

УДК 519.63

DOI: 10.15372/PMTF202315382

## ИЗУЧЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛЬДА НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НИЗКОСКОРОСТНОГО УДАРА ШАРОВЫМ ИНДЕНТОРОМ

Е. К. Гусева<sup>\*,\*\*</sup>, В. И. Голубев<sup>\*</sup>, В. П. Епифанов<sup>\*\*</sup>, И. Б. Петров<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

<sup>\*\*</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mails: guseva.ek@phystech.edu, golubev.vi@mipt.ru, evp@ipmnet.ru, petrov@mipt.ru

Разработана методика выбора подходящей модели льда и ее параметров методами численного моделирования. Исследуется процесс низкоскоростного столкновения шарового индентора с ледяной пластиной, проводится сравнение результатов численных расчетов с результатами лабораторного эксперимента. Рассмотрены известные реологические модели упругопластичности с критериями текучести Мизеса и Мизеса — Шлейхера, а также модель упругости с упругопластическим включением постоянного размера. В качестве определяющей системы уравнений используется система уравнений изотропной линейной теории упругости, которая решается сеточно-характеристическим методом. Исследуется влияние параметров моделей на рассчитанные мгновенные значения скорости и координаты шара. Формулируются критерии выбора характеристик моделей, строятся аппроксимации зависимостей этих критериев от различных параметров.

**Ключевые слова:** реологические модели льда, упругопластичность, численное моделирование, сеточно-характеристический метод

**Введение.** Численное исследование реакции льда на действие сил, превышающих предел упругости, необходимо при решении прикладных задач для Арктической области [1]. Однако проблема корректного описания поведения льда до сих пор остается не решенной. Природный лед формируется в различных условиях, определяющих его структуру, в зависимости от которой изменяются его прочностные и реологические характеристики [2, 3]. Кроме того, лед существует преимущественно при температуре, близкой к его температуре плавления, вследствие чего актуальная температура оказывает значительное влияние на его механическое поведение [4, 5]. Поэтому параметры реологической модели льда должны уточняться непосредственно для исследуемой структуры льда.

Значительная часть природных процессов, происходящих в присутствии льда, протекают при достаточно малых характерных скоростях (менее 5 м/с), однако поведение льда при данных условиях изучено недостаточно. Линейно-упругая модель [6] часто используется при моделировании разнообразных волновых процессов [7], в том числе при решении прямых задач сейсморазведки в шельфовой зоне [8]. Тем не менее применительно ко льду эта модель оказывается недостаточной для полного описания даже квазистатического нагружения. Например, в работе [9] при переходе от вдавливания индентора к удару при

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-21-00384).

© Гусева Е. К., Голубев В. И., Епифанов В. П., Петров И. Б., 2024

различных скоростях выявлено изменение поведения льда от вязкого разрушения [10] к хрупкому разрушению [11].

Большой объем экспериментальных данных был получен при больших скоростях ударников в работах [12–14], в которых в основном описываются вмятины, глубокие трещины и картины разрушений. Однако при квазистатическом вдавливании индентора в лед [15, 16] получаются более важные результаты. В указанных условиях наблюдаются процессы рекристаллизации и образования микротрещин [17], выделяются области, в которых формируется аморфная структура льда. Для описания данных явлений во многих работах (см., например, [18, 19]) используются модели пластичности. Тем не менее в случае малых скоростей удара ситуация осложняется тем, что состояние льда оказывается близким к точке перехода от пластичного разрушения к хрупкому. В ряде работ предложены модели, учитывающие этот переход [20–22]. Однако в данном случае возникает вопрос об области применимости полученных результатов.

В настоящей работе подробно изучаются модели упругопластичности (УП) с известным критерием текучести Мизеса [23] и его модификацией, а также с критерием Мизеса — Шлейхера [24]. Дополнительно рассматривается составная модель упругости с упругопластическим включением (УПВ) постоянного размера, по которому наносится удар. Данная модель учитывает отмеченное в работах [15, 16] разделение льда на зоны. Целью работы является выявление закономерностей изменения характеристик моделей и изучение их влияния на результаты вычислений. Для проведения систематических исследований разрабатывается методика выбора оптимальных параметров моделей путем сравнения с экспериментальными данными, полученными в случае медленного удара шаровым индентором по гранулированному поликристаллическому ледяному образцу. Эксперимент проводился в Институте проблем механики РАН.

В настоящее время не существует общепринятого подхода к моделированию поведения льда [25], поэтому при решении данной задачи адаптируются и применяются различные методы. В связи с этим в настоящей работе определяющая система уравнений решается сеточно-характеристическим методом на структурированных сетках [26, 27]. Данный метод позволяет точно воспроизводить волновые процессы в достаточно сложных задачах [28], а также может применяться для изучения ударных взаимодействий различного типа [29]. Таким образом, появляется возможность детального изучения волновых явлений, вызванных ударом. Расчеты выполнялись с помощью программного комплекса, разработанного в Московском физико-техническом институте.

**1. Постановка задачи.** Для проведения исследований поведения льда при низкоскоростном ударе был выполнен лабораторный эксперимент в соответствии с методикой, предложенной в работе [30] (рис. 1). Лабораторная установка помещалась в термостат с поддерживаемой температурой  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Образец гранулированного поликристаллического льда размещался на металлическом диске и мог скользить по его поверхности. На нижней поверхности ледяного диска в точке на оси удара размещался пьезоэлектрический акселерометр. Металлический сферический индентор диаметром 0,076 м и массой 1,76 кг из закаленной стали марки ШХ-15 с жестко закрепленным внутри вторым датчиком подвешивался на нерастяжимой нити к кронштейну. Сброс шара на лед осуществлялся с помощью электромагнитного спускового устройства. Начальная скорость удара равна 0,56 м/с, удар был прямой. Сигналы с пьезоакселерометров записывались цифровым осциллографом, их обработка выполнялась на компьютере. В результате были построены осциллограммы удара, представленные на рис. 2.

Для экономии вычислительных ресурсов моделирование проводилось для двумерного случая, что позволило выполнить большое количество расчетов. На основе лабораторного эксперимента была создана модель расчетной области, представленная на рис. 3. В обла-

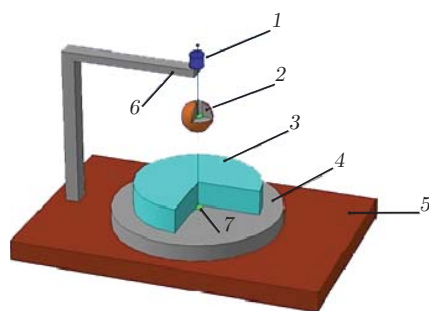


Рис. 1

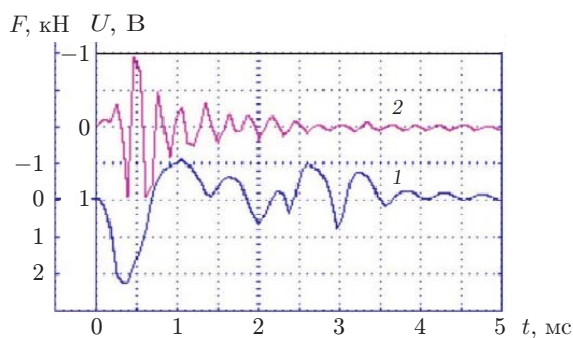


Рис. 2

Рис. 1. Схема лабораторной установки:

1 — спусковое устройство, 2 — сферический индентор с пьезоакселерометром, 3 — образец льда, 4 — металлический диск, 5 — подложка, 6 — кронштейн, 7 — второй датчик

Рис. 2. Осциллограммы удара:

1 — данные, полученные с акселерометра в шаре (зависимость осевой силы от времени), 2 — данные, полученные с акселерометра на нижней поверхности льда (зависимость напряжения от времени)

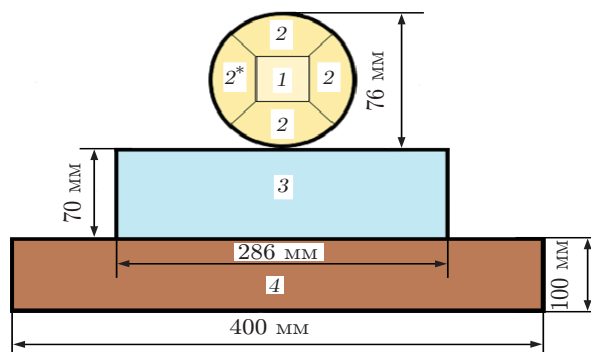


Рис. 3. Расчетная область:

1, 2 — стальной шар, 3 — образец льда, 4 — металлический диск

сти 1 число ячеек вдоль горизонтальной и вертикальной осей составляло  $N_x = 60$ ,  $N_y = 60$ , в области 2 —  $N_x = 30$ ,  $N_y = 60$ , в области 3 —  $N_x = 286$ ,  $N_y = 70$ , в области 4 —  $N_x = 400$ ,  $N_y = 100$ , шаг по времени равен  $5 \cdot 10^{-8}$  с. Сетки 2 формировались путем вращения сетки 2\*. В ходе расчетов сетки сдвигались с использованием метода Лагранжа. Между областями 1 и 2 ставилось контактное условие полного слипания, между областями 2 и 3, 3 и 4 — условие проскальзывания в области контакта. На боковых и нижней границах подставки использовалось условие поглощения, на поверхности шара, льда, выступающей верхней поверхности подставки ставилось условие свободной границы. В начале расчета в шаре, находящемся над поверхностью льда на высоте 0,05 мм, задавалась скорость, равная начальной скорости удара в эксперименте. Узлы расчетной сетки, соответствующие шару и льду и расположенные на расстоянии менее 0,05 мм, считались контактирующими. Вычисления продолжались до момента прекращения контакта.

**2. Реологические модели.** В качестве основной определяющей системы уравнений использовалась гиперболическая система уравнений изотропной линейной теории упругости [6] с неизвестными тензором напряжений  $\sigma$  и скоростью точек среды  $\mathbf{v}$ . Данная модель

применяется для описания поведения гранулированного поликристаллического льда [31]:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}; \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил;  $\rho$  — плотность среды;  $\lambda, \mu$  — упругие параметры Ламе. В данной модели скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Для шара и подставки задавались следующие значения параметров  $c_p, c_s, \rho$ , полностью описывающих поведение упругого материала:  $c_p = 5700$  м/с,  $c_s = 3100$  м/с,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Эти параметры для льда вычислялись по формуле Берденникова ( $E = 8760 - 21T - 0,17T^2$ ,  $T = -10$  °С [32], коэффициент Пуассона  $\nu = 0,295$ ,  $\rho = 917$  кг/м<sup>3</sup>). В результате получены значения  $c_p = 3600$  м/с,  $c_s = 1942$  м/с.

Для решения системы (1), (2) использовался сеточно-характеристический метод [26, 27], в соответствии с которым сначала проводится расщепление по физическим процессам, а затем выполняются замена переменных и переход к инвариантам Римана. В итоге начальная система преобразуется в систему независимых уравнений переноса. Для решения каждого уравнения применялась схема Русанова третьего порядка, из которой с помощью сеточно-характеристического критерия монотонности была получена монотонная схема [33, 34].

Для учета пластического поведения (УП) использовалась модификация модели Прандтля — Рейса [23], в которой после каждого шага расчета проводилась коррекция девиатора тензора напряжения  $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{ll}/\delta_{mm})\delta_{ij}$  при выполнении критерия текучести

$$s_{ij} = s_{ij}^0 \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{s_{el}s_{el}}}.$$

В качестве критериев текучести использовались критерий Мизеса  $(1/2)s_{ij}s_{ij} - k^2 > 0$  ( $k$  — предел текучести) [23] и критерий Мизеса — Шлейхера  $k = k_0 + ap$  [24], в котором предел текучести зависит от давления  $p = -\sigma_{ll}/\delta_{mm}$ .

В модели упругости с УПВ используется предположение, что лед деформируется пластически в небольшой области в зоне удара. Считается, что эта область имеет форму полукруга заданного радиуса  $r$  с центром на оси удара (рис. 4). В ячейках, находящихся внутри полукруга, используется описанная выше модель УП, в остальных ячейках — модель упругости. В расчетах варьировались предел текучести  $k$ , параметры в критерии Мизеса — Шлейхера  $k_0, a$ , радиус УПВ  $r$ .

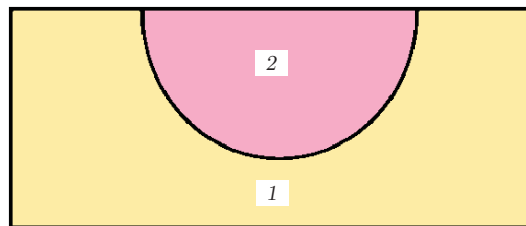


Рис. 4. Модель упругости льда (1) с УПВ в форме полукруга заданного радиуса (2)

**3. Результаты моделирования.** В результате численного моделирования получены волновые картины, приведенные на рис. 5. В случае модели упругости с УПВ (см. рис. 5, *a*) появляются структуры, подобные зубцам, возникающим при формировании кольцевых трещин [35]. Кроме того, в момент времени  $t = 0,375$  мс после начала расчета в этих зонах появляется характерная вмятина, которая полностью формируется к моменту  $t = 0,75$  мс. Таким образом, удастся качественно воспроизвести наблюдаемые в эксперименте явления. Отсутствие подобных картин на рис. 5, *б*–*з* является основным недостатком модели УП с условием Мизеса — Шлейхера.

Проведение сравнения результатов численных расчетов с экспериментальными данными (кривая 1 на рис. 2) затруднено, поэтому скорость шара была рассчитана по силе  $F$  и массе шара  $m$  с использованием формулы

$$v(t) = 0,56 + \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

При этом скорость не достигает нуля, а имеет минимальное значение, равное 0,098 74 м/с. Это может быть обусловлено тем, что поверхность льда неравномерна, вследствие чего горизонтальные компоненты скорости оказываются ненулевыми. В результате преобразования

$$v(t) = 0,56 \left( 1 - \frac{v - 0,56}{\min(v - 0,56)} \right)$$

скорость сводится к нулю. Дополнительно для расчета глубины осадки шара (координаты его нижней точки в момент времени, когда модуль скорости минимален) рассчитанный модуль скорости умножался на функцию  $\text{sign}(v(\tau))$ . Полученная преобразованная вертикальная проекция скорости интегрировалась по формуле Симпсона для получения координаты:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) \text{sign}(v(\tau)) d\tau.$$

На рис. 6–8 представлены расчетные зависимости компоненты тензора напряжений  $\sigma_{yy}$ , координаты  $x$  и скорости  $v_y$  от времени в нижней точке шара. Кривые скорости, полученные в расчете и эксперименте, качественно различаются. В качестве одного из критериев для подбора параметров был выбран момент времени  $t_0$ , когда ускорение шара меняет знак и модуль скорости шара достигает минимума. В эксперименте  $t_0 \approx 0,7$  мс. В качестве второго критерия была выбрана максимальная глубина осадки  $x_{\max}$ . Расчетные параметры подбирались таким образом, чтобы в момент времени  $t_0$  получить  $x_{\max} = 0,2253$  мм.

В результате расчетов по модели упругости получены наибольшее значение амплитуды  $\sigma_{yy}$ , наименьшее значение амплитуды координаты  $x_{\max}$ , а также наименьшее время  $t_0$  (см. рис. 6). При использовании модели УП с критерием текучести Мизеса значительно уменьшается значение  $\sigma_{yy}$  и увеличиваются значения  $x_{\max}$  и  $t_0$ . При увеличении предела текучести результаты расчетов близки к результатам, полученным с помощью модели упругости, т. е. критерий текучести не выполняется. В результате путем варьирования данного параметра можно приблизить расчетные данные к экспериментальным. При  $k = 0,75$  МПа,  $t_0 = 0,7065$  мс максимальная глубина осадки  $x_{\max} = 0,2281$  мм близка к экспериментальной, однако в расчете не удастся достичь совпадения по параметру  $t_0$ . На волновых картинах, полученных с использованием данной модели, наблюдаются структуры, подобные приведенным на рис. 5 для момента времени  $t = 0,125$  мс. Согласно результатам расчета образуется вмятина, размеры которой меньше, чем в эксперименте. Таким

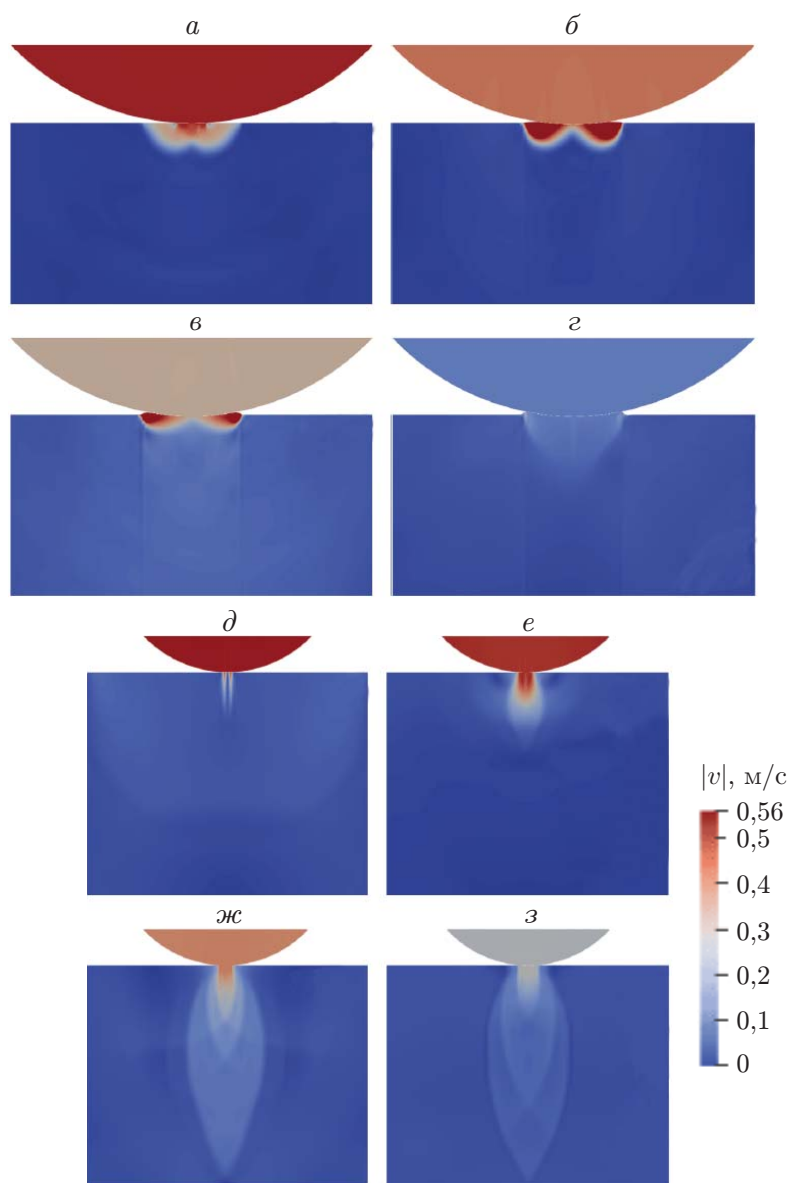


Рис. 5. Волновые картины деформирования ледяного диска при ударе в различные моменты времени:

$a$ – $г$  — модель упругости с УПВ радиусом 7,5 мм при  $k = 0,3$  МПа ( $a$  —  $t = 0,125$  мс,  $б$  —  $t = 0,375$  мс,  $в$  —  $t = 0,500$  мс,  $г$  —  $t = 0,750$  мс);  $д$ – $з$  — модель УП с условием Мизеса — Шлейхера в центральной области льда при  $k_0 = 0,3$  МПа,  $a = 0,5$  ( $д$  —  $t = 0,05$  мс,  $е$  —  $t = 0,10$  мс,  $ж$  —  $t = 0,25$  мс,  $з$  —  $t = 0,40$  мс)

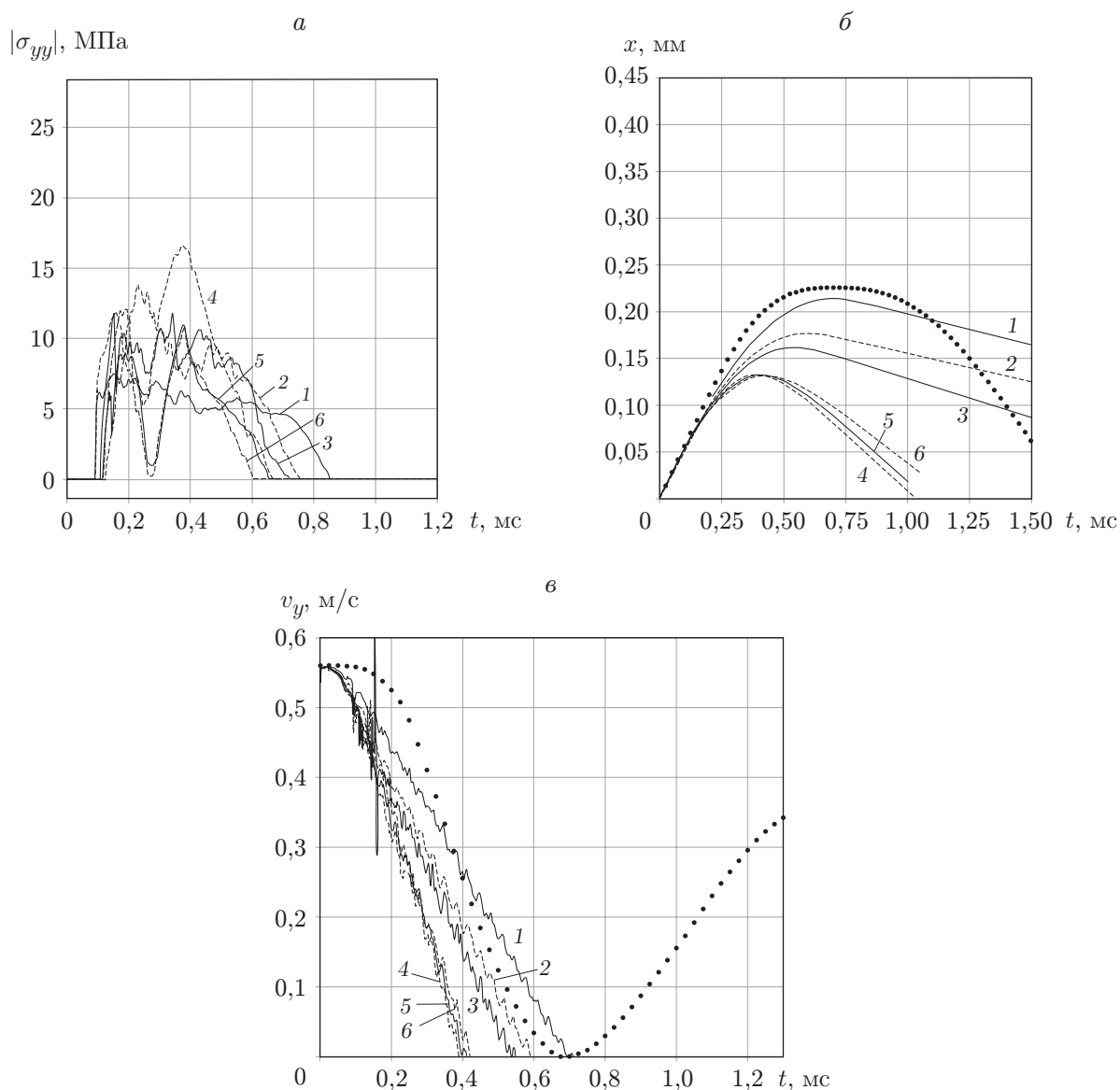


Рис. 6. Зависимости модуля вертикальной проекции тензора напряжений  $\sigma_{yy}$  (*a*), координаты  $x$  (*б*) и скорости  $v_y$  (*в*) от времени в нижней точке шара, полученные с использованием модели УП с критерием Мизеса — Шлейхера:

1 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 0,5$ , 2 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 0,75$ , 3 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 0,9$ , 4 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 1$ , 5 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 1,5$ , 6 —  $k_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $a = 2$ ; точки — экспериментальные данные

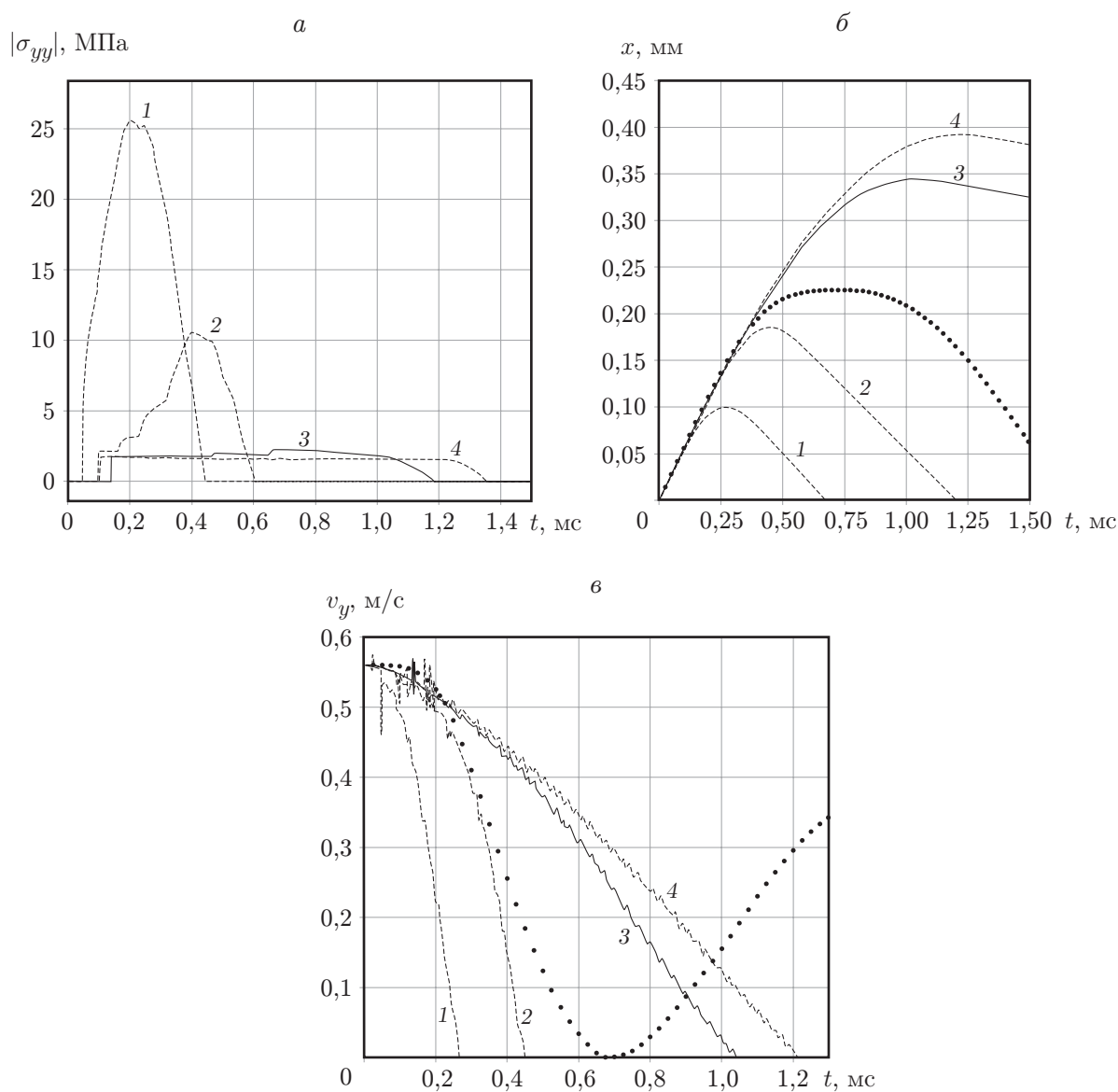


Рис. 7. Зависимости модуля вертикальной проекции тензора напряжений (*a*), координаты  $x$  (*б*) и скорости (*в*) от времени в нижней точке шара, полученные с использованием модели упругости с УПВ с критерием Мизеса:  
 1 —  $k = 0,3$  МПа,  $r = 2$  мм, 2 —  $k = 0,3$  МПа,  $r = 6$  мм, 3 —  $k = 0,3$  МПа,  $r = 10$  мм, 4 —  $k = 0,3$  МПа,  $r = 14$  мм; точки — экспериментальные данные



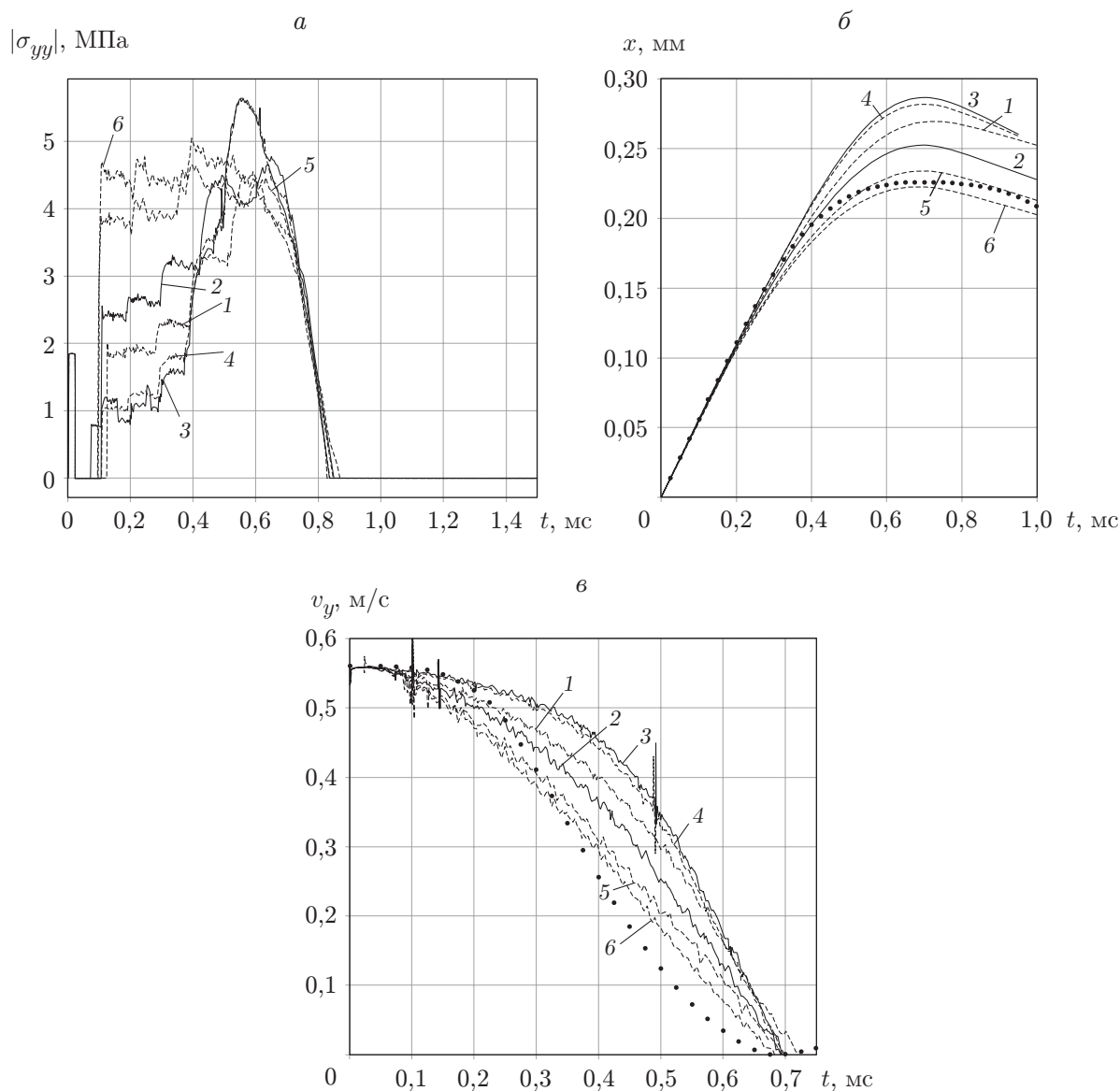


Рис. 8. Зависимости модуля вертикальной проекции тензора напряжений (а), координаты  $x$  (б) и скорости (в) от времени в нижней точке шара, полученные с использованием модели упругости с УПВ с критериями Мизеса и Мизеса — Шлейхера:

1 —  $r = 8$  мм,  $k = 0,3$  МПа, 2 —  $r = 8$  мм,  $k_0 = 0,3$  МПа,  $a = 0,1$ , 3 —  $r = 8$  мм,  $k_0 = 0,05$  МПа,  $a = 0,1$ , 4 —  $r = 8$  мм,  $k_0 = 0,08$  МПа,  $a = 0,1$ , 5 —  $r = 9$  мм,  $k_0 = 0,3$  МПа,  $a = 0,25$ , 6 —  $r = 10$  мм,  $k_0 = 0,3$  МПа,  $a = 0,3$ ; точки — экспериментальные данные

Таблица 1

Значения параметров, полученных с использованием моделей УП и упругости с УПВ

Модель	$k$ , МПа	$k_0$ , МПа	$a$	$r$ , мм	$x_{\max}$ , мм	$t_0$ , мс
УП	0,75	—	—	—	0,2281	0,7065
УП	—	0,30	0,50	—	0,2139	0,6935
УПВ	0,60	—	—	8	0,2302	0,6805
УПВ	0,65	—	—	9	0,2340	0,7045
УПВ	0,70	—	—	9	0,2259	0,6785
УПВ	0,70	—	—	10	0,2308	0,7035
УПВ	0,75	—	—	11	0,2251	0,6925
УПВ	0,75	—	—	12	0,2262	0,7030
УПВ	—	0,08	0,10	8	0,2818	0,6985
УПВ	—	0,30	0,10	8	0,2523	0,6950
УПВ	—	0,50	0,01	8	0,2425	0,7050
УПВ	—	0,30	0,25	9	0,2523	0,6950
УПВ	—	0,50	0,10	9	0,2329	0,6905
УПВ	—	0,30	0,30	10	0,2226	0,6830
УПВ	—	0,50	0,15	10	0,2235	0,6855

образом, для улучшения согласия с экспериментальными данными модель необходимо модифицировать с помощью другого критерия текучести.

При использовании критерия Мизеса — Шлейхера наблюдаются такие же размеры вмятины при увеличении параметров  $k_0$  и  $a$ , как и при использовании критерия Мизеса. Однако в данном случае при постоянном значении  $k_0$  увеличение параметра  $a$  приводит к появлению дополнительных осцилляций на кривых зависимости  $|\sigma_{yy}|$  от времени. Подобные эффекты наблюдаются на деформационных кривых, полученных в экспериментах [36]. Таким образом проявляются упругопластические свойства льда. При этом значительное увеличение данных параметров не всегда приводит к сближению кривых, построенных по модели УП с критерием Мизеса — Шлейхера, и кривых, построенных с использованием модели упругости. Так, при фиксированном значении  $k_0 = 0,3$  МПа и увеличении  $a$  вплоть до  $a = 1$  уменьшаются значение координаты шара и  $t_0$  и увеличивается амплитуда  $\sigma_{yy}$ . При  $a = 1$  на кривой напряжений появляется второй максимум.

Следует отметить, что параметр  $a$  можно подобрать таким образом, чтобы максимальное значение напряжения при различных значениях  $k_0$  было одним и тем же, например, при  $k = 3$  МПа и  $k_0 = 0,8$  МПа,  $a = 0,5$ , или  $k_0 = 0,8$  МПа,  $a = 0,1$ , или  $k_0 = 0,3$  МПа,  $a = 0,5$ . Однако в расчетах по моделям УП момент времени, в который модуль скорости достигает минимума, и глубина осадки различаются. Модель УП с критерием Мизеса — Шлейхера также имеет ограничение, связанное с тем, что в случае использования критерия Мизеса при  $k = 0,75$  МПа расчетные кривые наиболее близки к экспериментальным. Если положить  $k_0 = 0,75$  МПа, то дальнейшее увеличение  $a$  будет приводить к ухудшению результатов. Таким образом, подходящие параметры необходимо подбирать в диапазоне  $k_0 \leq 0,75$  МПа. При  $k_0 = 0,3$  МПа удалось найти параметр  $a$ , при котором значение  $t_0$  близко к экспериментальному. Однако совпадения координаты нижней точки шара с экспериментальным значением не наблюдается (табл. 1).

При использовании модели упругости с УПВ с критерием Мизеса при фиксированном пределе текучести  $k = 0,3$  МПа и увеличении радиуса включения  $r$  результаты расчетов более существенно отличаются от результатов расчетов по модели упругости (см. рис. 7). В данном случае значение  $t_0$ , близкое к экспериментальному, должно получаться при значении радиуса  $7,5 \div 8,0$  мм. Однако в этом случае отсутствует совпадение по координате  $x$ .

Приблизительно при таких же значениях радиуса меняется поведение кривых  $\sigma_{yy}$  в случае варьирования предела текучести. При меньших радиусах с увеличением  $k$  на начальном этапе соударения значения  $\sigma_{yy}$ ,  $x$ ,  $v_y$  не меняются, но затем увеличиваются существенно. При этом момент времени, в который начинается увеличение амплитуды, с увеличением  $k$  уменьшается.

Не удастся получить параметры, при которых достигается совпадение результатов расчетов и экспериментов по обоим критериям. При  $r = 11 \div 12$  мм были подобраны параметры, при которых полученные значения  $t_0$  и  $x$  близки к экспериментальным (см. табл. 1). Однако при радиусах  $r < 8$  мм не получается подобрать подходящий предел текучести. Для этого необходимо уменьшать  $k$ , однако даже при  $k$  порядка  $10^4$  Па характер кривых изменяется незначительно. Таким образом, достигается предел, при котором критерий текучести выполняется во всех ячейках упругопластической зоны включения начиная с момента времени, близкого к моменту столкновения.

Из проведенного анализа следует, что очень сложно подобрать параметры рассмотренных выше моделей таким образом, чтобы результаты расчетов совпадали с экспериментальными данными и по времени  $t_0$  и по координате  $x$ . В связи с этим возникла идея объединить модели УП и упругости с УПВ и рассмотреть модель упругости с УПВ с критерием Мизеса — Шлейхера (см. рис. 8). В данном случае волновые картины качественно подобны волновым картинам в случае, когда применяется критерий Мизеса и имеется характерная вмятина.

В результате расчетов, полученных с использованием данной модели, наблюдаются увеличение  $\sigma_{yy}$ , уменьшение  $x$  и  $t_0$  при увеличении  $k_0$  и  $a$ , возникновение осцилляций при увеличении  $a$ . При проведении расчетов имеется больше возможностей подобрать параметры для совпадения по времени  $t_0$ . Это удастся осуществить при  $r = 8$  мм, однако в данном случае значения  $x_{\max}$  не согласуются с экспериментальными данными. При  $r = 9$  мм расчетные значения координаты и скорости лучше согласуются с экспериментальными данными в окрестности точки  $x \approx x_{\max}$ , однако их полного совпадения достичь не удастся. При  $r = 10$  мм расчетные и экспериментальные значения  $t_0$  согласуются хуже (см. табл. 1).

Следует отметить, что обнаруженный предел текучести, при котором в случае использования модели упругости с УПВ с критерием Мизеса невозможно определить подходящие значения  $k$ , не меняется. Так же как и в модели УП, в модели с критерием Мизеса подобранные значения  $k$  определяют верхнюю границу искомых параметров  $k_0$ . Таким образом, несмотря на увеличение области поиска подходящих параметров, появляются дополнительные ограничения.

В результате анализа расчетных данных с использованием исследуемых моделей построены аппроксимирующие кривые для  $x_{\max}$  и  $t_0$  при различных значениях параметров модели УП  $a$ ,  $k_0$ ,  $k$ ,  $r$ . Для модели УП с критерием Мизеса — Шлейхера зависимости  $x_{\max}$ ,  $t_0$  от  $k_0$  являются гиперболическими (обратно пропорциональными), а зависимости  $x_{\max}$ ,  $t_0$  от  $a$  — экспоненциально убывающими. При больших значениях  $k_0$  и малых  $a$ , а также при больших значениях  $a$  и малых  $k_0$  зависимости стремятся к постоянным значениям, превышающим значения  $t_0$  и  $x_{\max}$ , полученные по модели упругости. В случае когда значения обоих параметров  $k_0$  и  $a$  большие, предельные значения  $t_0$  и  $x_{\max}$  уменьшаются до значений, полученных по модели упругости.

В случае использования критерия Мизеса для моделей УП и упругости с УПВ зависимости  $t_0$  и  $x_{\max}$  от  $k$  также убывают, но более плавно, чем в случае использования модели УП с критерием Мизеса — Шлейхера. Появляется возможность линейной аппроксимации зависимостей при малых значениях  $r$ . Для модели упругости с УПВ зависимости  $t_0$  и  $x_{\max}$  от  $r$  аппроксимируются обратной тригонометрической функцией  $\arctg r$ .

Таблица 2

Параметры моделей УП и упругости с УПВ, полученные с использованием известных величин

Модель	Заданный параметр	Параметр, полученный с использованием экспериментального значения	
		$x_{\max}$	$t_0$
УП	$k_0 = 0,50 \text{ МПа}$	$a = 0,1746$	$a = 0,1702$
УП	$a = 0,01$	$k_0 = 0,7440 \text{ МПа}$	$k_0 = 0,7400 \text{ МПа}$
	$a = 0,10$	$k_0 = 0,6260 \text{ МПа}$	$k_0 = 0,6140 \text{ МПа}$
	$a = 0,20$	$k_0 = 0,4800 \text{ МПа}$	$k_0 = 0,4750 \text{ МПа}$
УПВ	$k = 0,08 \text{ МПа}$	$r = 6,7080 \text{ мм}$	$r = 8,0340 \text{ мм}$
	$k = 0,30 \text{ МПа}$	$r = 6,9040 \text{ мм}$	$r = 7,7880 \text{ мм}$
	$k = 0,50 \text{ МПа}$	$r = 7,2780 \text{ мм}$	$r = 7,8530 \text{ мм}$
	$k = 0,70 \text{ МПа}$	$r = 9,1570 \text{ мм}$	$r = 10,0250 \text{ мм}$
	$k = 0,80 \text{ МПа}$	$r = 23,2410 \text{ мм}$	$r = 24,8950 \text{ мм}$

В случае применения модели упругости с УПВ с критерием Мизеса — Шлейхера функции  $t_0(a)$  и  $x_{\max}(a)$  в окрестности экспериментальных значений оказываются практически линейными. Прямые имеют приблизительно одинаковые углы наклона, при уменьшении  $r$  и увеличении  $k_0$  кривые сдвигаются влево по оси  $a$ . На основе совпадения построенных аппроксимаций с экспериментальными значениями  $x_{\max}$  и  $t_0$  были определены оптимальные параметры моделей (табл. 2).

**Закключение.** В работе методами численного моделирования изучено поведение льда при низкоскоростном ударе шаровым индентором. Подробно исследованы модели упругости и упругопластичности с критериями Мизеса и Мизеса — Шлейхера, а также модель упругости с упругопластическим включением постоянного размера. Характеристики моделей подбирались с использованием значений скорости и глубины осадки шара в момент столкновения. Из рассмотренного набора параметров были выбраны значения, при которых расчетные кривые наиболее близки к экспериментальным. Построены графики зависимостей критериев отбора от параметров, для которых удалось подобрать аппроксимирующие функции. На основе данных функций предсказаны искомые характеристики моделей. Таким образом, предложена методика определения подходящей модели льда и ее параметров. В качестве направления дальнейших исследований можно указать применение предложенной методики при изучении других реологических моделей, а также обобщение ее на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Petrov I. B.** Mathematical modeling of natural and anthropogenic processes in the Arctic zone // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 4. P. 552–560.

2. **Staroszczyk R.** Formation and types of natural ice masses // Ice mechanics for geophysical and civil engineering applications. GeoPlanet: Earth and planetary sciences. Cham: Springer, 2018. P. 7–19.

3. **Iliescu D., Baker I.** The structure and mechanical properties of river and lake ice // Cold Regions Sci. Technol. 2007. V. 48, N 3. P. 202–217.

4. **Wei X., Xiao Sh., Ni J.** Studies of ice melting using molecular dynamics // Molec. Simulat. 2010. V. 36, N 11. P. 823–830.

5. **Neumeier J. J.** Elastic constants, bulk modulus, and compressibility of H<sub>2</sub>O ice Ih for the temperature range 50–273 K // J. Phys. Chem. Reference Data. 2018. V. 47, N 3. 033101.

6. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
7. **Stognii P. V., Khokhlov N. I.** Investigation of models with fluid- and gas-filled fractures with the help of the grid-characteristic method // *Smart modelling for engineering systems*. Singapore: Springer, 2021. P. 125–136. (Smart innovation, systems and technologies; V. 214).
8. **Stognii P. V., Petrov D., Khokhlov N. I., Favorskaya A. V.** Numerical modeling of influence of ice formations under seismic impacts based on grid-characteristic method // *Procedia Comput. Sci.* 2017. V. 112. P. 1497–1505.
9. **Sodhi D. S., Takeuchi T., Nakazawa N., et al.** Medium-scale indentation tests on sea ice at various speeds // *Cold Regions Sci. Technol.* 1998. V. 28, N 3. P. 161–182.
10. **Weertman J.** Creep deformation of ice // *Annual Rev. Earth Planetary Sci.* 1983. V. 11, N 1. P. 215–240.
11. **Herrnring H., Ehlers S.** A finite element model for compressive ice loads based on a Mohr — Coulomb material and the node splitting technique // *J. Offshore Mech. Arct. Engng.* 2022. V. 144, N 2. 021601.
12. **Краус Е. И., Мельников А. Ю., Фомин В. М., Шабалин И. И.** Пробитие ледяных преград конечной толщины стальными ударниками // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 3. С. 146–153.
13. **Герасимов С. И., Зубанков А. В., Калмыков А. П. и др.** Экспериментальное исследование движения ударника в соленом льду // *ПМТФ.* 2020. Т. 61, № 4. С. 54–58.
14. **Lange M. A., Ahrens T. J.** Impact experiments in low-temperature ice // *Icarus.* 1987. V. 69, N 3. P. 506–518.
15. **Barrette P., Pond J., Jordaan I.** Ice damage and layer formation in small-scale indentation experiments // *Ice in the environment: Proc. of the 16th Intern. assoc. for hydraulic engineering and research (IAHR) Intern. symp. on ice, Dinedin (New Zealand), Dec. 2–6, 2002.* S. 1.: IAHR, 2002. P. 246–253.
16. **Browne T., Taylor R., Jordaan I., Gürtner A.** Small-scale ice indentation tests with variable structural compliance // *Cold Regions Sci. Technol.* 2013. V. 88. P. 2–9.
17. **Kamb B.** Experimental recrystallization of ice under stress // *Flow and fracture of rocks.* Washington: Amer. Geophys. Union, 1972. P. 211–241. (Geophysical monograph Ser.; V. 16).
18. **Sand B., Fransson L.** Nonlinear finite element simulations of ice sheet forces on conical structures // *Proc. of the Intern. conf. on offshore mechanics and arctic engineering (OMAE), Hamburg (Germany), June 4–9, 2006.* S. 1., 2006. P. 773–782.
19. **Zhang N., Zheng X., Ma Q., Hu Zh.** A numerical study on ice failure process and ice-ship interactions by smoothed particle hydrodynamics // *Intern. J. Naval Archit. Ocean Engng.* 2019. V. 11, N 2. P. 796–808.
20. **Ince S. T., Kumar A., Paik J. K.** A new constitutive equation on ice materials // *Ships Offshore Structures.* 2017. V. 12, N 5. P. 610–623.
21. **Snyder S. A., Schulson E. M., Renshaw C. E.** Effects of prestrain on the ductile-to-brittle transition of ice // *Acta Materialia.* 2016. V. 108, N 10. P. 110–127.
22. **Mokhtari M., Kim E., Amdahl J.** A non-linear viscoelastic material model with progressive damage based on microstructural evolution and phase transition in polycrystalline ice for design against ice impact // *Intern. J. Impact Engng.* 2023. V. 176. 104563.
23. **Качанов Л. М.** Механика пластических сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
24. **Коврижных А. М.** Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса — Шлейхера // *ПМТФ.* 2004. Т. 45, № 6. С. 144–153.
25. **Гриневич Д. В., Бузник В. М., Нужный Г. А.** Обзор применения численных методов для моделирования деформации и разрушения льда // *Тр. ВИАМ.* 2020. № 8. С. 109–122.
26. **Магомедов К. М.** Сеточно-характеристические численные методы. М.: Юрайт, 2022.

27. **Петров И. Б.** Сеточно-характеристические методы. 55 лет разработки и решения сложных динамических задач // Comput. Math. Inform. Technol. 2023. V. 6, N 1. P. 6–21.
28. **Кожемяченко А. А., Петров И. Б., Фаворская А. В.** Расчет с использованием сеточно-характеристического метода напряженного состояния железнодорожного пути с отрывами шпалы от насыпи // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 2. С. 193–200.
29. **Golubev V. I., Khokhlov N. I., Grigorievych D., Favorskaya A. V.** Numerical simulation of destruction processes by the grid-characteristic method // Procedia Comput. Sci. 2018. V. 126. P. 1281–1288.
30. **Епифанов В. П.** Разрушение льда при ударных взаимодействиях // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 599–603.
31. **Sinha N. K.** Elasticity of natural types of polycrystalline ice // Cold Regions Sci. Technol. 1989. V. 17, N 2. P. 127–135.
32. **Берденников В. П.** Изучение модуля упругости льда // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1948. Т. 7, № 61. С. 13–23.
33. **Холодов А. С., Холодов Я. А.** О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 9. С. 1638–1667.
34. **Гусева Е. К., Голубев В. И., Петров И. Б.** Линейные квазимоноотонные и гибридные сеточно-характеристические схемы для численного решения задач линейной акустики // Сиб. журн. вычисл. математики. 2023. Т. 26, № 2. С. 135–147.
35. **Епифанов В. П.** Физические механизмы контактного разрушения льда // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 1. С. 39–43.
36. **Епифанов В. П.** Особенности контактного разрушения льда // Лед и снег. 2020. Т. 60, № 2. С. 274–284.

*Поступила в редакцию 12/IX 2023 г.,  
после доработки — 22/XI 2023 г.  
Принята к публикации 25/XII 2023 г.*

---