рассмотрим уравнение (3.6) при $s = s_0$:

$$R_0 = \tau [2vs^{2v-2} + (1 - 2v)s^{2v}].$$

Второй член в правой части этого соотношения является малым по сравнению с первым, поэтому им пренебрежем:

$$(3.9) \quad R_0 = \tau 2vs^{2v-2}, \quad s_0(\tau) = (2v\sigma)^{1/(2-2v)}.$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.7), имеем

$$(3.10) \quad \frac{C_p}{C_p(0)} = \frac{\pi R_0^2}{F} \left[1 - (2\nu\sigma)^{2/(1-\nu)} + \sigma(8\nu - 4) \left\{ \frac{\nu+1}{\nu+2} (1 - (2\nu\sigma)^{(\nu+2)/(1-\nu)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu}{\nu+1} (1 - (2\nu\sigma)^{(\nu+1)/(1-\nu)}) \right\} + 2\sigma^2(2\nu - 1)^2 \left\{ \frac{2\nu+1}{2\nu+2} (1 - (2\nu\sigma)^{(2\nu+2)/(1-\nu)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\nu}{2\nu+1} (1 - (2\nu\sigma)^{(2\nu+1)/(1-\nu)}) \right\} \right].$$

Заменяя в (3.8) $s_0(\tau)$ на его значение из (3.9) и интегрируя, получим

$$\frac{M}{M_0} = 1 - 3 \left[\frac{1}{2\nu+1} \left(\sigma \frac{(2\nu)^{(2\nu+1)/(2-2\nu)} (2-2\nu)}{3} \sigma^{3/(2-2\nu)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2\nu-1) \left\{ \frac{2\nu+2}{4\nu+1} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{(2\nu)^{(4\nu+1)/(2-2\nu)} (2-2\nu)}{5} \sigma^{5/(2-2\nu)} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\nu}{4\nu-1} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{(2\nu)^{(4\nu-1)/(2-2\nu)} (2-2\nu)}{3} \sigma^{3/(2-2\nu)} \right) \right\} + \right. \\ \left. \left. + (2\nu-1)^2 \left\{ \frac{2\nu+1}{6\nu+1} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{(2\nu)^{(6\nu+1)/(2-2\nu)} (2-2\nu)}{7} \sigma^{7/(2-2\nu)} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\nu}{6\nu-1} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{(2\nu)^{(6\nu-1)/(2-2\nu)} (2-2\nu)}{5} \sigma^{5/(2-2\nu)} \right) \right\} \right].$$

Для того чтобы найти окончательную зависимость коэффициента лобового сопротивления от времени, нужно знать, как меняется площадь миделя с течением времени. Из соотношения (3.9) следует

$$x = R_0, \quad s = (2\nu\sigma)^{1/(2-2\nu)}, \quad y = (R_0 + \tau(2\nu-1)s^{2\nu})\sqrt{1-s^2}.$$

Так как $\tau(2\nu-1)s^{2\nu}$ есть величина малого порядка по отношению к R_0 , то можно записать

$$y = R_m = R_0 \sqrt{1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)}}.$$

Тогда

$$F = \pi R_m^2 = \pi R_0^2 (1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)}).$$

Окончательно из (3.10) имеем

$$\frac{C_p}{C_p(0)} = 1 + (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)} + \sigma(8\nu - 4) \left\{ \frac{\nu+1}{\nu+2} \frac{(1 - (2\nu\sigma)^{(\nu+2)/(1-\nu)})}{(1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)})} - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\nu+1} \frac{(1 - (2\nu\sigma)^{(\nu+1)/(1-\nu)})}{(1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)})} \right\} + 2\sigma^2(2\nu - 1)^2 \left\{ \frac{2\nu+1}{2\nu+2} \frac{(1 - (2\nu\sigma)^{(2\nu+2)/(1-\nu)})}{(1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)})} - \right. \\ \left. - \frac{2\nu}{2\nu+1} \frac{(1 - (2\nu\sigma)^{(2\nu+1)/(1-\nu)})}{(1 - (2\nu\sigma)^{1/(1-\nu)})} \right\}.$$

Для площади боковой поверхности, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{F_s}{F_{10}} = - (2\nu\sigma)^{1/(2-2\nu)} + \sigma \left[2\nu ((2\nu\sigma)^{(2\nu-1)/(2-2\nu)} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{(2\nu-1)(2\nu+2)}{2\nu+1} ((2\nu\sigma)^{(2\nu+1)/(2-2\nu)} - 1) \right] + \\ + \sigma^2(2\nu-1)^2 \left[\frac{2\nu}{4\nu-1} ((2\nu\sigma)^{(4\nu-1)/(2-2\nu)} - 1) - \frac{2\nu+1}{4\nu+1} ((2\nu\sigma)^{(4\nu+1)/(2-2\nu)} - 1) \right].$$

Таким образом, найдены зависимости от времени коэффициента лобового сопротивления, площади боковой поверхности и массы тела для любого ν .

4. Результаты расчетов. Рассмотрим результаты расчетов по приведенным выше формулам. На рис. 3 показано изменение формы перво-

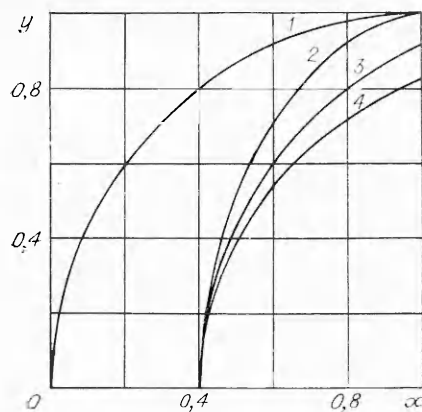


Рис. 3

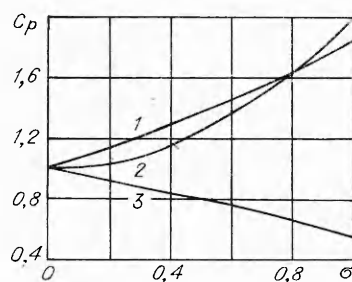


Рис. 5

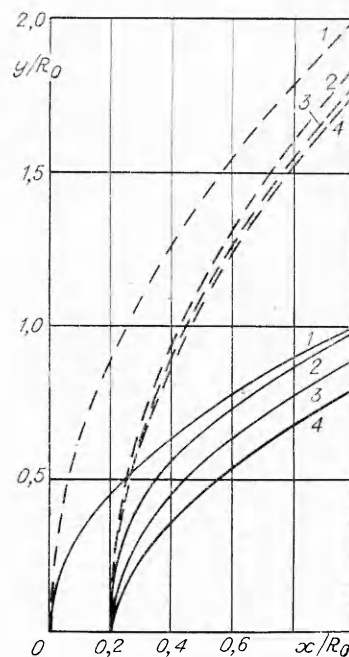


Рис. 4

начально сферического тела (кривая 1) для разных законов горения $A = 2,48 \text{ см}/((1,013 \cdot 10^5 \text{ Па})^v \cdot \text{с})$ (кривые 2—4 для $v = 1; 0,5; 0,27$). Линии 2—4 построены для $\sigma = 0,4$, т. е. для момента времени, когда модель пролетает трассу [1]. Видно, что изменение v заметно влияет на изменение боковой поверхности тела вблизи мишени.

Рассмотрим случай, когда в начальный момент тело имело форму параболоида:

$$x_0 = s, \quad y_0(s) = 2ps^{1/2}, \quad q_0 = ps^{-1/2}.$$

Решение уравнения изменения формы тела имеет вид

$$x(s, t) = s + \tau \frac{p^{2v-1}(2vs + p^2)}{(s + p^2)^{v+1/2}}, \quad y(s, t) = 2ps^{1/2} + \tau \frac{p^{2v}s^{1/2}(2v-1)}{(s + p^2)^{v+1/2}}.$$

Радиус кривизны в любой точке тела

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \tau \frac{(2v-1)p^{2v-1}(1/2p^2 - vs)}{(p^2 + s)^{3/2+v}}.$$

На рис. 4 изображено изменение формы первоначального тела (кривая 1) в виде параболоида:

$$y/R_0 = 0,5\sqrt{x/R_0}.$$

Кривые 2—4 на рис. 4 отвечают $v = 1; 0,5; 0,27$ и $\sigma = 0,2$. Аналогичные зависимости (штриховые линии) были рассчитаны для первоначального параболоида, уравнение которого

$$y/R_0 = 2\sqrt{x/R_0}.$$

Сравнение расчетов $y(x, t)$ показывает, что уменьшение v сильнее влияет на изменение формы тонкого тела, чем более толстого.

На рис. 5 приведены расчеты изменения коэффициента волнового сопротивления первоначального тела в виде сферы в зависимости от

безразмерного времени σ . Кривые 1—3 соответствуют $\nu = 1,0; 0,5; 0,27$. Видно, что коэффициент C_p значительно зависит от ν в законе горения.

Таким образом, из расчетов следует, что ν является существенным параметром при изменении формы горящего тела. Величина ν может быть восстановлена для конкретного материала из анализа снимков горящего тела в разные моменты времени либо из закона торможения горящего тела по изменению коэффициента C_p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Баулин Н. Н., Кувалкин Д. Г., Нилюгин Н. Н. и др. Исследование яркости излучения газов около горячей модели при движении со сверхзвуковой скоростью // Космич. исслед.— 1987.— Т. 25, вып. 1.
2. Анфимов Н. А. Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1964.— № 5.
3. Вильямс Ф. А. Теория горения.— М.: Наука, 1971.
4. Зельдович Я. Б., Лейпунский О. Н., Либрович В. Б. Теория нестационарного горения пороха.— М.: Наука, 1975.
5. Булгаков В. К., Липанов А. М. Взаимодействие турбулентности и химической реакции в теории эрозийного горения конденсированных веществ // Хим. физика.— 1986.— Т. 5, № 4.
6. Нилюгин Н. Н., Талинов Р. Ф. Асимптотическая теория сверхзвукового обтекания горящих моделей и определение экспериментальных констант // Струйные и отрывные течения.— М.: Изд-во МГУ, 1989.
7. Нилюгин Н. Н., Талинов Р. Ф. Асимптотическое решение уравнений Эйлера в ударном слое при неравномерном обтекании затупленного тела и подаче газа с его поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1989.— № 6.
8. Алштейн Э. З., Нилюгин Н. Н., Тирский Г. А. Унос массы и изменение формы трехмерного тела при движении по траектории в атмосфере Земли // Космич. исслед.— 1979.— Т. 17, вып. 2.
9. Эльсгольд Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1965.

г. Москва

Поступила 8/IV 1992 г.,
в окончательном варианте —
27/VII 1992 г.

УДК 534.222.2 + 624.131

Н. Н. Гердюков, А. Г. Ионлев, А. Д. Ковтун,
Ю. М. Макаров, С. А. Новиков

ИССЛЕДОВАНИЕ СЖИМАЕМОСТИ ПЕСЧАНОГО ГРУНТА ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Систематическое экспериментальное изучение механических свойств мягких грунтов при взрывном нагружении было начато в конце 50-х годов (см., например, [1—6]). Однако почти во всех работах максимальное измерявшееся напряжение не превышало 75 МПа. Свойства песка при ударно-волновом нагружении в области больших напряжений исследовались в [2, 4]. В [2] получена ударная адиабата сухого песка с начальной плотностью $\rho_{00} = 1,66 \text{ г/см}^3$ в интервале напряжений от 100 МПа до 5 ГПа, а также зависимость массовой скорости частиц в волне разгрузки при выходе плоской ударной волны (УВ) на свободную поверхность u_1 от массовой скорости в падающей УВ u в интервале от 50 до 800 м/с. Оказалось, что во всем этом интервале $u_1/u \approx 1,36$. В [4] получены ударные адиабаты четырех фракций сухого песка в интервале напряжений от 1 до 6 ГПа и двух фракций водонасыщенного песка в интервале от 2 до 12 ГПа.

Ниже приводятся некоторые результаты измерений сжимаемости нарушенного песчаного грунта естественной влажности в проходящей и

© Н. Н. Гердюков, А. Г. Ионлев, А. Д. Ковтун, Ю. М. Макаров, С. А. Новиков, 1993