

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. Д. Потапов

(Москва)

В работах [1, 2] предложен критерий устойчивости конструкций, работающих в условиях ползучести, основанный на сопоставлении траекторий невозмущенного и возмущенного движений. В данной работе на основе этого критерия проводится анализ особенностей поведения сжатых вязкоупругих тонкостенных оболочек.

Уравнения равновесия и совместности деформаций тонкостенных пологих оболочек с учетом межслойного сдвига по гипотезе Тимошенко записываются в виде [3, 4]

$$(1) \quad h [\Gamma_{3131} (\gamma_{1,1} + u_{3,11}) + \Gamma_{3232} (\gamma_{2,2} + u_{3,22})] + \\ + \left[\frac{1}{R_{ij}} + (u_3 + u_3^0)_{,ij} \right] N_{ij} = 0, \\ D_{1111} \gamma_{1,11} + D_{1122} \gamma_{2,12} + \frac{1}{2} D_{1212} (\gamma_{1,22} + \gamma_{2,12}) = h \Gamma_{3131} (\gamma_1 + u_{3,1}), \\ D_{2211} \gamma_{1,12} + D_{2222} \gamma_{2,22} + \frac{1}{2} D_{1212} (\gamma_{1,12} + \gamma_{2,11}) = h \Gamma_{3232} (\gamma_2 + u_{3,2}), \\ \frac{1}{h} [K_{1111} F_{,2222} + 2 (K_{1212} + K_{1122}) F_{,1122} + K_{2222} F_{,1111}] = - e_{ik} e_{jl} \left\{ \frac{1}{R_{kl}} u_{3,ij} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(u_3 + u_3^0)_{,kl} (u_3 + u_3^0)_{,ij} - u_{3,kl}^0 u_{3,ij}^0] \right\} \quad (i, j, k, l = 1, 2),$$

где γ_i — углы поворота нормали к срединной поверхности; u_3, u_3^0 — дополнительный и начальный прогибы оболочки; F — функция усилий, действующих в срединной поверхности, $N_{ij} = e_{ik} e_{jl} F_{,kl}$; h, R_{ij} — толщина и радиусы кривизны ($R_{12} = R_{21} = \infty$); K_{ijkl}, Γ_{ijkl} — операторы вида

$$K_{ijkl} f = \frac{1}{E_{ijkl}} f(t) + \int_0^t K_{ijkl}(t - \tau) f(\tau) d\tau, \\ \Gamma_{ijkl} f = c_{ijkl} f(t) - \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

E_{ijkl}, c_{ijkl} — упругие постоянные; $K_{ijkl}(t - \tau), \Gamma_{ijkl}(t - \tau)$ — ядра ползучести и релаксации, инвариантные относительно начала отсчета

$$0 \leq \int_0^\infty K_{ijkl}(\tau) d\tau = K_{ijkl} < \infty, \quad 0 \leq \int_0^\infty \Gamma_{ijkl}(\tau) d\tau = \Gamma_{ijkl} < 1,$$

$$D_{ijkl} = \frac{h^3}{12} \bar{\Gamma}_{ijkl}, \quad e_{ik} = \begin{cases} 1, & i > k \\ 0, & i = k \\ -1, & i < k. \end{cases}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование. Индексы, стоящие после запятой, обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Оси x_1, x_2 совпадают с линиями главных кривизн и осями вязкоупругой симметрии, а ось x_3 перпендикулярна к ним и направлена к центру кривизны.

Предположим, что наряду с прогибом u_3^0 имеют место малые начальные возмущения прогиба оболочки δu_3^0 . Возмущения дополнительного прогиба δu_3 , углов поворота нормали $\delta \gamma_i$ и функции усилий δF находятся из уравнений

$$(2) \quad \begin{aligned} & h [\Gamma_{3131} (\delta \gamma_{1,1} + \delta u_{3,11}) + \Gamma_{3232} (\delta \gamma_{2,2} + \delta u_{3,22})] + \\ & + \left[\frac{1}{R_{ij}} + (u_3 + u_3^0)_{,ij} \right] \delta N_{ij} + N_{ij} (\delta u_3 + \delta u_3^0)_{,ij} = 0, \\ & D_{1111} \delta \gamma_{1,11} + D_{1122} \delta \gamma_{2,12} + \frac{1}{2} D_{1212} (\delta \gamma_{1,22} + \delta \gamma_{2,12}) = h \Gamma_{3131} (\delta \gamma_1 + \delta u_{3,1}), \\ & D_{2211} \delta \gamma_{1,12} + D_{2222} \delta \gamma_{2,22} + \frac{1}{2} D_{1212} (\delta \gamma_{1,12} + \delta \gamma_{2,11}) = h \Gamma_{3232} (\delta \gamma_2 + \delta u_{3,2}), \\ & \frac{1}{h} [K_{1111} \delta F_{,2222} + 2 (K_{1212} + K_{1122}) \delta F_{,1122} + K_{2222} \delta F_{,1111}] = \\ & = -e_{ik} e_{jl} \left\{ \frac{1}{R_{kl}} \delta u_{3,ij} + \frac{1}{2} [(u_3 + u_3^0)_{,kl} (\delta u_3 + \delta u_3^0)_{,ij} + \right. \\ & \quad \left. + (\delta u_3 + \delta u_3^0)_{,kl} (u_3 + u_3^0)_{,ij} - u_{3,kl}^0 \delta u_{3,ij}^0 - \delta u_{3,kl}^0 u_{3,ij}^0] \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, шарнирно-закрепленную по концам и равномерно сжатую в осевом направлении нагрузкой q . Допустим, что

$$(3) \quad u_3^0 = \sum_m h \xi_m^0 \sin \frac{m\pi}{l} x_1,$$

(l — длина оболочки, ось x_1 направлена вдоль образующей). Для определения u_3 и F из системы (1) имеем уравнения

$$(4) \quad \begin{aligned} & D_{1111} u_{3,1111} + D_{1111} K_{3131} \frac{1}{h} \left[-q (u_3 + u_3^0)_{,1111} - \frac{1}{R^2} K_{2222}^{-1} u_{3,11} \right] + \\ & + q (u_3 + u_3^0)_{,11} + \frac{h}{R^2} K_{2222}^{-1} u_3 = 0, \\ & F_{,11} = -\frac{h}{R} K_{2222}^{-1} u_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$u_3 = \sum_m h \xi_m \sin \frac{m\pi}{l} x_1.$$

Допустим, что

$$(5) \quad \delta u_3^0(x_1, x_2) = \sum_k c_k^0 \sin \frac{k\pi}{l} x_1 \cos \frac{n}{R} x_2.$$

Ищем $\delta u_3, \delta \gamma_1, \delta \gamma_2$ в виде

$$\begin{aligned} \delta u_3 &= \sum_k c_k \sin \frac{k\pi}{l} x_1 \cos \frac{n}{R} x_2, \\ \delta \gamma_1 &= \sum_k \Gamma_k^{(1)} \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi}{l} x_1 \cos \frac{n}{R} x_2, \end{aligned}$$

$$\delta \gamma_2 = \sum_k \Gamma_k^{(2)} \frac{n}{R} \sin \frac{k\pi}{l} x_1 \sin \frac{n}{R} x_2.$$

Решая уравнения (2), получаем

$$\begin{aligned} (6) \quad a_{sn} (1 - \alpha_{sn}) c_s + \sum_{k,m} [\cos(s+k+m)\pi - 1] \frac{4sm^2 n^2 h}{\pi R} \left\{ \left[\frac{k}{m} \left(\frac{1}{E} \mathbf{K}_{2222}^{-1} \xi_m \right) c_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{l} (\xi_m + \xi_m^0) (A_{kn}^{-1} c_k) \right] \frac{1}{(s+k+m)(s-k+m)(s+k-m)(s-k-m)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[\frac{(m+k)^2}{k^4 (s+k+m)(s-k-m)} B_2^{-1} ((\xi_m + \xi_m^0) c_k) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(m-k)^2}{k^4 (s-k+m)(s+k-m)} B_1^{-1} ((\xi_m + \xi_m^0) c_k) \right] \right\} + \\ + \sum_{k,m,i} (\xi_m + \xi_m^0) \left(\frac{n^2 m i h}{2 R k^2} \right)^2 \{ B_2^{-1} [(\xi_i + \xi_i^0) c_k] T_{skmi} - \\ - B_1^{-1} [(\xi_i + \xi_i^0) c_k] G_{skmi} \} = \dots, \\ - \left(\mathbf{D}_{1111} \frac{s^2 \pi^2}{l^2} + \frac{n^2}{2 R^2} \mathbf{D}_{1212} + h \Gamma_{3131} \right) \Gamma_s^{(1)} + \\ + \frac{n^2}{R^2} \left(\mathbf{D}_{1122} + \frac{1}{2} \mathbf{D}_{1212} \right) \Gamma_s^{(2)} = h \Gamma_{3131} c_s, \\ \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \left(\mathbf{D}_{1122} + \frac{1}{2} \mathbf{D}_{1212} \right) \Gamma_s^{(1)} - \left(\mathbf{D}_{2222} \frac{n^2}{R^2} + \frac{s^2 \pi^2}{2 l^2} \mathbf{D}_{1212} + h \Gamma_{3232} \right) \Gamma_s^{(2)} = \\ = - h \Gamma_{3232} c_s, \end{aligned}$$

где E — значение некоторой приведенной упругой постоянной;

$$\begin{aligned} A_{kn} &= \frac{l^4}{k^4 \pi^4} E [\mathbf{K}_{1111} \theta_{kn}^4 + 2 (\mathbf{K}_{1212} + \mathbf{K}_{1122}) \theta_{kn}^2 + \mathbf{K}_{2222}]; \\ B_1 &= \frac{l^4}{k^4 \pi^4} E \left[\mathbf{K}_{1111} \theta_{kn}^4 + 2 (\mathbf{K}_{1212} + \mathbf{K}_{1122}) \left(\frac{m}{k} - 1 \right)^2 \theta_{kn}^2 + \mathbf{K}_{2222} \left(\frac{m}{k} - 1 \right)^4 \right]; \\ B_2 &= \frac{l^4}{k^4 \pi^4} E \left[\mathbf{K}_{1111} \theta_{kn}^4 + 2 (\mathbf{K}_{1212} + \mathbf{K}_{1122}) \left(\frac{m}{k} + 1 \right)^2 \theta_{kn}^2 + \mathbf{K}_{2222} \left(\frac{m}{k} + 1 \right)^4 \right]; \\ \theta_{kn} &= \frac{n l}{k \pi R}, \quad s^2 - (k+m)^2 \neq 0, \quad s^2 - (k-m)^2 \neq 0; \\ G_{skmi} &= \int_0^1 [\cos(s+k-m-i)\pi x - \cos(s-k+m+i)\pi x + \\ &+ \cos(s-k+m-i)\pi x - \cos(s+k-m+i)\pi x] dx; \\ T_{skmi} &= \int_0^1 [\cos(s+k+m-i)\pi x - \cos(s+k+m+i)\pi x + \\ &+ \cos(s-k-m-i)\pi x - \cos(s-k-m+i)\pi x] dx; \\ a_{sn} (1 - \alpha_{sn}) c_s &= \frac{R^2}{E h} \left[\mathbf{D}_{1111} \frac{s^4 \pi^4}{l^4} \Gamma_s^{(1)} + \frac{s^2 \pi^2 n^2}{l^2 R^2} (\mathbf{D}_{1212} + \mathbf{D}_{1122}) (\Gamma_s^{(1)} - \Gamma_s^{(2)}) - \right. \\ &\left. - \mathbf{D}_{2222} \frac{n^4}{R^4} \Gamma_s^{(2)} \right] - \frac{E h}{R^2} A_{sn}^{-1} c_s + \frac{s^2 \pi^2}{l^2} q c_s. \end{aligned}$$

Многоточие в правой части уравнения (6) обозначает слагаемые, зависящие от величин c_k^0 .

Для длинной оболочки при сохранении в сумме (3) одного слагаемого равенство (6) записывается следующим образом (m — нечетно, $k \sim m/2$):

$$(7) \quad a_{sn}(1 - \alpha_{sn})c_s + \sum_k \frac{n^2 h^2}{\pi R} \left\{ \left(\frac{4}{E} K_{2222} \xi_m \right) c_k + 4(\xi_m + \xi_m^0)(A_{kn}^{-1} c_k) + \right. \\ \left. + 4B_1^{-1} [(\xi_m + \xi_m^0) c_k] \right\} \frac{1}{s+k-m} - \\ - \sum_k \left(\frac{2n^2 h^2}{R} \right)^2 (\xi_m + \xi_m^0)(B_2^{-1} + B_1^{-1}) [(\xi_m + \xi_m^0) c_k] \int_0^1 \cos(s-k)\pi x dx = \dots$$

Заменяя в равенствах (6), (7) операторы Γ_{ijkl} , K_{ijkl} упругими постоянными и приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при c_k , получим уравнение для нахождения критического значения прогиба ξ_m^0 при фиксированной нагрузке q и наоборот критического значения нагрузки q при фиксированном прогибе ξ_m^0 .

Если k, s близки между собой, то $a_{sn} \approx a = \text{const}$, $\theta_{sn} \approx \theta_{kn} = \theta$, $\alpha_{sn} \approx \alpha = \text{const}$. Тогда определитель системы уравнений (7) имеет вид

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda + 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1 & -1 \\ \cdot & 1/5 & \lambda + 1/3 & 1 & -1 & -1/3 \\ \cdot & 1/3 & 1 & \lambda - 1 & -1/3 & -1/5 \\ \cdot & 1 & -1 & -1/3 & \lambda - 1/5 & -1/7 \\ \cdot & -1 & -1/3 & -1/5 & -1/7 & \lambda - 1/9 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\lambda = \frac{-a(1-\alpha) + y}{z}; \quad y = \frac{4n^4 h^2}{R^2} (B_1^{-1} + B_2^{-1})(\xi_m + \xi_m^0)^2; \\ z = \frac{n^2 h^2}{\pi R} \left[\frac{E_{2222}}{E} \xi_m + 8(\xi_m + \xi_m^0) A^{-1} \right].$$

Отсюда следует

$$(9) \quad \frac{4n^4 h^2}{R^2} (B_1^{-1} + B_2^{-1})(\xi_m + \xi_m^0)^2 - \\ - \lambda \frac{n^2 h^2}{\pi R} \left[\frac{E_{2222}}{E} \xi_m + 8(\xi_m + \xi_m^0) A^{-1} \right] - a(1-\alpha) = 0.$$

Интересно сопоставить между собой значения $\lambda_{\max}$, которые отвечают различному порядку определителя (8).

Из рассмотрения определителей 1, 3, 5 и 9-го порядка имеем $\lambda^I = 1$; $\lambda^{III} = 1,569$; $\lambda^V = 1,571$; $\lambda^{IX} = 3,1415926/2$.

Для оценки погрешности, вносимой заменой оболочки конечной длины бесконечно длинной оболочкой, в таблице представлены значения $\xi_m + \xi_m^0$, вычисленные из определителей системы уравнений (6) (графы 3, 4, 5) для изотропной оболочки, выполненной из несжимаемого материала.

1	2	3	4	5
α_m		$s, k=11$	$s, k=9, 11, 13$	$s, k=7, 9, 11, 13, 15$
0,9	0,0480 ($n=11$)	0,0816 ($n=11$)	0,0485 ($n=11$)	0,0485 ($n=11$)
0,8	0,1010 ($n=11$)	0,1869 ($n=11$)	0,1015 ($n=11$)	0,1014 ($n=11$)
0,7	0,1635 ($n=11$)	0,3659 ($n=10$)	0,1642 ($n=11$)	0,1640 ($n=11$)
0,6	0,2406 ($n=11$)	—	0,2418 ($n=11$)	0,2415 ($n=11$)
0,5	0,3419 ($n=10$)	—	0,3420 ($n=10$)	0,3411 ($n=10$)
0,4	0,4785 ($n=10$)	—	0,4807 ($n=10$)	0,4796 ($n=10$)
0,3	0,7171 ($n=9$)	—	0,7221 ($n=9$)	0,7193 ($n=9$)
0,2	1,3415 ($n=7$)	—	1,3586 ($n=7$)	1,3474 ($n=7$)

ла без учета сдвига слоев с геометрическими характеристиками $\pi R/l = 1$, $R/h = 147$, $m = 21$. Значения s, k в таблице соответствуют порядковым номерам слагаемых в сумме (5). Параметр n отвечает наименьшему значению безразмерного прогиба оболочки $\xi_m + \xi_m^0$. В графе 2 содержатся значения $\xi_m + \xi_m^0$, найденные из уравнения (9), которое в этом частном случае принимает вид

$$(10) \quad 4\eta[(1 + \theta^2)^{-2} + (9 + \theta^2)^{-2}](\xi_m + \xi_m^0)^2 - \frac{\lambda}{\pi}[\alpha_m + 8(1 + \theta^2)^{-2}](\xi_m + \xi_m^0) - \frac{a(1 - \alpha)}{\eta} = 0,$$

причем

$$-a = \frac{1}{4}[(1 + \theta^2)^2/4 + 4(1 + \theta^2)^{-2}], \quad \alpha = -\alpha_m/2a, \quad \eta = \frac{3}{4}\theta^2, \quad \lambda = \frac{n^2 h}{R}, \quad \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Как видно из таблицы, величины критических параметров для двух оболочек близки между собой. Следовательно, в некоторых случаях исследование устойчивости оболочки конечной длины может быть заменено решением аналогичной задачи для бесконечной длинной оболочки.

Рассмотрим три оболочки, обладающие разными вязкоупругими свойствами.

Пример 1. Оболочка ортотропная, причем операторы Γ_{1111} , Γ_{2222} , Γ_{1122} тождественно равны упругим константам. Соблюдается гипотеза Кирхгофа — Лява ($\Gamma_s^{(1)} = -c_s$, $\Gamma_s^{(2)} = c_s$). Тогда величина $\xi_m + \xi_m^0$ при фиксированной нагрузке является постоянной. Форма начального прогиба совпадает с осесимметричной формой потери устойчивости идеальной оболочки.

Из уравнения (9) для заданного значения параметра α_m находим значение ξ_m^0 , соответствующее мгновенной ($t_* = 0$) потере устойчивости осесимметричной формы равновесия. На фиг. 1 для оболочки с характеристиками $E_{2222} = E_{1111} = E$, $E_{1122} = -\nu E$,

$$E_{1212}/E = 0,346154, \quad \Gamma_{1212}/E = 0,207692, \quad \nu = 0,13, \quad R/h = 100$$

зависимости $\alpha_m \sim \xi_m^0$ отвечает кривая 1.

Для оценки устойчивости оболочки при больших значениях времени t воспользуемся свойством инвариантности ядер $K_{1212}(t - \tau)$ и $\Gamma_{1212}(t - \tau)$ относительно начала отсчета и перенесем его в $-\infty$. Как известно [5],

решение уравнений (7) для фиксированного параметра α_m является ограниченным (константой) при значениях ξ_m^0 , меньших тех, которые вычисляются как корни уравнения, подобного уравнению (9) и полученного из него заменой постоянной E_{1212} длительным модулем сдвига $E_{1212}^{\text{дл}} = E_{1212} - \Gamma_{1212}$. При значениях α_m и ξ_m^0 , являющихся корнем указанного уравнения, происходит длительная ($t_* = \infty$) потеря устойчивости осесимметричной формы равновесия. На фиг. 1 кривая 2 отвечает соотношению между этими ξ_m^0 и α_m . Форма такой потери устойчивости оболочки может отличаться от формы мгновенной потери устойчивости за счет различия n .

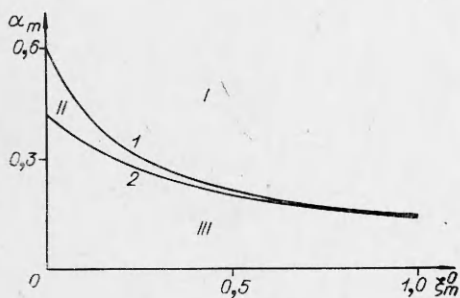
Анализ результатов показывает, что при α_m , ξ_m^0 , принадлежащих области I (см. фиг. 1), оболочка теряет устойчивость в момент приложения нагрузки. Если точка с координатами α_m , ξ_m^0 взята из области III, то оболочка устойчива при любом времени t . Здесь соблюдается устойчивость и по Ляпунову [6]. Наконец, если рассмотреть точки области II, то при соответствующих значениях α_m , ξ_m^0 дополнительное возмущение прогиба оболочки неограниченно увеличивается при неограниченном увеличении времени. Можно показать, что при выбранных параметрах α_m , ξ_m^0 конструкция неустойчива по Ляпунову, но на любом заранее заданном интервале времени t оболочка устойчива [1].

Отметим качественное совпадение результатов с аналогичными показателями для стержней. Для них область изменения внешней нагрузки также делится на три части (при любых малых начальных искривлениях, если решается линейная задача).

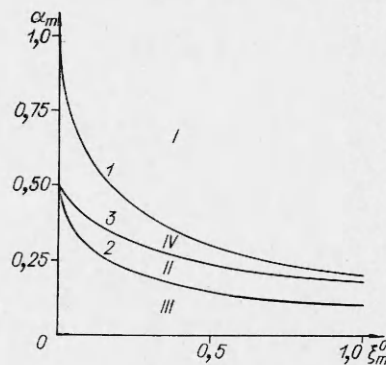
Пример 2. Оболочка изотропная, межслойный сдвиг не учитывается. Для упрощения материал считается несжимаемым. Форма начального прогиба совпадает с осесимметричной формой потери устойчивости идеальной оболочки.

По аналогии с предыдущим случаем определим значения параметров α_m , ξ_m^0 , отвечающих мгновенной и длительной потере устойчивости оболочки с характеристиками $R/h = 147$, $\Gamma/E = 0,5$ (фиг. 2, кривые 1, 2).

При значениях α_m , ξ_m^0 , соответствующих точкам, лежащим ниже кривой I, оболочка может потерять устойчивость «хлопком» по истечении некоторого конечного промежутка времени t_* , называемого критическим временем [1, 2]. Для получения t_* достаточно приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов при величинах c_k в уравнениях (7), полагая операторы Γ_{ijkl} , K_{ijkl} тождественно равными упругим постоянным, но величины ξ_m считаются функциями времени t . При этих условиях получается уравнение, совпадающее с уравнением (9) или (10).



Фиг. 1



Фиг. 2

Аналогичное уравнение для отыскания критического времени при неограниченной ползучести материала было получено в работе [7], где использован критерий бифуркации равновесного состояния.

Нижняя граница области потери устойчивости при конечном времени t_* отвечает тем значениям параметров α_m , ξ_m^0 , при которых t_* стремится к бесконечности. Функция $\xi_m + \xi_m^0$ для рассматриваемых α_m , ξ_m^0 имеет постоянное (конечное) значение $(\xi_m + \xi_m^0)_{co}$. Подставляя это выражение в равенство (10), получим соотношение между α_m и ξ_m^0 , показанное кривой 3 на фиг. 2. Итак, область изменения параметров α_m , ξ_m^0 делится на четыре части. Дополнительно к тем зонам, которые были зафиксированы в предыдущем примере, добавляется зона потери устойчивости при конечном времени t_* (зона IV).

Пример 3. Оболочка трансверсально-изотропная. Учитывается изменение во времени только межслойных сдвигов ($\Gamma_{3131} = \Gamma_{3232} = \Gamma'$).

Для такой оболочки выражения a_{sn} , α_{sn} , A_{kn} , B_1 , B_2 имеют вид

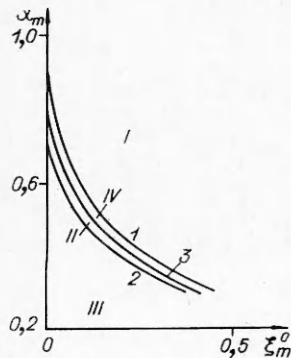
$$a_{sn} = \frac{n^4 h^2 (1 + \theta_{sn}^2)^2}{12 (1 - \nu^2) R^2 \theta_{sn}^4} \left[(1 + \theta_{sn}^2)^2 \frac{1 - \nu}{2} + (1 + \theta_{sn}^2) \frac{3 - \nu}{2} \Lambda + \Lambda^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[(1 + \theta_{sn}^2)^2 \frac{1 - \nu}{2} + \Lambda \right] \Lambda + (1 + \theta_{sn}^2)^{-2}, \quad \alpha_{sn} = a_{sn}^{-1} \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \frac{R^2}{Eh} q, \\ A_{kn} = (1 + \theta_{kn}^2)^2, \quad \Lambda = \frac{12 (1 - \nu^2) R^2}{n^2 h^2} \theta_{sn}^2 \frac{1}{E} \Gamma', \\ B_1 = \left[\theta_{kn}^2 + \left(\frac{m}{k} - 1 \right)^2 \right]^2, \quad B_2 = \left[\theta_{kn}^2 + \left(\frac{m}{k} - 1 \right)^2 \right]^2$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Параметр ξ_m определяется из уравнения (4)

$$\left[\frac{m^4 \pi^4}{12 (1 - \nu^2)} \frac{R^2 h^2}{l^4} + 1 + \frac{m^2 \pi^2 h^2}{12 (1 - \nu^2) l^2} EK' \right] \xi_m - \\ - \left[\frac{m^2 \pi^2 R^2}{l^2} + \frac{m^4 \pi^4}{12 (1 - \nu^2)} \frac{R^2 h^2}{l^4} EK' \right] \frac{q}{Eh} (\xi_m + \xi_m^0) = 0.$$

Кривые, аналогичные кривым 1—3 фиг. 2 (пример 2), для рассматриваемой оболочки показаны на фиг. 3 ($R/h = 40$; $E/E_{3131} = E/E_{3232} = 5$; $E/E_{3131} - \Gamma' = E/E_{3232} - \Gamma' = 50$). В отличие от двух предыдущих случаев, в которых форма изгиба срединной поверхности оболочки в докритическом состоянии остается неизменной, в рассматриваемой оболочке кривые 1—3 построены для разных осесимметричных форм равновесия. Кривой 1 соответствует осесимметричная форма мгновенной ($t = 0$) потери устойчивости идеальной оболочки, а кривым 2, 3 соответствует осесимметричная форма длительной ($t = \infty$) потери устойчивости.



Ф и г. 3

При фиксированной амплитуде начального прогиба вертикальные координаты точек кривых 1—3 являются нижними границами для всех значений параметра α_m , которые отвечают мгновенной или длительной потере устойчивости оболочки, обладающей синусоидальным начальным прогибом.

Поступила 25 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В. Д. О критерии устойчивости при ползучести.— ПМ, 1973, т. 9, № 9.
2. Потапов В. Д. Устойчивость вязкоупругой неоднородной оболочки.— ПМТФ, 1972, № 1.
3. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
4. Рикарде Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, «Зинатне», 1974.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV. М.— Л., ГИТТЛ, 1951.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
7. Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В. Устойчивость оболочек в условиях ползучести.— ПМТФ, 1965, № 4.

Зав. редакцией *Н. С. Калашникова*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Ф. Ф. Орлова*
Корректоры *А. М. Картавин, С. В. Блинов*

Сдано в набор 23 марта 1977г. Подписано в печать 4 июля 1977 г. МН 07450. Формат 70×108¹/₁₆.
Бумага типографская № 2. 12 печ. л., 16,8 усл.-печ. л., 15,4 уч.-изд. л. Тираж 2087 экз.
Заказ 479. Цена 1 р. 65 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.