Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

АСИМПТОТИКА ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

УДК 532.526 : 532.516

А. Б. Усов

Ростовский государственный университет, 344006 Ростов-на-Дону

В данной работе построена асимптотика решения плоской задачи о движении сжимаемой вязкой жидкости со свободной поверхностью. В [1–5] эта задача решается при дополнительных предположениях о несжимаемости жидкости или стационарности, маловязкости течения, малости касательных нагрузок. Случай произвольной касательной нагрузки на свободной поверхности сжимаемой жидкости и возникающие при этом нестационарные пограничные слои не изучены. Подход, рассматриваемый здесь, позволил построить асимптотику решения на малых временах без дополнительных предположений при произвольных касательных и нормальных напряжениях на свободной поверхности. Пограничный слой строится для растяжения пространственной и временной координат. Обосновывается выбор параметров растяжения, указывается метод решения возникающих уравнений пограничного слоя.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская изотермическая задача о движении сжимаемой вязкой жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость, на свободную поверхность которой действуют заданные силы. Движение жидкости в неподвижной декартовой системе координат xOz с центром в произвольной точке свободной поверхности жидкости (рис. 1) описывается системой уравнений Навье — Стокса, граничными и начальными условиями, которые в безразмерной форме, согласно [2; 6, с. 808; 7, с. 156], записываются в виде (при $\mu = \mathrm{const}$)

$$\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v_z \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \rho F_x + {}$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right), \qquad (1.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \rho F_z + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right),$$

$$p = D\rho, \qquad \Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)} = D \ln p;$$

$$v_x = v_z = 0, \quad \rho = \rho_*, \quad p = D\rho_*, \quad \Pi = D\ln(D\rho_*), \quad t = 0; \qquad (1.2)$$

$$\mathbf{v} \to \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \to 0, \quad \rho \to \rho_*, \quad p \to D\rho_*, \quad x^2 + z^2 \to \infty; \qquad (1.3)$$

$$p = T_n + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(n_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + n_z^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} + n_x n_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right) - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{div}\mathbf{v} \quad \text{при} \quad z = \zeta(x,t),$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left((n_x\tau_z + n_z\tau_x)\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + 2\left(n_x\tau_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + n_z\tau_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right) = T_\varphi \quad \text{при} \quad z = \zeta(x,t); \qquad (1.4)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z; \quad \Delta = \sqrt{1 + (\partial\zeta/\partial x)^2}, \quad n_z = -1/\Delta,$$
$$n_x = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{1}{\Delta}, \quad \tau_z = -n_x, \quad \tau_x = n_z \quad \text{при} \quad z = \zeta(x,t). \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$ — вектор скорости частиц жидкости в системе координат xOz; p — давление; ρ — плотность; $\mathbf{F} = (F_x, F_z)$ — вектор внешних массовых сил, действующих на жидкость; Re — число Рейнольдса; M — число Маха; $D = \text{const} > 0$; П — единая во всем потоке функция давления; ρ_* — заданная функция; $\mathbf{T} = (T_n, T_\varphi)$ — вектор внешних сил, действующих на свободную поверхность жидкости Г; $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_z)$ — векторы нормали и касательной к Г; $\zeta = \zeta(x,t)$ — возвышение свободной поверхности. Причем

$$\mathrm{Re} = \rho^* v^* l^*/\mu, \quad c = \sqrt{D} = \text{const}, \quad v^* = l^*/t^*, \quad \mathrm{M}^2 = (v^*)^2/c^2,$$

где ρ^*, v^*, l^*, t^* — характерные размеры плотности, скорости, длины и времени соответственно; μ — динамическая вязкость жидкости; c — местная скорость звука. Условия (1.2) — начальные краевые условия задачи, (1.3) — условия убывания на бесконечности, (1.4), (1.5) — динамическое и кинематическое условия на свободной поверхности жидкости.

Решение задачи (1.1)–(1.5) зависит от двух параметров: M и Re. Асимптотика решения строится при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \to \infty$). Для числа Маха возможны варианты:

порядок M зависит от порядка Re (при $\mathrm{Re} \to \infty$):

$$\mathrm{M}^2 = 0 \quad ((1/\sqrt{\mathrm{Re}})^k), \quad k \neq 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re} \to \infty; \tag{1.6}$$

M не зависит от Re:

$$\mathrm{M}^2 = B(1/\sqrt{\mathrm{Re}})^0 \equiv B \equiv \text{const}. \tag{1.7}$$

Выбор одного из этих вариантов влияет на выбор параметров растяжения пограничного слоя, что обсуждается ниже. В работе рассматривается вариант (1.7).

2. Построение функций первого и второго итерационных процессов. Решение запишем как [8]

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^1, \quad \Pi = \Pi^0 + \Pi^1, \quad p = p^0 + p^1, \quad \rho = \rho^0 + \rho^1, \quad \zeta = \zeta^0 + \zeta^1, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{V}^0$, p^0, Π^0, ζ^0, ρ^0 — функции первого итерационного процесса, разыскиваемые в виде рядов

$$\mathbf{V}^0 = (v_x^0, v_z^0), \quad v_x^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k a_k(x,z,t), \quad \zeta^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \zeta_k(x,t), \quad v_z^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k b_k(x,z,t),$$
$$p^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k p_k(x,z,t), \quad \rho^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \rho_k(x,z,t), \quad \Pi^0 = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \Pi_k(x,z,t) \tag{2.2}$$

($\varepsilon = 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ — малый параметр).

Задачи для определения функций первого итерационного процесса получаются подстановкой рядов (2.2) в (1.1)–(1.5). В старшем приближении имеем уравнения Эйлера идеальной сжимаемой жидкости.

Функции $\mathbf{V}^1$, p^1, Π^1, ζ^1, ρ^1 — функции второго итерационного процесса, определенные вблизи свободной поверхности жидкости. Для их описания вводится локальная ортогональная система координат $yO_1\varphi$, жесткосвязанная со свободной поверхностью Г (рис. 2).

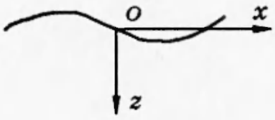

Рис. 1

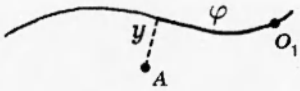

Рис. 2

В качестве начала координат (точки O_1) выбирается произвольная точка Г, y — расстояние по нормали от точки, например, A (рис. 2) до Г, φ — длина дуги вдоль Г. Функции $\mathbf{V}^1$, p^1, Π^1, ζ^1, ρ^1 ищутся в виде рядов

$$p^1=\sum_{k=N_3}^{N}\varepsilon^k\beta_k^0(s,\varphi,\tau),\quad \rho^1=\sum_{k=N_3}^{N}\varepsilon^k\alpha_k(s,\varphi,\tau),$$

$$\Pi^1=\sum_{k=N_3}^{N}\varepsilon^k\beta_k(s,\varphi,\tau),\quad \zeta^1=\sum_{k=N_4}^{N}\varepsilon^k\chi_k(x,\tau), \tag{2.3}$$

$$\mathbf{V}^1=(v_y^1,v_\varphi^1),\quad v_y^1=\sum_{k=N_1}^{N}\varepsilon^k h_k(s,\varphi,\tau),\quad v_\varphi^1=\sum_{k=N_2}^{N}\varepsilon^k g_k(s,\varphi,\tau)$$

(N, N_1, N_2, N_3, N_4 — числа).

Векторы $\mathbf{V}^0$, $\mathbf{V}^1$ представляются также как

$$\mathbf{V}^0=(v_y^0,v_\varphi^0),\quad \mathbf{V}^1=(v_x^1,v_z^1),$$

$$v_y^0=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k a_k^0(x,z,t),\quad v_\varphi^0=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k b_k^0(x,z,t), \tag{2.4}$$

$$v_x^1=\sum_{k=N_2}^{N}\varepsilon^k h_k^0(s,\varphi,\tau),\quad v_z^1=\sum_{k=N_2}^{N}\varepsilon^k g_k^0(s,\varphi,\tau).$$

Функции пограничного слоя α_k, β_k, β_k^0, χ_k, h_k, g_k $(k=0,\,1,\,2,\,\ldots,N)$ зависят от растянутой переменной

$$s=y/\varepsilon^{k_1} \tag{2.5}$$

и от «быстрого» времени

$$\tau=t/\varepsilon^{k_2} \tag{2.6}$$

(k_1, k_2 — числа, $k_1>0$, $k_2\geqslant 0$).

Выбор параметров растяжения (k_1 и k_2) осуществляется на основе анализа уравнений движения, записанных в локальной системе координат. Для построения пограничного слоя надо потребовать, чтобы порядок малости слагаемого $(\partial^2 v_\varphi^1/\partial s^2)$ был не меньше порядка малости слагаемых $(\partial\Pi^1/\partial\varphi)$, $(\mathbf{v}^1,\nabla)\mathbf{v}^1$ и $(\partial v_\varphi^1/\partial t)$ при $\varepsilon\to 0$. В противном случае для определения погранслойных поправок получатся уравнения не выше первого порядка по s, в то время как имеется два граничных условия для функции v_φ^1. Данное противоречие делает неприемлемым этот вариант. Подставляя ряды (2.2)–(2.4) в уравнения движения, видим, что должны выполняться следующие неравенства (при $\varepsilon \to 0$):

$$\varepsilon^{N_2-k_2}\left|\frac{\partial g_{N_2}}{\partial \tau}\right| \leqslant \varepsilon^{2+N_2-2k_1}\left|\frac{\partial^2 g_{N_2}}{\partial s^2}\right|,$$

$$\varepsilon^{N_2-k_1+N_1}\left|h_{N_1}\frac{\partial g_{N_2}}{\partial s}\right| \leqslant \varepsilon^{2+N_2-2k_1}\left|\frac{\partial^2 g_{N_2}}{\partial s^2}\right|,$$

$$\varepsilon^{2+N_2-2k_1}\left|\frac{\partial^2 g_{N_2}}{\partial s^2}\right| \geqslant \varepsilon^{N_3}\left|\frac{\partial \beta_{N_3}}{\partial \varphi}\right|,$$

$$\varepsilon^{2+N_1-2k_1}\left|\frac{\partial^2 h_{N_1}}{\partial s^2}\right| \geqslant \varepsilon^{N_3-k_1}\left|\frac{\partial \beta_{N_3}}{\partial s}\right|, \quad \text{если} \quad k_2 \neq 0,$$

т. е. соответственно

$$2-2k_1 \leqslant -k_2, \quad 2-2k_1 \leqslant N_1-k_1, \tag{2.7}$$

$$2-2k_1 \leqslant N_3, \quad N_1+2-2k_1 \leqslant N_3-k_1, \quad \text{если} \quad k_2 \neq 0.$$

Для сохранения уравнения неразрывности в растянутых переменных необходимо, чтобы члены $(\partial v_\varphi^1/\partial \varphi)$ и $(\partial v_y^1/\partial s)$ $((\partial \Pi^1/\partial t)$ и $(\partial v_\varphi^1/\partial \varphi)$, $(\partial v_y^1/\partial s)$ при $k_2 \neq 0)$ имели одинаковый порядок малости (при $\varepsilon \to 0$). Отсюда находим

$$N_3-k_2 = N_1-k_1, \quad \text{если} \quad k_2 \neq 0; \qquad N_2 = N_1-k_1. \tag{2.8}$$

Ряды (2.2)–(2.4) подставим во второе граничное условие (1.4). Разложив в полученном соотношении функции, зависящие от «медленного» времени t, в ряды Тейлора в точке $t=0$, видим, что для выполнения этого граничного условия в старшем приближении (при $\varepsilon \to 0$) должно выполняться равенство

$$\varepsilon^{N_2-k_1}\frac{\partial g_{N_2}}{\partial s} + \varepsilon^{k_2}\tau\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a_0^0}{\partial y}\right)_{t=y=0} = 0 \quad \text{при} \quad T_\varphi \equiv 0,$$

или

$$\varepsilon^{N_2-k_1+2}\frac{\partial g_{N_2}}{\partial s} = \varepsilon^{k_2}\tau\,\frac{\partial T_\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=y=0} \quad \text{при} \quad T_\varphi \not\equiv 0,$$

т. е.

$$N_2 = k_1+k_2 \qquad \text{при} \quad T_\varphi \equiv 0; \tag{2.9}$$

$$N_2 = -2+k_1+k_2 \qquad \text{при} \quad T_\varphi \not\equiv 0. \tag{2.10}$$

Из кинематического условия (1.5) вытекает

$$N_4-k_2 > \min(N_1, N_2).$$

Используя формулы (2.7)–(2.10), получим следующие возможные варианты растяжения пограничного слоя:

$$k_2 = 0, \quad k_1 = 4/3, \quad N_1 = 2/3, \quad N_3 = 0, \quad N_2 = -2/3, \tag{2.11}$$

а также класс совпадающих между собой параметров растяжения, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} k_1 > 2, \quad k_2 = 2k_1-2, \quad N_2 = -4+3k_1, \\ N_1 = -4+4k_1, \quad N_3 = -6+5k_1; \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$k_2 = 2, \quad k_1 = 2, \quad N_1 = 4, \quad N_3 = 4, \quad N_2 = 2. \tag{2.13}$$

Решения, соответствующие (2.12), удовлетворяют одинаковым уравнениям и после перехода к нерастянутым переменным дают одинаковый результат. Здесь строятся асимптотики (2.12), (2.13) и доказывается их эквивалентность на малых временах.

3. Случай $k_1 > 2$, $k_2 = 2k_1 - 2$. Рассмотрим, например, набор параметров растяжения:

$$k_2 = 4, \quad k_1 = 3, \quad N_1 = 8, \quad N_3 = 9, \quad N_2 = 5.$$

Подставим (2.2)–(2.4) в уравнения движения. Учтем результаты первого итерационного процесса. Разложим все функции, зависящие от $t = \tau\varepsilon^4$ и $y = s\varepsilon^3$, в ряды Тейлора в точке $t = 0$ ($y = 0$). Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения пограничного слоя:

при ε^0
$$\rho_* \frac{\partial g_5}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g_5}{\partial s^2}, \quad \rho_* \frac{\partial h_8}{\partial \tau} = \frac{4}{3}\frac{\partial^2 h_8}{\partial s^2},$$
$$\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial \beta_9}{\partial \tau} + g_5 \frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi}\bigg|_{y=t=0}\right) + \frac{\partial g_5}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_8}{\partial s} = 0, \tag{3.1}$$
$$\beta_9 = D \ln \beta_9^0, \qquad \beta_9^0 = D\alpha_9;$$

....

при ε^n
$$\rho_* \frac{\partial g_{n+4}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g_{n+4}}{\partial s^2} + E_1, \quad \rho_* \frac{\partial h_{n+7}}{\partial \tau} = \frac{4}{3}\frac{\partial^2 h_{n+7}}{\partial s^2} + E_2,$$
$$\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial \beta_{n+8}}{\partial \tau} + g_{n+4} \frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi}\bigg|_{y=t=0}\right) + \frac{\partial g_{n+4}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_{n+7}}{\partial s} = E_3, \tag{3.2}$$
$$\beta_{n+8} = E_4, \qquad \beta_{n+8}^0 = D\alpha_{n+8}.$$

Здесь H_1 — коэффициент Ламэ локальной системы координат $yO_1\varphi$: $H_1 = 1 + y\text{æ}(\varphi)$; $\text{æ}(\varphi)$ — кривизна свободной поверхности жидкости; функции E_1, E_2, E_3, E_4 известны из решения задач при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Подставляя ряды (2.2)–(2.4) в граничные и начальные условия, получим при ε^k

$$a_k = b_k = 0, \quad x^2 + z^2 \to \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} a_k = b_k = 0, & t = 0, \\ \rho_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ \rho_*, & k = 0, \end{cases} \quad p_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ D\rho_*, & k = 0, \end{cases} & t = 0; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$g_k = h_{k+3} = \alpha_{k+4} = \beta_{k+4} = \beta_{k+4}^0 = 0, \quad k = 5, 6, \ldots, \quad t = 0; \tag{3.5}$$

$$p_k + \beta_k^0 = (T_n)_k + 2\left(\frac{\partial h_{k+1}}{\partial s} + \frac{\partial a_{k-2}^0}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial g_{k-2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_{k-2}^0}{\partial \varphi}\right) +$$
$$+ \frac{\partial h_{k+1}}{\partial s} + \frac{\partial a_{k-2}^0}{\partial y} + \frac{1}{\text{æ}}(h_{k-2} + a_{k-2}^0), \quad y = s = 0; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial h_{k-2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{k+1}}{\partial s} + \sum_{4n+j=k-2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a_j^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_j^0}{\partial y} + \frac{1}{\text{æ}} a_j^0\right)\tau^n \frac{1}{n!} = (T_\varphi)_k, \quad y = s = 0, \tag{3.7}$$

где

$$(T_\varphi)_k = \begin{cases} 0, & k \neq 4n, \\ \dfrac{\tau^{k/2}}{(k/2)!} \dfrac{\partial^{k/2} T_\varphi}{\partial t^{k/2}}\Big|_{t=0}, & k = 4n, \end{cases} \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots\,;$$

$$d\zeta_k/dt = b_k, \quad d\chi_k/d\tau = g^0_{k-4}, \quad y = s = 0. \tag{3.8}$$

В условие (3.6) входят функции, зависящие как от «медленного» времени $t = \tau\varepsilon^4$, так и от «быстрого» τ. Разобьем условие (3.6) на два: в одно войдут функции «медленного» времени t, во второе — все остальные. В результате имеем

$$p_k = (T_n)_k + 2\frac{\partial a^0_{k-2}}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial b^0_{k-2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a^0_{k-2}}{\partial y} + \frac{a^0_{k-2}}{æ}\right), \quad y = 0; \tag{3.9}$$

$$\beta^0_k = 2\frac{\partial h_{k+1}}{\partial s} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial g_{k-2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_{k+1}}{\partial s} + \frac{1}{æ} h_{k-2}\right), \quad s = 0. \tag{3.10}$$

Алгоритм решения задачи следующий:

1) решаются уравнения Эйлера с условиями (3.3), (3.4), (3.8), (3.9) ($k = 0$) для определения ρ_0, Π_0, ζ_0, a_0, b_0, p_0;

2) задача (3.1), (3.5), (3.7), (3.8), (3.10) ($k = 2,\, 4$) с условиями убывания на бесконечности служит для определения g_5, h_8, α_9, β_9, β^0_9, χ_9;

3) далее повторяется алгоритм, начиная с первого шага, при $k = k + 1$.

Остановимся подробнее на нахождении главных членов погранслойных поправок к решению. Используя функцию Грина, решение задачи (3.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} g_5 &= -\frac{2}{\rho_*}\int_0^\tau t\,\frac{\partial T_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} R(s, \tau - t)\,dt, \\ h_8 &= -\frac{4}{3\rho_*}\int_0^\tau \frac{\partial g_5}{\partial \varphi}\Big|_{s=0} R(s, (\tau - t)4/3)\,dt, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$R(s, r) = (4\pi r/\rho_*)^{(-1/2)} \exp(-s^2/(4r/\rho_*)) \qquad (\pi = 3{,}14159265\ldots). \tag{3.12}$$

4. Случай $k_2 = 2$, $k_1 = 2$. Аналогично п. **3** получим задачи

при ε^0

$$\begin{gathered} \rho_* \frac{\partial g_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial s^2}, \quad \rho_* \frac{\partial h_4}{\partial \tau} = -\rho_* \frac{\partial \beta_4}{\partial s} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 h_4}{\partial s^2}, \\ \mathrm{M}^2\left(\frac{\partial \beta_4}{\partial \tau} + g_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi}\Big|_{y=t=0}\right) + \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_4}{\partial s} = 0, \\ \beta_4 = D \ln \beta^0_4, \qquad \beta^0_4 = D\alpha_4; \end{gathered} \tag{4.1}$$

....

при ε^n

$$\begin{gathered} \rho_* \frac{\partial g_{n+2}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g_{n+2}}{\partial s^2} + E_1, \quad \beta^0_{n+4} = D\alpha_{n+4}, \\ \rho_* \frac{\partial h_{n+4}}{\partial \tau} = -\rho_* \frac{\partial \beta_{n+4}}{\partial s} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 h_{n+4}}{\partial s^2} + E_2, \quad \beta_{n+4} = E_4, \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial\beta_{n+4}}{\partial\tau}+g_{n+2}\frac{\partial\rho_0}{\partial\varphi}\Big|_{y=t=0}\right)+\frac{\partial g_{n+2}}{\partial\varphi}+\frac{\partial h_{n+4}}{\partial s}=\bar{E}_3.$$

Здесь функции E_k ($k = 1, 2, 3, 4$) известны. Граничные условия имеют вид (3.3)–(3.10).

Докажем эквивалентность уравнений (3.1), (3.2) и (4.1), (4.2) на малых временах ($t < \varepsilon^4$). Решим задачи (3.1), (4.1), используя метод [9]. Сделаем замену переменных

$$r = s/\sqrt{\tau}, \qquad \tau_1 = \sqrt{\tau}.$$

Решение находим в виде

$$\begin{aligned} g_5(s,\varphi,\tau) &= G_0(r,\varphi)+\tau_1 G_1(r,\varphi)+\ldots, \\ h_8(s,\varphi,\tau) &= H_0(r,\varphi)+\tau_1 H_1(r,\varphi)+\ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в (3.1). Собирая коэффициенты при одинаковых степенях τ_1, имеем задачу для первых отличных от нуля членов разложений (4.3):

$$\begin{aligned} G_2-\frac{r}{2}\frac{\partial G_2}{\partial r} &= \frac{1}{\rho_*}\frac{\partial^2 G_2}{\partial r^2}, \\ H_2-\frac{r}{2}\frac{\partial H_2}{\partial r} &= \frac{1}{\rho_*}\frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Проводя аналогичную процедуру с задачей (4.1), получим в точности уравнения (4.4). Граничные условия обеих задач одинаковы. Следовательно, главные члены асимптотик (2.12) и (2.13) на малых временах (формулы (4.3)) после перехода к переменным y, φ совпадают, эти асимптотики эквивалентны, и можно ограничиться изучением асимптотик п. **3**.

5. Касательная нагрузка на свободной границе. Для иллюстрации построенных в п. **3** асимптотик рассмотрим задачу о движении первоначально покоящейся жидкости под действием касательных напряжений, действующих на ее свободную границу. Пусть

$$\begin{aligned} &F_x = F_z = 0 \quad \text{в } (1.1), \\ &T_n = 0, \quad T_\varphi = f(t,\varphi) \quad \text{в } (1.4), \\ &f(0,\varphi) = 0, \quad \rho_* = \mathrm{const} \quad \text{в } (1.2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь функция f задана. Согласно пп. **1**–**3**, старшие члены асимптотических разложений решения имеют вид (формулы 3.11))

$$\begin{aligned} g_5(s/\varepsilon^3,\varphi,t/\varepsilon^4) &= -\frac{2}{\rho_*}\int\limits_0^{t/\varepsilon^4}\tau\frac{\partial T_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0}R(s,t/\varepsilon^4-\tau)\,d\tau, \\ h_8(s/\varepsilon^3,\varphi,t/\varepsilon^4) &= -\frac{4}{3\rho_*}\int\limits_0^{t/\varepsilon^4}\frac{\partial g_5}{\partial\varphi}\Big|_{s=0}R(s,(t/\varepsilon^4-\tau)4/3)\,d\tau, \\ \beta_9(s/\varepsilon^3,\varphi,t/\varepsilon^4) &= -\frac{1}{\mathrm{M}^2}\int\limits_0^{t/\varepsilon^4}\left(\frac{\partial g_5}{\partial\varphi}\Big|_{s=0}+\frac{\partial h_8}{\partial s}\Big|_{s=0}+\mathrm{M}^2 g_5\frac{\partial\rho_0}{\partial\varphi}\Big|_{\substack{y=t=0\\ s=0}}\right)d\tau, \end{aligned} \tag{5.2}$$

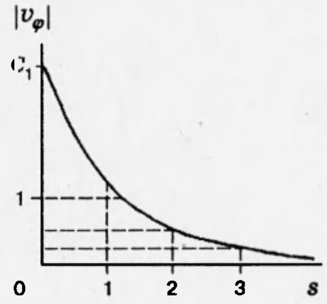

Рис. 3

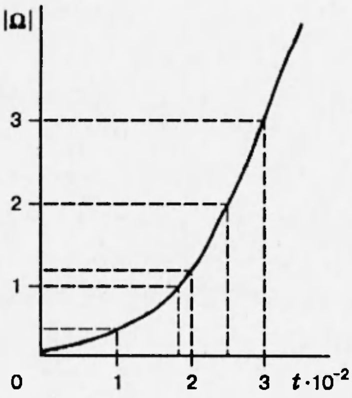

Рис. 4

$$\chi_9(\varphi, t/\varepsilon^4) = \int\limits_0^{t/\varepsilon^4} g_5^0\Big|_{s=0}\, d\tau,$$

где функция R определяется по формуле (3.12).

Функции первого итерационного процесса тождественно равны нулю в любом (!) приближении (в первом приближении есть константы) в силу разделения граничного условия (3.6) на два: (3.9), (3.10). В этом состоит отличие от несжимаемой жидкости [5]. Решение задачи имеет вид

$$\Pi = D\ln(D\rho_*) + \Pi^1 = D\ln(D\rho_*) + \varepsilon^9\beta_9 + \varepsilon^{10}\beta_{10} + \dots,$$

$$\mathbf{V} = (v_y, v_\varphi), \quad \zeta = \varepsilon^9\zeta_9 + \varepsilon^{10}\zeta_{10} + \dots,$$

$$v_y = v_y^1 = \varepsilon^8 h_8 + \varepsilon^9 h_9 + \dots, \quad v_\varphi = v_\varphi^1 = \varepsilon^5 g_5 + \varepsilon^6 g_6 + \dots$$

и носит погранслойный характер.

На рис. 3 показан график касательной составляющей вектора скорости (функции $|v_\varphi^1|$) в фиксированной точке $\varphi = \varphi_*$, $t = t_*$. Здесь

$$C_1 = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\rho_*\pi}} \int\limits_0^{t_*} \tau/\sqrt{t_* - \tau}\, d\tau.$$

Поведение функций v_y^1 и Π^1 аналогично поведению функции v_φ^1 (убывание по экспоненте при удалении от свободной границы).

На рис. 4 изображен график вихря скорости (функции $|\mathbf{\Omega}| = |\mathrm{rot}\,\mathbf{V}|$) в фиксированной точке $\varphi = \varphi_*$, $y = y_*$ (завихренность растет по экспоненте с увеличением времени). Графики на рис. 3, 4 приведены для $f(\varphi, t) = t$.

Построить асимптотику задачи (1.1)–(1.5) в случае (5.1) методами [1–5] не удается. Нужны дополнительные предположения о несжимаемости жидкости, стационарности или маловязкости течения, малости касательных нагрузок ($f = O\,(1)$ при $\varepsilon \to 0$). Методы, рассмотренные в данной работе, позволили выписать явные формулы для главных членов асимптотических разложений решения при малых t (формулы (5.2)) без дополнительных предположений.

Автор благодарит проф. Э. Н. Потетюнко за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Батищев В. А.** Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 425–432.
2. **Батищев В. А.** Об асимптотике течений маловязкой жидкости при действии касательных напряжений на свободной границе // ПМТФ. 1987. № 5. С. 101–107.
3. **Батищев В. А.** Пограничные слои вблизи плоской свободной границы жидкости, вызванные осесимметричными касательными напряжениями // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 60–67.
4. **Pukhnachov V. V.** Boundary layers near free surfaces // Computational and Asymptotics Methods for Boundary and Interior Layers. Dublin: Bool Press, 1982.
5. **Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.** Асимптотический анализ волновых движений жидкости со свободной границей // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 45–52.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970.
8. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Укр. мат. журн. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–12.
9. **Жуков М. Ю., Мкртычьян А. А., Перевозкин Ю. М. и др.** Термоупругая динамическая задача для шара, покрытого многослойной оболочкой // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1976. Вып. 3. С. 27–32.
10. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М., 1963. Ч. 1, 2.

Поступила в редакцию 15/II 1994 г.,
в окончательном варианте — 9/I 1995 г.