УДК 629.7.023:539.4:384.4

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ КРУТЯЩЕГО И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТОВ

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Решена задача нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении с использованием вариационного метода конечных элементов в перемещениях. Разработан алгоритм численного исследования задачи. Исследована устойчивость цилиндрических оболочек с эллиптическим контуром поперечного сечения при совместном действии кручения и изгиба. Определено влияние эллиптичности и нелинейности деформирования оболочек в исходном состоянии на величину критических нагрузок и форму потери устойчивости.

Ключевые слова: цилиндрические эллиптические оболочки, кручение с изгибом, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов.

1. Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Рассмотрим некруговую консольно защемленную ($u = v = w = \partial w/\partial x = 0$) цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием краевого крутящего момента $M_{\text{к}}$ и краевого изгибающего момента M (рис. 1). Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие крутящего момента заменим действием погонных краевых касательных усилий $S = M_{\text{к}}/(2\omega)$ ($\omega = \pi ab$ — площадь в свету поперечного сечения оболочки; a, b – полуоси эллипса). Действие изгибающего момента M заменим действием неоднородных по окружности оболочки осевых усилий $T = Mz_1/J$ (z_1 — расстояние от точек контура оболочки до оси эллипса AA; J — момент инерции поперечного сечения относительно оси AA).

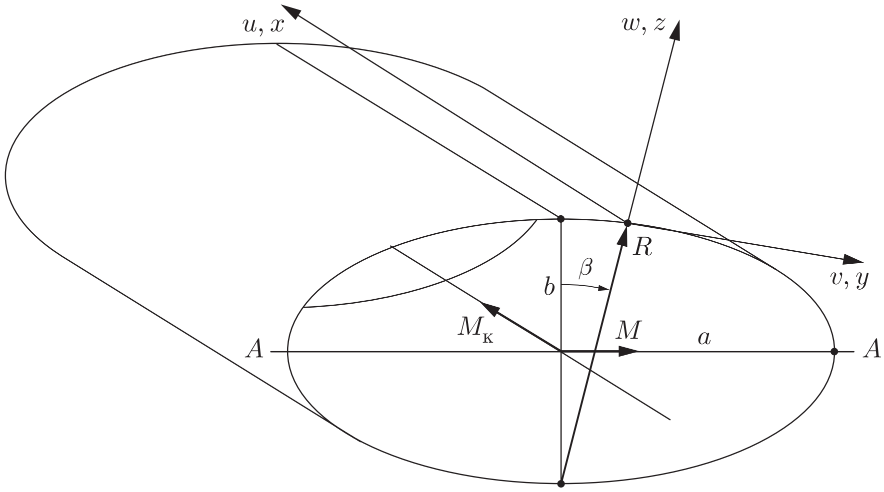

Рис. 1

Разобьем оболочку линиями главных кривизн на m частей по образующей и на n частей по направляющей. Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов. Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений, бикубическую аппроксимацию для прогиба и перемещения конечных элементов как твердых тел, для полных перемещений точек конечного элемента запишем выражения

$$
\begin{gathered}
u = a_1 xy + a_2 x + a_3 y + a_4 + a_6\psi_2 + a_{20}\psi_1,\\
v = a_5 xy + a_6 xc + a_7 y + a_8(\psi_1 c + \psi_2 s) - a_{20} xs + a_{23} c - a_{24} s,\\
w = a_9 x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + \\
+ a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6 xs + a_8(\psi_1 s - \psi_2 c).
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь для произвольной оболочки [1] $\psi_1 = \displaystyle\int Rs\,d\beta$, $\psi_2 = -\displaystyle\int Rc\,d\beta$, $c = \cos\beta$, $s = \sin\beta$; R — радиус кривизны контура оболочки.

Для эллиптической оболочки

$$
\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 + b^2c^2, \quad \psi_1 = -\frac{b^2c}{d}, \quad \psi_2 = -\frac{a^2s}{d}.
$$

В матричной форме (1.1) имеет вид

$$
\tilde{\boldsymbol{u}} = P\boldsymbol{a}, \tag{1.2}
$$

где $\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u, v, w\}^{\text{т}}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента; $\boldsymbol{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^{\text{т}}$ — вектор неизвестных коэффициентов a_i; P — матрица связи размерности 3×24, элементами которой являются множители p_{ij} при коэффициентах a_i в функциях (1.1). Выразив коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получим

$$
\boldsymbol{a} = B^{-1}\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{1.3}
$$

где $\bar{\boldsymbol{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\}^{\text{т}}$ — вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба; B — матрица размерности 24×24, ненулевые элементы которой имеют вид

$$
\begin{gathered}
b_{1,j} = p_{1,j}, \qquad b_{2,j} = p_{2,j}, \qquad b_{3,j} = p_{3,j}, \qquad b_{4,j} = (p_{3,j})_x,\\
b_{5,j} = (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, \qquad b_{6,j} = (p_{3,j})_{xy} \qquad (x = -a_1, \quad y = -b_1),\\
b_{7,j} = p_{1,j}, \qquad b_{8,j} = p_{2,j}, \qquad b_{9,j} = p_{3,j}, \qquad b_{10,j} = (p_{3,j})_x,\\
b_{11,j} = (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, \qquad b_{12,j} = (p_{3,j})_{x\beta} \qquad (x = -a_1, \quad y = b_1),\\
b_{13,j} = p_{1,j}, \qquad b_{14,j} = p_{2,j}, \qquad b_{15,j} = p_{3,j}, \qquad b_{16,j} = (p_{3,j})_x,\\
b_{17,j} = (p_{2,j} - (p_{3,j})_\beta)/R, \qquad b_{18,j} = (p_{3,j})_{xy} \qquad (x = a_1, \quad y = -b_1),\\
b_{19,j} = p_{1,j}, \qquad b_{20,j} = p_{2,j}, \qquad b_{21,j} = p_{3,j}, \qquad b_{22,j} = (p_{3,j})_x,\\
b_{23,j} = (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, \qquad b_{24,j} = (p_{3,j})_{xy} \qquad (x = a_1, \quad y = b_1),\\
j = 1, \dots, 24, \qquad a_1 = L/(2m), \quad b_1 = l/(2n)
\end{gathered}
$$

(L, l — характерные размеры оболочки вдоль образующей и направляющей; индексы x, y, β обозначают частное дифференцирование по x, y, β).

Подставив (1.3) в (1.2), получим зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

$$
\tilde{\boldsymbol{u}} = PB^{-1}\bar{\boldsymbol{u}}.
$$

В каждом узле имеется 6 неизвестных, так что конечный элемент имеет 24 степени свободы. Узловые неизвестные будем определять, используя вариационное уравнение Лагранжа $\delta\Pi = 0$, где Π — потенциальная энергия оболочки. При записи выражения для потенциальной энергии используем нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями [2]. Уравнение $\delta\Pi = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Эта система решается шаговым методом по нагрузке с использованием на каждом шаге метода линеаризации Ньютона — Канторовича, уравнение которого можно записать [3] в виде

$$H(\bar{\boldsymbol{u}}^n)\Delta\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{u}}^n), \qquad \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}^n + \Delta\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{1.4}$$

где H — матрица Гессе оболочки, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации; $\boldsymbol{q}_e$ — вектор узловой нагрузки; $\boldsymbol{G}$ — градиент потенциальной энергии деформации. Уравнения (1.4) строятся стандартным способом с учетом граничных условий [4]. Граничные условия формулируются в следующем виде. Для нулевых узловых граничных перемещений соответствующая строка матрицы Гессе H граничного элемента и соответствующий элемент вектора узловой нагрузки обнуляются, а вместо диагонального коэффициента в матрице H ставится большое число.

Система линейных алгебраических уравнений (1.4) решается методом Краута с использованием разложения матрицы Гессе $H = L^{\text{т}}DL$ (D — диагональная матрица; L — треугольная матрица). После определения узловых перемещений по известным формулам из [2] находятся напряжения и деформации. Контроль устойчивости осуществляется проверкой положительной определенности матрицы Гессе, что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы D. Появление отрицательных элементов соответствует потери устойчивости оболочки. После нахождения значения параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, определяется форма потери устойчивости оболочки из решения системы $H\boldsymbol{\delta} = 0$, где $\boldsymbol{\delta}$ — вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяется строка матрицы H, соответствующая первому отрицательному элементу матрицы D. Эта строка и соответствующий столбец матрицы H обнуляются. Вместо диагонального коэффициента ставится единица, а в правую часть системы переносится соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы и определяется форма потери устойчивости оболочки.

2. Результаты численного исследования задачи нелинейного деформирования и устойчивости эллиптических оболочек. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: длина оболочек $L = 500$, 1100 мм, толщина $h = 5$ мм, модуль упругости $E = 0{,}7 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, эквипериметрический радиус (радиус поперечного сечения круговой оболочки с периметром P, равным периметру эллиптической оболочки $R_0 = 1000$ мм. Величина R_0 определялась по формуле

$$R_0 = \frac{P}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big\{1 + \Big[\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 - 1\Big]\sin^2\psi\Big\}^{1/2}\delta\psi = \frac{2a}{\pi}\,E\Big(\frac{\pi}{2},\frac{b}{a}\Big),$$

где $E(\pi/2, b/a)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

На рис. 2 для оболочки с размерами $h = 5$ мм и $L = 500$ мм в случае раздельного действия моментов показаны зависимости параметров $k_m = M^*/M_0$, $k_p = M^*_{\text{к}}/M_{\text{к}0}$ от параметра эллиптичности a/b в случае линейного (штриховые кривые) и нелинейного (сплошные кривые) исходных напряженно-деформированных состояний (M^*, $M^*_{\text{к}}$ — критические значения изгибающего и крутящего моментов; $M_0 = \pi E R_0 h^2/\sqrt{3(1-\nu^2)}$,

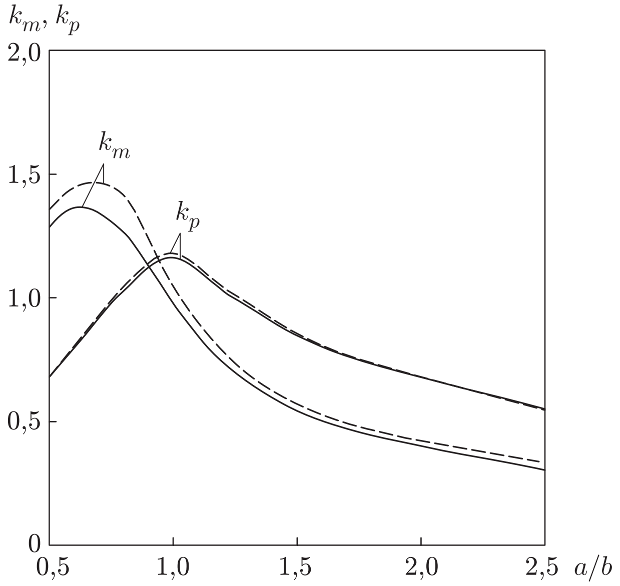

Рис. 2

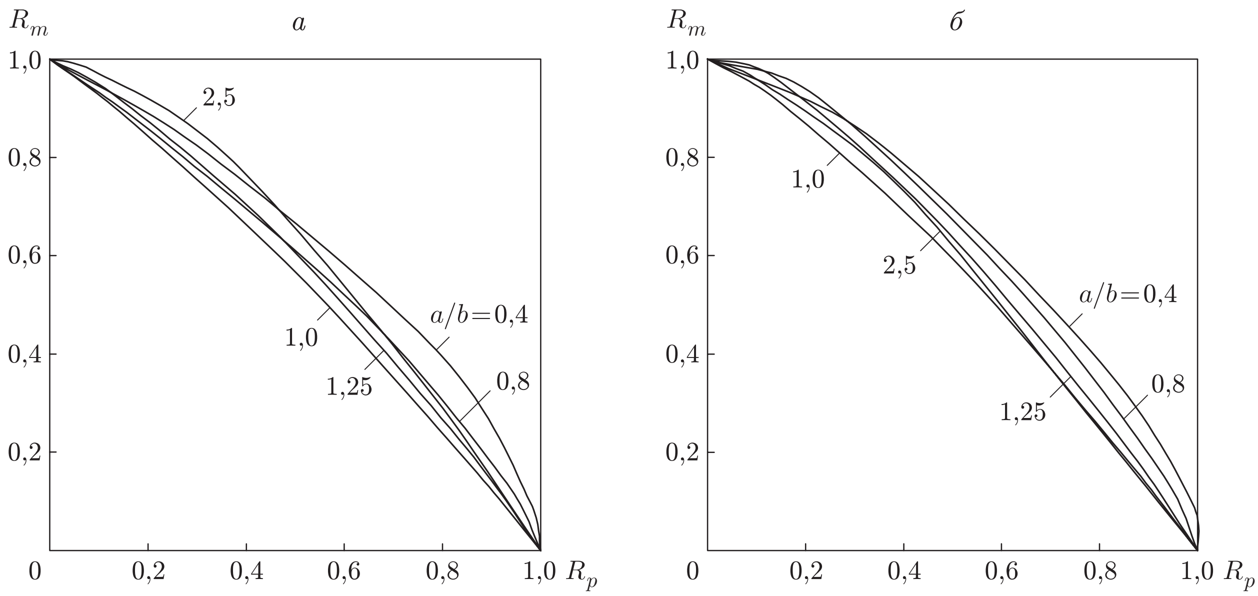

Рис. 3

$M_{к0} = 2\pi C R_0^2 S_b$ — критические значения изгибающего и крутящего моментов для эквипериметрической круговой цилиндрической оболочки; $S_b = 0{,}78Eh(h/R_0)^{5/4}(R_0/L)^{1/2}$; $C = 0{,}953$). С увеличением эллиптичности значения k_p уменьшаются почти пропорционально отношению малой полуоси к большой. Наиболее устойчивой оказывается круговая эквипериметрическая оболочка ($k_p = 1{,}16$). Такая же закономерность имеет место при изгибе сплющенных по высоте ($a/b > 1$) оболочек. Вытянутые по высоте оболочки ($a/b < 1$) оказываются более устойчивыми по сравнению с эквипериметрическими круговыми оболочками за счет увеличения момента инерции поперечного сечения (эффект двутавра). Наиболее устойчивы оболочки с $a/b \approx 0{,}7$ ($k_m = 1{,}34$). Нелинейность оказывает незначительное влияние. В случае изгиба оно больше: различие критических моментов достигает 10 %.

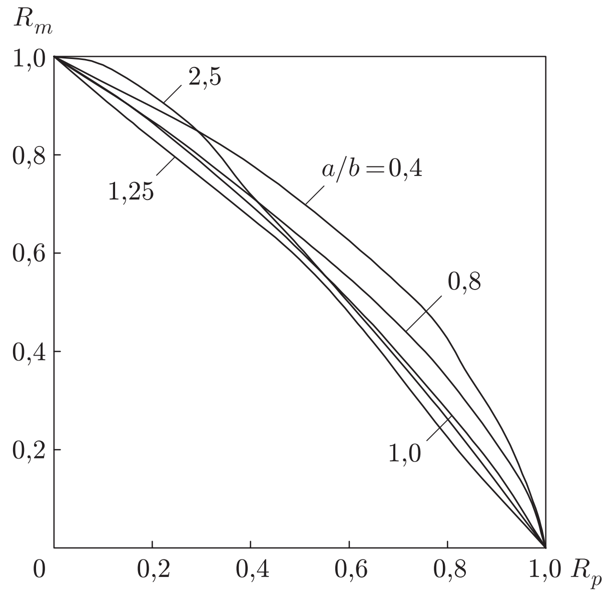

Рис. 4

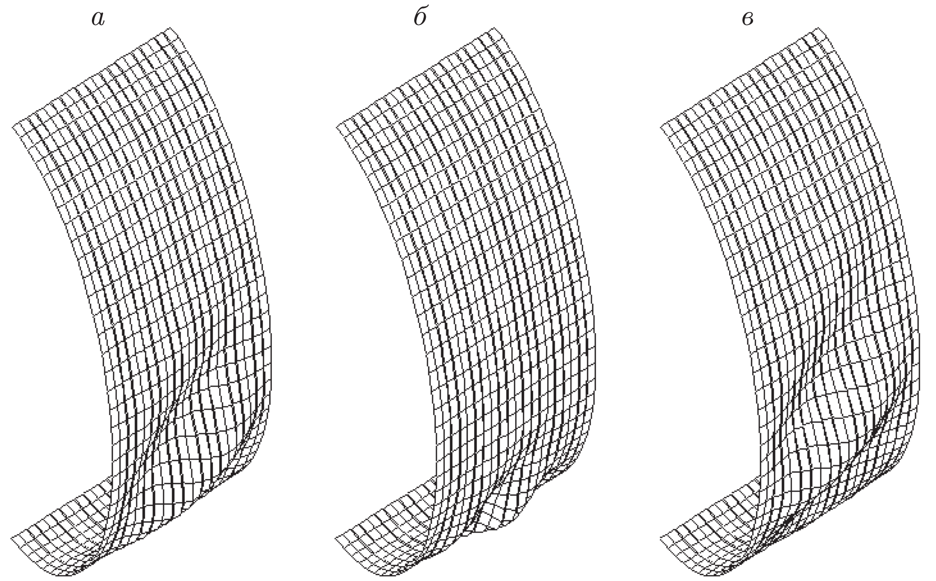

Рис. 5

На рис. 3,*а*,*б* для оболочек с размерами $h = 5$ мм и $L = 500$ мм показаны зависимости $R_m(R_p)$ в случае линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний соответственно при различных значениях параметра эллиптичности ($R_m = k_m/k_{m0} = M^*/M_p^*$; $R_p = k_p/k_{p0} = M_{\text{к}}^*/M_{\text{к}p}^*$; k_{m0}, k_{p0}, M_p^*, $M_{\text{к}p}^*$ — критические значения параметров k_m, k_p и моментов M, $M_{\text{к}}$ при раздельном нагружении). Из рис. 3 следует, что влияние нелинейности исходного состояния на зависимость $R_m(R_p)$ незначительно.

На рис. 4 показаны зависимости $R_m(R_p)$ для длинной оболочки ($h = 5$ мм, $L = 1100$ мм) в случае линейного исходного напряженно-деформированного состояния.

Форма потери устойчивости оболочек существенно зависит как от длины и параметра эллиптичности оболочек, так и от отношения k_m/k_p. При $k_m/k_p < 1$, $a/b < 1$ оболочки теряют устойчивость с образованием одной — трех наклонных складок на боковой поверхности оболочки, причем с увеличением параметра a/b и отношения k_m/k_p волнообразование смещается с боковой поверхности на нижнюю часть оболочки, а число волн уменьшается с трех до одной. Высокие оболочки при $k_m/k_p < 1$ теряют устойчивость в результате действия касательных усилий с образованием трех наклонных складок. При $k_m/k_p > 1$ оболочки теряют устойчивость в нижней части в результате действия максимальных сжимающих осевых усилий с образованием ромбовидных вмятин. На рис. 5,*а–в* показаны формы потери устойчивости оболочки с размерами $L = 1100$ мм, $h = 5$ мм, $a/b = 0{,}4$ при кручении, изгибе и совместном действии изгиба и кручения ($k_m/k_p = 1$) соответственно.

Приведенные выше результаты исследований получены на сетке конечных элементов, обеспечивающей сходимость решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
2. **Григолюк Э. И., Кабанов В. В.** Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
3. **Астрахарчик С. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 102–108.
4. **Кабанов В. В., Астрахарчик С. В.** Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. науч. тр. Красноярск: Краснояр. инж.-строит. ин-т, 1985. С. 75–83.

Поступила в редакцию 31/III 2003 г.