ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 4

УДК 532.542:536.73

УСЛОВИЯ В УЗЛЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Ю. А. Дубравин

Пермский государственный университет,
614600 Пермь

Законы сохранения гидродинамики в интегральной форме в общем случае внутренних течений при квазиодномерной трактовке течений в каналах приводят к незамкнутой системе уравнений. Решение их применительно к задачам раздачи (или втекания) потока из канала через боковые патрубки требует привлечения дополнительных гипотез: в [1] постулируется кинематическая связь для потоков в основном канале и боковых патрубках; в [2] для входного участка бокового патрубка используются соотношения гидростатики; в [3] при решении задач распада произвольного разрыва на различного вида местных сопротивлениях векторное уравнение движения заменяется скалярным соотношением, содержащим коэффициент гидравлических потерь, и в боковом ответвлении коэффициент поджатия потока принят равным единице; в [4] истечение сверхзвукового потока из канала через патрубок отождествляется с истечением потока из полубесконечного пространства через щель в тонкой пластине.

В данной работе для решения названной задачи используется обобщение гипотезы, предложенной в [5], о независимости термодинамической функции (коэффициента восстановления σ_p) явно от геометрических характеристик канала и патрубков.

1. Рассматривается участок канала в общем случае переменного поперечного сечения, в пределах которого в боковую стенку канала врезаны произвольное число m различным образом ориентированных патрубков. Сечения S^- и S^+ ограничивают зону перестройки течения в канале (рис. 1), в патрубках сечения S_{mk} выбираются там, где становится приемлемым допущение об одномерности потока (при истечении — в минимальном сечении струи). Законы сохранения гидродинамики для объема канала и патрубков между названными сечениями при допущениях, использованных в [5], приводят к уравнениям

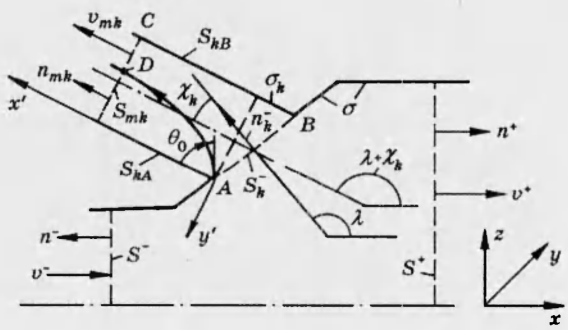

Рис. 1

$$(S\rho v)^+ = (S\rho v)^- - \sum_{k=1}^{m}(\varepsilon S\rho v_n)_{mk},$$

$$(\alpha S\rho v\mathbf{v} + S\mathbf{n}p)^+ - (\alpha S\rho v\mathbf{v} - S\mathbf{n}p)^- + p_\sigma \int\limits_{\sigma+\sum S_k} \mathbf{n}\,dS - \int\limits_{\sigma_\text{т}+S^-+S^+} \boldsymbol{\tau}_n^*\,dS +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\Bigg\{(\alpha S\rho v_n^2)_{mk} \int\limits_{(\varepsilon S)_{mk}} \mathbf{n}\,dS + p_{mk} \int\limits_{(\varepsilon S)_{mk}} \mathbf{n}\,dS + p_{\delta k} \int\limits_{(1-\varepsilon)S_{mk}} \mathbf{n}\,dS +$$
$$+ p_{\delta k}\Bigg[\int\limits_{S_{kA}} \mathbf{n}\,dS + \nu_k \int\limits_{\sigma_k} \mathbf{n}\,dS\Bigg] + p_{\sigma k}\Bigg[\int\limits_{S_{kB}} \mathbf{n}\,dS + (1-\nu_k)\int\limits_{\sigma_k} \mathbf{n}\,dS\Bigg] - \tag{1.1}$$
$$- p_\sigma \int\limits_{S_k^-} \mathbf{n}\,dS - \int\limits_{\sigma_{\text{т}k}+S_{mk}} \boldsymbol{\tau}_n^*\,dS\Bigg\} = 0,$$

$$(S\rho vH)^+ - (S\rho vH)^- + \int\limits_{\sigma_\text{т}+S^-+S^+} (q_n^* - \boldsymbol{\tau}_n^*\cdot\mathbf{v})\,dS +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\Bigg\{(\varepsilon S\rho v_n H)_{mk} + \int\limits_{(\varepsilon S)_{mk}+\sigma_{\text{т}k}} (q_n^* - \boldsymbol{\tau}_n^*\cdot\mathbf{v})\,dS\Bigg\} = 0, \quad p = \rho RT.$$

Здесь p, ρ, v, T — давление, плотность, скорость, температура; $H = \beta v^2/2 + \gamma p/(\gamma-1)\rho$; α, β — коэффициенты неоднородности поля скоростей; ε — степень поджатия потока в боковых патрубках; $\mathbf{n}$ — вектор нормали; $\boldsymbol{\tau}_n^*$, $\mathbf{q}^*$ — векторы напряжений и теплового потока (включая эффекты вязкости и турбулентности); $\sigma_\text{т}$ и $\sigma_{\text{т}k}$ — поверхности трубок тока транзитного потока и втекающего (вытекающего) в боковой патрубок. При записи уравнения движения допускается различие средних давлений в зоне отрыва потока $p_{\delta k}$ и в минимальном сечении струи p_{mk}, что подтверждается фактом значительных градиентов давления в зонах отрыва при истечении сверхзвуковых потоков [6]; p_σ и $p_{\sigma k}$ — средние давления на боковой поверхности канала и k-го патрубка (в пределах контакта струи с поверхностью патрубка) соответственно. Области действия давлений $p_{\delta k}$ и $p_{\sigma k}$ на поверхности патрубка в общем случае зависят от ориентации патрубка (угол χ_k, см. рис. 1) и его формы. Принимая для простоты сечение S_{mk} прямоугольным, зоны действия этих давлений можно описывать с помощью коэффициента $\nu_k = (1 - \operatorname{sign}\chi_k)/2$, где знак χ_k положителен при отклонении оси патрубка от нормали к поверхности σ против часовой стрелки. В этом случае длины участков поверхностей S_{kA} и S_{kB} одинаковы и могут быть определены в виде

$$b_k = (x'_D/a_m - \nu_1 \operatorname{tg}\chi)_k, \tag{1.2}$$

где $\nu_{1k} = \nu_k \operatorname{sign}\chi_k$; a_{mk} — ширина патрубка; x'_{Dk} — координата точки D_k границы струи в минимальном сечении (см. ниже); $b_k = 0$, если правая часть (1.2) неположительна.

Последующие преобразования уравнений (1.1) отличаются от [5] лишь большей громоздкостью и могут быть опущены. Существенным является лишь то обстоятельство, что в качестве «лишних» $m+1$ неизвестных здесь появляются давления p_σ и $p_{\sigma k}$ или их весовые коэффициенты φ_p и φ_{pk}: $p_\sigma = \varphi_p p^+ + (1-\varphi_p)p^-$, $p_{\sigma k} = \varphi_{pk}p_{mk} + (1-\varphi_{pk})p_\sigma$. Тогда исходные уравнения можно записать как

$$
\begin{gathered}
(S\rho v)^+ = (1+\Delta_G)(S\rho v)^-, \qquad (1+\Delta_G)H^+ = H^- + \Delta_H(a^-)^2,\\
(\alpha S\rho v^2)^+ + p^+\sigma^+ = (\alpha S\rho v^2)^- + p^-\sigma^- - (S\rho v^2)\Delta_\tau^* - \sum_{k=1}^{m}(p^- - p_{\delta k})\bar S_{mk}k_{3k};
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{mk}(p_{mk} - p_{\delta k}) + (\varepsilon\rho v_n^2)_{mk}(\alpha_{mk} + \Delta_{\tau k}/n_{mk\tau})k_{1k} =\\
= k_{2k}(p_\sigma - p_{\delta k}), \qquad k = 1, m.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Уравнения (1.4) являются следствием уравнения движения в проекции на оси y, z; с их помощью в (1.3) исключены давления p_{mk}. В дальнейшем при неизвестных Δ_{Gk} уравнения (1.4) используются для их определения. В (1.4) k_{ik} содержат неизвестные φ_{pk}, описывают форму и ориентацию патрубков и для плоских течений в патрубках приводятся к соотношениям

$$
\begin{gathered}
k_{1k} = (1 + \varphi_{pk}\psi_{5k}/\varepsilon_{mk})^{-1}, \qquad k_{2k} = k_{1k}(\psi_{7k} - \psi_{5k} + \varphi_{pk}\psi_{5k}),\\
k_{3k} = k_{1k}(\psi_{1k} + \varphi_{pk}\psi_{2k}), \qquad k_{4k} = k_{1k}(\psi_{3k} + \varphi_{pk}\psi_{4k}/\varepsilon_{mk}),\\
\psi_{1k} = (-\mathrm{tg}\,\chi_k + q_k)/\sin(\lambda+\chi_k), \quad \psi_{2k} = (1-\varepsilon_{mk})q_k/\varepsilon_{mk}\sin(\lambda+\chi_k),\\
\psi_{3k} = \Delta_{\tau k}\,\mathrm{ctg}(\lambda+\chi_k)/\alpha_{mk}, \quad \psi_{4k} = [\alpha_k + \Delta_{\tau k}\sin(\lambda+\chi_k)]q_k/\alpha_{mk}\sin(\lambda+\chi_k),\\
\psi_{5k} = -\mathrm{ctg}(\lambda+\chi_k)\cdot q_k, \quad \psi_{6k} = q_k\sin(\lambda+\chi_k), \quad \psi_{7k} = \sin\lambda/\cos\chi_k\sin(\lambda+\chi_k),\\
q_k = b_k + (1-\nu_k)\mathrm{tg}\,\chi_k, \quad n_{mk\tau} = \sin(\lambda+\chi_k).
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

Остальные величины в (1.3), (1.4) в основном подобны аналогичным величинам в [5]:

$$
\sigma^- = \sigma^+, \quad \sigma^+ = S^+[1 - \varphi_p(\Delta_S - k_5)], \quad k_5 = (1-\Delta_S)\sum_{k=1}^{m}\bar S_{mk}k_{3k},
$$

$$
\bar S_{mk} = S_{mk}/S^-, \quad \Delta_S = 1 - S^-/S^+, \quad \Delta_\tau^* = \Delta_\tau + \sum_{k=1}^{m}(\alpha_m\Delta_G v_{nm})_k\,k_{4k}/v^-,
$$

$$
\Delta_{Gk} = -G_k/G^-, \quad G_k = (\varepsilon S\rho v_n)_{mk}, \quad G^- = (S\rho v)^-, \quad \Delta_G = \sum_{k=1}^{m}\Delta_{Gk},
$$

$$
\Delta_Q = -\frac{\int\limits_{\sigma_\text{т}+S^-+S^+}(q_n^* - \tau_n^*\cdot\mathbf{v})\,dS}{(Ga^2)^-}, \qquad \Delta_{Qk} = \frac{\int\limits_{\sigma_{\text{т}k}+(\varepsilon S)_{mk}}(q_n^* - \tau_n^*\cdot\mathbf{v})\,dS}{G_k(a^-)^2},
$$

$$
a^2 = \gamma p/\rho, \qquad \Delta_H = \Delta_Q + \sum_{k=1}^{m}\Delta_{Gk}(A_{Hk}(H/a^2)^- - \theta_k\Delta_{Qk}),
$$

$A_{Hk} = 1$, $\theta_{Hk} = 0$ при истечении из канала, $A_{Hk} = H_k/H^-$, $\theta_{Hk} = 1$ при втекании,

$$
\Delta_\tau = -\frac{\int\limits_{\sigma_\text{т}+S^-+S^+}\tau_{nx}^*\,dS + \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{\sigma_{\text{т}k}+S_{mk}}\tau_{nx}^*\,dS}{G^-v^-},
$$

$\Delta_{\tau k}$ в отличие от Δ_τ связаны с поперечными составляющими вектора напряжений для трубок тока боковых патрубков.

Уравнения (1.3) описывают реакцию газа в канале на локальные конечные по величине воздействия: геометрические Δ_S, χ_k, расходные Δ_{Gk}, тепловые Δ_Q, Δ_{Qk} и сил трения Δ_τ, $\Delta_{\tau k}$. При заданных воздействиях в задачах истечения эти уравнения незамкнуты за счет $m+1$ неизвестных давлений p_σ, $p_{\sigma k}$ (или φ_p, φ_{pk}). В задачах подвода массы, где $p_{mk} = p_{\delta k} = p_{\sigma k} = p_\sigma$ [5], в уравнении движения (1.1) обращается в нуль группа интегралов в фигурной скобке, кроме первого и последнего, в силу известного свойства $\int_{S_k} \mathbf{n}\, dS = 0$ (S_k — замкнутая поверхность объема в k-м боковом патрубке). При этом в уравнениях (1.3) за счет патрубков с подводом массы число неизвестных φ_{pk} сокращается (в предельном случае до одного p_σ). Этому случаю в (1.3)–(1.5) соответствуют

$$k_{3k} = k_5 = 0, \quad \Delta_{\tau k} = -(\alpha n_r)_{mk}, \quad k_{4k} = -\cos(\lambda + \chi_k), \tag{1.6}$$

что приводит к совпадению с результатами в [5] при подводе массы в канал, в связи с чем основное внимание будет уделено задачам истечения.

2. В предположении, что параметры состояния газа в сечении S^- являются известными, а в S^+ — искомыми, решение уравнений гидродинамики (1.3), выполненное по схеме, изложенной в [5], приводит к выражениям

$$\frac{v^+}{v^-} = \frac{K \pm \nu N}{(1+\Delta_G)(n+1)\mathrm{M}^{-2}}, \qquad \frac{\rho^+}{\rho^-} = \frac{(1-\Delta_S)(1+\Delta_G)^2(n+1)\mathrm{M}^{-2}}{K \pm \nu N},$$

$$\frac{p^+}{p^-} = \frac{K \mp \nu n N}{I(n+1)}, \quad \frac{T^+}{T^-} = \frac{(K \mp \nu n N)(K \pm \nu N)}{I(1-\Delta_S)(1+\Delta_G)^2(n+1)^2\mathrm{M}^{-2}}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{M}^{+2} = (1-\Delta_S) I \frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N}, \quad \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \varphi_p\Big(\frac{p^+}{p^-} - 1\Big), \quad \frac{p_{\sigma k}}{p_\sigma} = 1 + \varphi_{pk}\Big(\frac{p_{mk}}{p_\sigma} - 1\Big);$$

$$\mathrm{M} = v/a, \quad \mathrm{M}^{-2} = (\mathrm{M}^-)^2, \quad n = (1 - (\gamma-1)\sigma^+/\gamma S^-)^{-1},$$

$$I = n\sigma^+/\gamma S^-, \quad \nu = \operatorname{sign}(\mathrm{M}^- - 1), \quad K = I + n\mathrm{M}^{-2}(\alpha^- - \widetilde{\Delta}^*_\tau),$$

$$N = \Big\{\frac{K^2 - 2(n^2-1)\mathrm{M}^{-2}(c_1 + c_2(\gamma-1)\mathrm{M}^{-2}/2)}{\gamma - 1}\Big\}^{1/2},$$

$$c_1 = (1+\Delta_G)\Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_{Hk}\Delta_{Gk} + (\gamma-1)\Big(\Delta_Q - \sum_{k=1}^{m} \theta_{Hk}\Delta_{Gk}\Delta_{Qk}\Big)\Big), \tag{2.2}$$

$$c_2 = (1+\Delta_G)\Big(\beta^- + \sum_{k=1}^{m} A_{Hk}\Delta_{Gk}\Big), \quad \widetilde{\Delta}^*_\tau = \Delta^*_\tau + \frac{\sum_{k=1}^{m}(1 - p_{\delta k}/p^-)S_{mk}k_{3k}}{\gamma \mathrm{M}^{-2}}.$$

В соотношениях (2.1), помимо упомянутых выше воздействий, при выборе нижнего знака предусмотрена возможность появления прямого скачка уплотнения. Вводя для части воздействий обозначение

$$X = \{x_i\} = \{\mathrm{M}^-, \Delta_{Gk}, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, \Delta_\tau, \Delta_{\tau k}\}, \tag{2.3}$$

общую структуру решения для произвольного гидродинамического параметра ψ можно представить в виде

$$\psi^+/\psi^- = f(X, \Delta_S, \chi_k, \varphi_p(X, \Delta_S, \chi_k), \varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)).$$

Соотношения (2.1) рассматриваются как промежуточный этап решения, так как содержат неизвестные φ_p и φ_{pk}, предполагаемые функциями всех возможных воздействий.

3. Определение φ_p и φ_{pk}, как и в [5], основано на возможности описания термодинамической функции $\sigma_p = p_0^+/p_0^-$ (p_0 — давление торможения) двумя способами. Первый (с использованием двух начал термодинамики, записанных для среды в рассматриваемом объеме) приводит к тем же соотношениям, что и в [5], и позволяет утверждать, что функция $\sigma_p^{(1)}$ не зависит явно от геометрических характеристик канала (здесь — скачка площади сечения канала, ориентации боковых патрубков) и является функцией воздействий X

$$\sigma_p^{(1)} = f_1(X), \tag{3.1}$$

где вид функции f_1 в рамках рассматриваемого подхода не определен, и (3.1) носит качественный характер.

С другой стороны, три закона сохранения гидродинамики в форме (2.1) дают

$$\sigma_p^{(2)} = \frac{\pi(\mathrm{M}^-)}{I(n+1)}(K \mp \nu n N)\Big(1 + \frac{n-1}{2}\,\frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{3.2}$$

($\pi(\mathrm{M}) = (\tau(\mathrm{M}))^{\gamma/(\gamma-1)}$, $\tau(\mathrm{M}) = (1 + (\gamma - 1)\mathrm{M}^2/2)^{-1}$), откуда

$$\sigma_p^{(2)} = f_2(X, \Delta_S, \chi_k, \varphi_p(X, \Delta_S, \chi_k), \varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)). \tag{3.3}$$

Зависимость функции f_2 от аргументов X, Δ_S, χ_k и величин φ_p и φ_{pk} определена соотношением (3.2). Очевидно также, что $\sigma_p^{(1)}$ и $\sigma_p^{(2)}$ определяют одну и ту же величину, поэтому

$$\sigma_p^{(1)} = \sigma_p^{(2)} \qquad \text{или} \qquad d\sigma_p^{(1)} - d\sigma_p^{(2)} = 0. \tag{3.4}$$

Теперь проблема сводится к такому подбору функций $\varphi_p(X, \Delta_S, \chi_k)$ и $\varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)$, при котором обеспечивается независимость $\sigma_p^{(2)}$ от Δ_S и χ_k. Один из возможных приемов определения φ_p и φ_{pk}, ранее использованный в [5], состоит в следующем. Разности частных дифференциалов этих функций и независимость воздействий X, Δ_S, χ_k, обоснованная в [5], приводят к системе дифференциальных уравнений в частных производных, обеспечивающих независимость функции $\sigma_p^{(2)}$ в (3.2) от геометрических воздействий Δ_S, χ_k:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p}\frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}}\frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \Delta_S} = -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S}, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p}\frac{\partial \varphi_p}{\partial \chi_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}}\frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \chi_j} = -\frac{\partial f_2}{\partial \chi_j}, \qquad j = 1, m. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, соотношения (3.5), или исходное условие (3.4), являются аналитическим выражением гипотезы о независимости термодинамической функции σ_p явно от геометрических воздействий как от независимых переменных и обобщают ранее полученные результаты [5] на большее число воздействий. Решения (3.5) относительно φ_p и φ_{pk} совместно с (2.1) описывают реакцию потока в канале на локальные конечные по величине воздействия X, Δ_S, χ_k, образуя при этом замкнутую систему уравнений.

Исследование типа системы дифференциальных уравнений (3.5) по схеме [7] выявило гиперболичность этих уравнений во всем возможном диапазоне скоростей потока и, следовательно, необходимость задания начальных условий для их решения. При этом любые направления в пространстве переменных Δ_S, χ_k являются характеристическими. В частности, для m одинаковых патрубков ($\chi_k = \chi$) выполняются соотношения

$$\Delta_S = \text{const}: \quad m\,\frac{\partial f_2}{\partial\varphi_{pk}}\,d\varphi_{pk} + \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_p}\,d\varphi_p = -m\,\frac{\partial f_2}{\partial\chi}\,d\chi,$$
$$\chi = \text{const}: \quad m\,\frac{\partial f_2}{\partial\varphi_{pk}}\,d\varphi_{pk} + \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_p}\,d\varphi_p = -\frac{\partial f_2}{\partial\Delta_S}\,d\Delta_S.$$

4. Альтернативные методы нахождения φ_p и φ_{pk} рассмотрены ниже сначала на примере несжимаемой жидкости. Разложение в ряды по степеням чисел Маха (в окрестности $\mathrm{M} = 0$ и удержание членов до M^2 включительно) функций в уравнениях (2.1), (3.2) приводит к соотношениям

$$\frac{v^+}{v^-} = (1-\Delta_S)(1+\Delta_G), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1+(1-\Delta_S)(\delta^*+c_1\Delta_S)/\mathrm{Eu}^-(1-\varphi_p(\Delta_S-k_5)),$$
$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1+\varphi_p(1-\Delta_S)(\delta^*+c_1\Delta_S)/\mathrm{Eu}^-(1-\varphi_p(\Delta_S-k_5)), \quad \delta^* = \alpha^- - \Delta_\tau^* - c_1,$$
$$\frac{p_{\sigma k}}{p^-} = \varphi_{pk}\,\frac{p_{mk}}{p^-} + (1-\varphi_{pk})\,\frac{p_\sigma}{p^-}, \quad \frac{\rho^+}{\rho^-} = 1, \quad c_1 = (1+\Delta_G)^2, \tag{4.1}$$
$$\mathrm{Eu}^- = 1/\gamma\mathrm{M}^{-2}, \quad \Delta_\tau^* = \Delta_\tau - \sum_{k=1}^{m}\alpha_{mk}\Delta_{Gk}^2 k_{4k}/\,S_{mk}\varepsilon_{mk};$$

$$\sigma_p^{(2)} = \frac{2\mathrm{Eu}^- + 2(1-\Delta_S)(\delta^*+c_1\Delta_S)/(1-\varphi_p(\Delta_S-k_5))+c_1(1-\Delta_S)^2}{1+2\mathrm{Eu}^-}, \tag{4.2}$$

которые при $\chi_k = 0$ и $x'_{Dk} = 0$ ($k_{1k} = k_{2k} = 1, k_{3k} = k_{4k} = k_{5k} = 0$) становятся тождественными соответствующим уравнениям в [5]. Для последних предварительно отметим новые способы определения φ_p. В частности, подобно [8], разнесение величин, зависящих от воздействия Δ_S и не зависящих от него (в том числе σ_p), в разные части уравнения позволяет заключить, что обе части уравнения являются некоторой функцией $\lambda(X)$ воздействий X, значение которой легко определяется (при $\Delta_S = 0$ $\lambda(X) = 0$, следовательно, $\lambda(X) = 0$ при любых Δ_S):

$$\sigma_p(1+2\mathrm{Eu}^-) - 2\mathrm{Eu}^- - 2\delta - c_1 =$$
$$= \Delta_S[-2\delta - c_1\Delta_S + \varphi_p(\sigma_p(1+2\mathrm{Eu}^-) - 2\mathrm{Eu}^- - (1-\Delta_S)^2 c_1)].$$

Этот прием дает значения σ_p и φ_p, совпадающие с решением дифференциального уравнения в [5] для φ_p с учетом начального условия. Второй прием состоит в прямом использовании гипотезы о независимости $\sigma_p^{(2)}$ от Δ_S и реализуется исключением из функции f_2 величин, зависящих от Δ_S. В итоге сразу получается выражение для σ_p ($\sigma_p = f_{20}$), а функция φ_p находится в готовом виде из решения алгебраического уравнения

$$f_2(X, \Delta_S, \varphi_p(X, \Delta_s)) - f_{20} = 0. \tag{4.3}$$

Оба названных способа дают одинаковые результаты. При этом уравнение

(4.3) может рассматриваться как частный интеграл дифференциального уравнения для φ_p в [5].

Последовательное применение любого из этих приемов к (4.2) дает

$$
\sigma_p = \frac{2\mathrm{Eu}^- + 2\delta + c_1}{1 + 2\mathrm{Eu}^-}, \quad \varphi_p = \frac{c_1\Delta_S + 2\delta}{c_1\Delta_S(2 - \Delta_S) + 2\delta}, \quad \delta = a^- - \Delta_\tau - c_1,
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_{pk} = \varepsilon_{mk}[Q_{2k} - 2\Delta_{\tau k}\Delta_{Gk}^2 \cos(\lambda + \chi_k)]/q_k[Q_{1k} + 2\Delta_{\tau k}\Delta_{Gk}^2 \sin(\lambda + \chi_k)], \\
Q_{1k} = 2\alpha_{mk}\Delta_{Gk}^2 - (1 - \varepsilon_{mk})S_{mk}^2(c_1\Delta_S + 2\delta), \\
Q_{2k} = S_{mk}^2(c_1\Delta_S + 2\delta)(q_k - \operatorname{tg}\chi_k).
\end{gathered} \tag{4.4}
$$

Соотношения (4.4) не содержат неизвестных функций, удовлетворяют уравнениям (3.5) (проверяется непосредственной подстановкой) и, значит, могут рассматриваться как частный интеграл уравнений (3.5).

Существенный (и естественный) вывод из (4.4) — зависимость среднего давления на боковой стенке канала p_σ (или φ_p) только от суммарных воздействий (здесь Δ_G, Δ_τ) и независимость от локальных (в смысле принадлежности к отдельному патрубку) воздействий, например χ_k. Подобная зависимость может проявляться лишь неявно из-за изменения общего расхода Δ_G (вслед за изменением Δ_{Gk}) и Δ_τ. В свою очередь, φ_{pk} зависит от характеристик «своего» патрубка, остальные патрубки влияют лишь через суммарные воздействия.

Найденные значения φ_p и φ_{pk} позволяют определить функции в (1.5) для несжимаемой жидкости (здесь ради краткости выписаны при $\Delta_{\tau k} = 0$) в виде

$$
\begin{gathered}
k_{1k} = Q_{1k}\sin(\lambda + \chi_k)/Q_k, \quad k_{2k} = \{Q_{1k}\sin\lambda + \cos\chi_k\cos(\lambda + \chi_k) \times \\
\times [q_k Q_{1k} - \varepsilon_{mk}Q_{2k}]\}/Q_k\cos\chi_k, \quad k_{3k} = 2\alpha_{mk}\Delta_{Gk}^2(q_k - \operatorname{tg}\chi_k)/Q_k, \\
k_{4k} = Q_{2k}/Q_k, \quad Q_k = Q_{1k}\sin(\lambda + \chi_k) - Q_{2k}\cos(\lambda + \chi_k)
\end{gathered}
$$

и окончательно найти гидродинамические параметры (4.1) как функции воздействий.

5. При истечении из канала идеальной жидкости одномерная трактовка течения, начиная с входного сечения бокового патрубка S_k^-, приводит к «нечувствительности» потока в канале к углу отвода массы [5]. Отказ от этого допущения влечет за собой расширение границ рассматриваемого объема жидкости в боковых патрубках вплоть до сечений, где допущение об одномерности становится более обоснованным, например в минимальном сечении струи в зоне отрыва (см. рис. 1). При этом параметры потока в канале меняются с изменением угла отвода массы χ_k. Платой за появление «чувствительности» потока является увеличение числа неизвестных в уравнениях гидродинамики от одного до $m + 1$, а само влияние осуществляется величинами b_k (1.2) (или x'_{Dk}, см. рис. 1). Ниже излагается приближенный способ определения расстояния от точки отрыва потока до минимального сечения струи в боковом патрубке для идеальной несжимаемой жидкости.

Используются следующие допущения: течение в патрубке плоское, безвихревое в окрестности граничной линии тока AD, в минимальном сечении поток однородный и параллелен оси патрубка, давление в зоне отрыва $p_{\delta k}$ постоянно и совпадает с давлением p_{mk} в минимальном сечении струи (при этом на линиях AD, DC $v = v_{mk} = \mathrm{const}$). В этих условиях в окрестности границы AD можно ввести комплексный потенциал W и комплексную скорость $\xi = (Q/va)_{mk}dW/dz$. Здесь W, ξ, $z = x' + i\bar{y}'$

нормированы с помощью расхода через патрубок Q_{mk}, v_{mk} и a_{mk} соответственно. В плоскости годографа линии тока ψ_{AD} соответствует дуга сектора с углом θ_0. Принимая $\psi_{AD} = 0$, используя определение комплексной скорости и функцию [9]

$$W = (\xi + 1/\xi)/2,$$

отображающую дугу окружности в плоскости ξ на отрезок вещественной оси плоскости W, можно установить связь $z(W)$, мнимая и вещественная части которой следующие:

$$\begin{gathered} 2\pi k - \theta_0 - \sin(2\pi k - \theta_0)\cos(2\pi k - \theta_0) = \beta 2(1 - \varepsilon_{mk})\varepsilon(\mathrm{M}_{mk})/\varepsilon_{mk}, \\ \bar{x}'_{Dk} = x'_{Dk}/a_{mk} = \varepsilon_{mk}\sin^2\theta_0/2\varepsilon(\mathrm{M}_{mk}), \quad k \in N. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь $\varepsilon(\mathrm{M}_{mk}) = 1$ для несжимаемой жидкости; $\beta = -1$ для $k \le 0$, а $\beta = 1$ для $k > 0$ (последовательность величин k выбирается из условия монотонного поведения ε_{mk}); $\varepsilon_{mk} = (Q/va)_{mk}$ — коэффициент поджатия потока, связанный с расходным воздействием соотношениями

$$\Delta_{Gk} = -\varepsilon_{mk}\bar{S}_{mk}\mu_k, \quad \mu_k = v_{mk}/v^- = (1 + 2\mathrm{Eu}^-(1 - p_{mk}/p^-))^{1/2}. \tag{5.2}$$

Таким образом, соотношения (5.1), (5.2) устанавливают связь x'_{Dk} с расходным воздействием. При этом с помощью циркуляции $2\pi k$ моделируется «вихревая зона» в окрестности входа в боковой патрубок, появление которой сопровождается падением расхода через патрубок [10, 11].

В целом соотношения пп. **4, 5** позволяют в явном виде определить параметры состояния потока несжимаемой жидкости в канале при любых (учитываемых здесь) локальных воздействиях. При этом для учета воздействий Δ_τ в ряде случаев могут оказаться полезными экспериментальные данные по гидравлическим потерям ζ_3 приточных тройников [12]. Так, для потока в канале, подобно [5], имеем

$$\zeta_3 = 1 - c_1 - 2\delta = 2(1 - \alpha^-) + \Delta_G(2 + \Delta_G) + 2\Delta_\tau. \tag{5.3}$$

6. В случае сжимаемой жидкости эффективным способом определения σ_p, φ_p и φ_{pk} является последний из рассмотренных в п. **4** приемов, который приводит к соотношениям (для краткости рассмотрен случай одинаковых патрубков)

$$\begin{gathered} \sigma_p = f_{20}(X) = \frac{\pi(\mathrm{M}^-)}{\gamma+1}(K_0 \mp \nu\gamma N)\Big(1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{K_0 \pm \nu N_0}{K_0 \mp \nu\gamma N_0}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ K_0 = 1 + \gamma\mathrm{M}^{-2}(\alpha^- - \Delta_\tau), \\ N_0 = \{K_0^2 - 2(\gamma+1)\mathrm{M}^{-2}(c_1 + c_2(\gamma-1)\mathrm{M}^{-2}/2)\}^{1/2}; \end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} f_2^0(X, \Delta_S, \varphi_p(X, \Delta_S)) - f_{20}(X) = 0, \\ f_2^0 = \frac{\pi(\mathrm{M}^-)}{I^0(n^0+1)}(K^0 \mp \nu n^0 N^0)\Big(1 + \frac{n^0-1}{2}\frac{K^0 \pm \nu N^0}{K^0 \mp \nu n^0 N^0}\Big)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ K^0 = I^0 + n^0\mathrm{M}^{-2}(\alpha^- - \Delta_\tau), \\ N^0 = \{K^{0^2} - 2(n^{0^2} - 1)\mathrm{M}^{-2}(c_1 + c_2(\gamma-1)/2)/(\gamma-1)\}^{1/2}, \\ n^0 = \gamma(1 + (\gamma-1)\varphi_p\Delta_S)^{-1}, \quad I^0 = (1 - \varphi_p\Delta_S)/(1 - \Delta_S)(1 + (\gamma-1)\varphi_p\Delta_S); \end{gathered} \tag{6.2}$$

$$f_2(X, \Delta_S, \chi_k, \varphi_p(X, \Delta_S), \varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)) - f_{20}(X) = 0. \tag{6.3}$$

Трансцендентные уравнения (6.2) и (6.3) решаются поочередно для нахождения $\varphi_p(X, \Delta_S)$ и $\varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)$. В этих уравнениях учтено, что φ_τ не зависит от локальных воздействий χ_k (см. п. 4).

При определении x'_{Dk} для сжимаемого потока в дополнение и частично взамен сделанных ранее допущений (п. 5) используются следующие допущения: течение стационарное, в окрестности линии тока AD процессы адиабатические, $\mathrm{M}^- < 1$, $\mathrm{M}_{mk} \leq 1$ (сверхзвуковые течения в окрестности входа в патрубок содержат криволинейные скачки уплотнения [6] и требуют специального рассмотрения). В этих условиях потенциал скорости и функция тока связаны [13]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Здесь $\rho/\rho_0 = \rho_{mk}/\rho_0 = \varepsilon(\mathrm{M}_{mk}) = \mathrm{const}$ ($\varepsilon(\mathrm{M})$ — газодинамическая функция для плотности) и в переменных (x, y) может отождествляться с функцией С. А. Чаплыгина. Вводя приведенный потенциал скорости $\varphi_1 = \varphi\varepsilon(\mathrm{M}_{mk})$, можно рассматриваемую задачу свести к ранее решенной (5.1), (5.2), где $\varepsilon(\mathrm{M}_{mk}) < 1$, а μ_k определено в [5]:

$$\mu_k = (\mathrm{M}_{mk}/\mathrm{M}^-)(\tau(\mathrm{M}_{mk})/\tau(\mathrm{M}^-))^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}.$$

7. Полученные выше соотношения применительно к задачам истечения (втекания) из канала позволяют сформулировать и решать круг задач: определение расходов (с учетом поджатия струй) при истечении несжимаемой и сжимаемой жидкости из канала через произвольно ориентированный патрубок в среду с заданным давлением, в замкнутый объем, впрыск жидкости в канал, перетекание жидкости между перекрещивающимися каналами через соединительный патрубок, определение границ этих режимов течения, теоретических значений коэффициентов гидравлических потерь (см. (5.3) при $\Delta_\tau = 0$) и т. п.

В частности, истечение сжимаемой жидкости из канала через патрубок ($m = 1$) в среду с заданным давлением $p_{\delta k}$ описывается уравнениями (1.4) при $p_{mk} = p_{\delta k}$, (1.5), частью соотношений (2.1) (при выборе верхнего знака) для давлений p_σ и p^+, (5.1) и (6.1)–(6.3). Перечисленные уравнения при прочих заданных воздействиях (Δ_S, Δ_τ, $\Delta_{\tau k}$, Δ_Q) позволяют выявить влияние ориентации патрубка χ_k на расход Δ_G из канала.

В случае идеальной ($\Delta_\tau = \Delta_{\tau k} = 0$, $\alpha^- = 1$, $\alpha_{mk} = 1$) несжимаемой ($\varepsilon(\mathrm{M}_{mk}) = 1$) жидкости, истекающей через боковое ответвление из канала постоянного сечения ($\Delta_S = 0$, $\varphi_p = 1$, см. (4.4), $p_\sigma = p^+$, см. п. 1), исходная система уравнений существенно упрощается и состоит из: (1.4) при $p_{mk} = p_{\delta k}$; (4.1) для p_σ, где $\delta^* = 1 - c_1 - \Delta^*_\tau$ и $\Delta^*_\tau = -\Delta_G^2 k_{4k}/\bar{S}_{mk}\varepsilon_{mk}$, $c_1 = (1 + \Delta_G)^2$; (4.5) для k_{1k}, k_{2k}, k_{4k}; (4.4) для Q_{1k}, Q_{2k}, где $q_k = b_k + (1 - \vartheta_k)\mathrm{tg}\,\chi_k$ и $b_k = x'_{Dk} - \vartheta_{1k}\mathrm{tg}\,\chi_k$, а ϑ_k и ϑ_{1k} см. в п. 1; (5.2) связывает расход Δ_G и коэффициент поджатия ε_{mk}; (5.1) связывает x'_{Dk} с расходом Δ_G через промежуточный параметр θ_0 (θ_0 — угол отклонения граничной линии тока AD в точке срыва потока A (см. рис. 1)). Все перечисленные уравнения удобно свести к системе двух уравнений относительно θ_0 и ε_{mk}; одно из них (уравнение (5.1)) остается без изменений и позволяет найти связь $\theta_0(\varepsilon_{mk})$, все остальные могут быть сведены к уравнению относительно ε_{mk} (ниже индекс k опущен):

$$\varepsilon_m^2 \bar{S}_m^2 \mu^2 - (2\bar{S}_m\mu - \mu^2)\varepsilon_m - F(\varepsilon_m, \theta_0, \chi, \bar{S}_m, \mu) = 0. \tag{7.1}$$

Здесь

$$F = (\mu^2 - 1)/2 + f(2\bar{S}_m\mu\varepsilon_m - \bar{S}_m^2\mu^2\varepsilon_m^2 + (\mu^2 - 1)/2);$$

$$f = \operatorname{tg}\chi \, \frac{(1+\overline{S}_m^2)\mu\varepsilon_m^2 - 2\overline{S}_m\varepsilon_m}{2\overline{S}_m + \mu\overline{S}_m^2\varepsilon_m^2 - [2\overline{S}_m + (1+\overline{S}_m^2)\mu]\varepsilon_m} \, \frac{\sin^2\theta_0}{2}.$$

Итогом решения названных уравнений является коэффициент поджатия потока ε_{mk} как функция геометрических характеристик бокового патрубка χ_k, $\overline{S}_{mk} = S_{mk}/S^-$ и комплексного гидродинамического параметра $\mu_k = v_{mk}/v^- = (1 + 2\mathrm{Eu}^-(1 - p_{mk}/p^-))^{1/2}$, $\mathrm{Eu}^- = p^-/\rho(v^-)^2$. Найденные значения ε_{mk} позволяют, предварительно определив Δ_G, $\dot{k}_{3k}$, $\dot{k}_5$, $\dot{k}_{4k}$ по (4.5), Δ_τ^*, φ_{pk} по (4.4), рассчитать гидродинамические параметры в выходном сечении канала и среднее давление струи на стенку (CB, см. рис. 1) бокового патрубка (4.1).

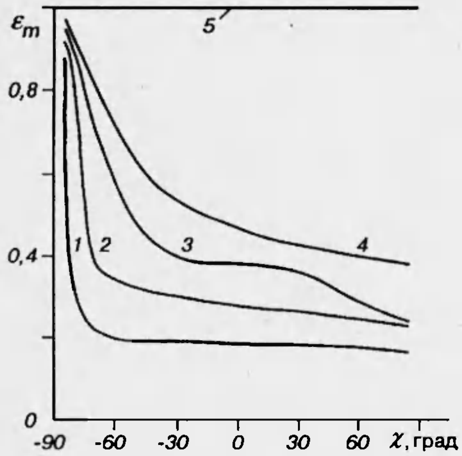

Рис. 2

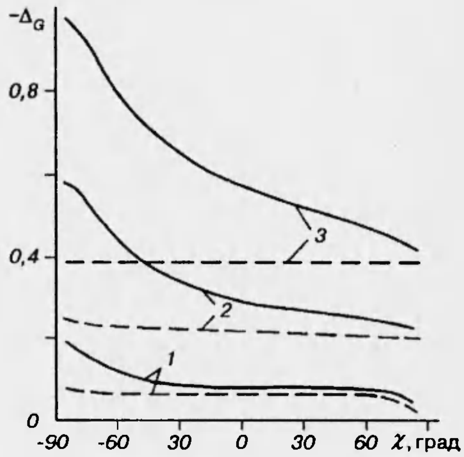

Рис. 3

Дополнив перечисленные выше уравнения интегралом Бернулли для реальной жидкости и уравнением неразрывности, можно сформулировать задачу об истечении несжимаемой жидкости из канала через длинный боковой патрубок, в котором зона отрыва потока изолирована от внешней среды и существенны гидравлические потери $\zeta_п$.

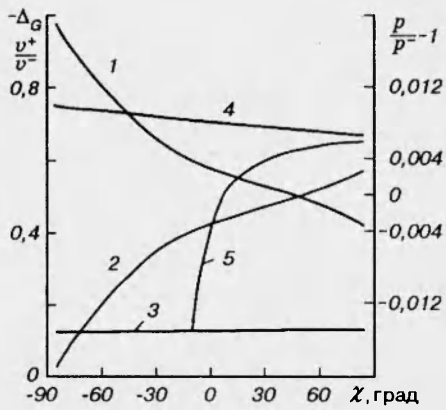

Рис. 4

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2–4. Рост отношения скоростей $\mu_k = v_{mk}/v^-$ увеличивает «чувствительность» потока к углу отвода массы через короткий патрубок (зависимость $\varepsilon_m(\chi)$ на рис. 2, где $\overline{S}_m = 0{,}1$, $\mu_k = 1{,}2$; $1{,}4$; $1{,}8$; 3 для кривых *1–4* соответственно, для сравнения приведено ε_m по гипотезе [3] — кривая *5*). Подобным же образом влияет μ_k и при истечении несжимаемой жидкости через боковое ответвление из полубесконечного пространства [11]. Большая «чувствительность» к углу отвода проявляется и с ростом размера отверстия $\overline{S}_m$ (зависимость $\Delta_G(\chi)$ на рис. 3, где $\mu_k = 2$, $\overline{S}_m = 0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}5$ для кривых *1–3* соответственно, сплошные кривые отвечают истечению через короткий патрубок, а штриховые — через длинный с $\zeta_п = 5$). При этом увеличение гидравлических потерь в боковом патрубке (с ростом его длины) сопровождается уменьшением расхода и «чувствительности» к углу отвода массы из канала. Для рассмотренных случаев «чувствительность» практически нивелируется при $\zeta_п = 5$ (что для квадратичного закона сопротивления соответствует длине патрубка в калибрах $\sim 10^2$). Эти результаты согласуются с экспериментом [2], где при истечении через длинный патрубок при условиях $\overline{S}_m = 0{,}0036 \div 0{,}142$ и $-50° \le \chi_k \le 40°$ изменение расхода $\Delta_G(\chi)$ не выходило за пределы «погрешности, допустимой для практических целей». На рис. 4 приведена детальная характеристика одного из характерных вариантов ($\overline{S}_m = 0{,}5$, $\mu_k = 2$, $p_{mk}/p^- = 0{,}985$, патрубок короткий: *1* — Δ_G, *2* — v^+/v^-, *3* — $p_{mk}/p^- - 1$, *4* — $p_\sigma/p^- - 1$, *5* — $p_{\sigma k}/p^- - 1$). При этом расход падает при отклонении оси патрубка навстречу потоку, давление $p_\sigma = p^+$ уменьшается, а $p_{\sigma k} \to p_\sigma$ при $\chi_k \to \pi/2$. В отдельных случаях уравнение (7.1) допускает решение в явном виде, например: при $\chi_k = 0$ сводится к квадратному уравнению (как и в [5] для сжимаемой жидкости); если дополнительно принять $S_m \to 0$ (истечение из безграничного полупространства), то $\varepsilon_m = (\mu^2 - 1)/2\mu^2$, откуда при $\mu = 1$ $\varepsilon_m = 0$ — результат, совпадающий с [10], а при $\mu \to \infty$ (истечение через насадок из полубезграничного объема с неподвижной жидкостью), как и следовало ожидать, $\varepsilon_m \to 1/2$ [14].

Выполненное в данной работе обобщение гипотезы [5] на большее число геометрических воздействий позволяет заключить, что запас механической энергии потока, характеризуемый коэффициентом восстановления давления σ_p, не изменяется при любых геометрических воздействиях, рассматриваемых как независимые аргументы для функции σ_p. Так, в дополнение к приведенным здесь можно ставить и решать задачи по определению параметров состояния газа в каналах с изломами оси и для других возможных комбинаций геометрических воздействий. Несколько специфичны задачи подвода массы, где $p_\sigma = p_{\delta k} = p_{mk}$. Тогда из (1.4) следует $\Delta_{\tau k} = -(\alpha n_\tau)_{mk} = \alpha_{mk} \sin(\lambda + \chi_k)$, т. е. все количество движения, нормальное к оси потока, воспринимается силами трения [5]. Величина $\Delta_{\tau k}$ входит в список аргументов (2.3) функции σ_p (3.1). Соответственно углы подвода массы в силу однозначной связи с $\Delta_{\tau k}$ из перечня геометрических воздействий исключаются.

В целом соотношения (2.1), (6.2), (6.3) или их аналоги для несжимаемой жидкости могут рассматриваться как условия в узле одномерных течений жидкости, удовлетворяющие всем законам сохранения гидродинамики, включая второе начало термодинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю.** Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1979.
2. **Петров Г. А.** Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути. М.; Л.: Стройиздат, 1951.
3. **Павлов С. В., Яушев И. К.** Задача о распаде произвольного разрыва параметров газа в разветвленных каналах // Численный анализ: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1978. С. 75–82.
4. **Степанов И. Р., Чудинсв В. И.** Некоторые задачи движения газа и жидкости в каналах и трубопроводах энергоустановок. Л.: Наука, 1977.
5. **Дубравин Ю. А.** О связи гидродинамических параметров в зонах локальных воздействий на поток // ПМТФ. 1989. № 3. С. 60–69.
6. **Промежуточная** баллистика артиллерийских орудий / Л. С. Плевако, Л. В. Марченко, А. А. Королев и др. М.: ЦНИИ информации, 1982.

7. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
8. **Валландер С. В.** Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
9. **Корн Г. К., Корн Т. К.** Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
10. **Богомолов Е. Н.** О боковом истечении жидкости из потока через отверстие конечной глубины // Прикл. механика. 1968. Т. 4, вып. 10. С. 105–112.
11. **Богомолов Е. Н.** Безвихревое истечение жидкости из потока через боковое отверстие конечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 162–164.
12. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960.
13. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980.
14. **Гинзбург И. П.** Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1958.

Поступила в редакцию 9/X 1992 г.,
в окончательном варианте — 2/VIII 1994 г.