

УДК 539.374

ПОДХОД К АТТЕСТАЦИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВАННЫЙ НА УСТОЙЧИВОСТИ

И. Э. Келлер, П. В. Трусов, О. В. Шишкина, Д. В. Давыдов

Пермский государственный технический университет, 614000 Пермь

E-mail: kie@pstu.ac.ru

Предлагается подход к аттестации определяющих соотношений с точки зрения их пригодности для описания сверхпластичности, основанный на анализе условий устойчивости однородного растяжения образца по отношению к малым возмущениям текущей конфигурации. На примере простейшей (нелинейно-вязкой) модели сверхпластичной среды показана необходимость учета частичного сохранения локальной топологии при варьировании уравнений движения.

Ключевые слова: сверхпластичность, устойчивость, способы описания движения.

Постановка проблемы. В настоящее время для многих поликристаллических материалов определенной структуры в стандартных испытаниях (например, при одноосном растяжении) обнаружено явление сверхпластичности — развития аномально больших необратимых деформаций при малых усилиях [1]. Сложность этого явления делает актуальной формулировку определения и классификацию явления в рациональных, точных терминах теоретической физики в широком смысле, разработку процедуры аттестации определяющих соотношений с точки зрения их пригодности для описания сверхпластических режимов деформирования. В настоящей работе развивается известный, но недостаточно разработанный подход [2, 3], основанный на характерном свойстве сверхпластических режимов деформирования — устойчивости текущей конфигурации тела по отношению к малым или конечным возмущениям. Ниже исследуется процесс одноосного растяжения образца в силу простоты этого эксперимента и существенного влияния на поведение образца возмущений свободной поверхности. Анализируется устойчивость однородного деформирования по отношению к малым возмущениям, что дает “осторожные” условия сверхпластичности, не исключающие устойчивые неоднородные режимы деформирования.

Для постановки задачи устойчивости течения сверхпластичной среды, в реологии которой преобладает нелинейно-вязкая (с инфинитезимальной памятью) составляющая [1], необходим анализ существующих подходов. Подход на основе эйлера способа описания движения, представляющийся наиболее подходящим для сред, не обладающих памятью (или с инфинитезимальной памятью), в данной задаче дает результаты, не соответствующие эксперименту. В то же время при использовании лагранжева подхода, обычно применяемого для описания поведения материалов с медленно затухающей памятью, результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными. Установлено, что режим сверхпластичности обусловлен (в очень узком диапазоне параметров) аномально высокой чувствительностью к скорости деформаций (в экспериментах на одноосное мак-

рооднородное растяжение образцов степень чувствительности определяется параметром $m = d \ln \sigma / d \ln \xi$, где σ , ξ — растягивающие напряжение и деформация скорости). При высокотемпературной ползучести металлов $m = 1/40 \div 1/3$, в то время как при сверхпластичности она может достигать значений, приближенно равных единице.

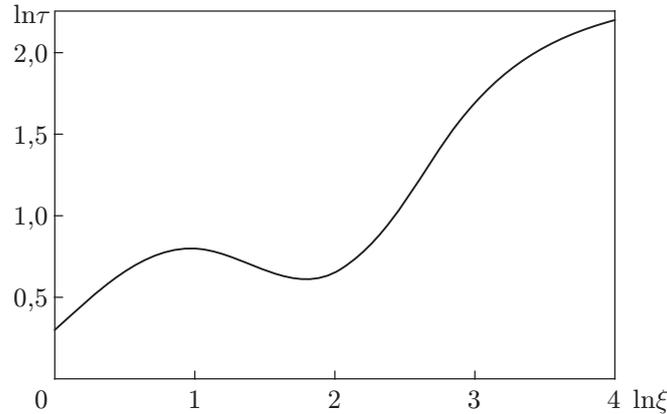
Рассмотрим следующий пример. Пусть прямоугольный образец в виде полосы длиной l и шириной b в текущий момент времени однородно растягивается со скоростью \dot{l} . Кроме того, образец несжимаем, т. е. $\xi = \dot{l}/l = -\dot{b}/b > 0$. Среду будем полагать нелинейно-вязкой. Рассматривая однородные возмущения конфигурации и поля скоростей образца в данный момент времени при неизменной силе P и обозначая через δ разность поля в возмущенном и основном движениях, получим $\delta P = b \delta \sigma + \sigma \delta b = 0$, $\delta \ln \sigma = m \delta \ln \xi$ и $\delta \xi = -\delta \dot{b}/b + \dot{b} \delta b/b^2$, если ξ понимать в лагранжевом смысле, или $\delta \xi = -\delta \dot{b}/b$, если ξ понимать в эйлеровом смысле. Отсюда следует уравнение $\delta \dot{b}/\delta b = \lambda \xi$, где $\lambda = (1 - m)/m$ либо $\lambda = 1/m$ соответственно. Решение этого уравнения $\delta b = \delta b_0 \exp(\lambda \xi t)$ свидетельствует о том, что в рамках лагранжева описания возмущение δb_0 затухает при $m > 1$ (критерий Харта) и $m < 0$, а в рамках эйлерова — только при $m < 0$. Если не учитывать случай скоростного разупрочнения $m < 0$, то несоответствие результата эйлерова анализа устойчивости и экспериментальных данных становится очевидным.

В трехмерном пространстве ситуация аналогична: если постановку задачи записывать в текущем лагранжевом состоянии, то, в частности, вариация градиента скорости равна $\delta(\mathbf{v}\nabla) = (\delta\mathbf{v})\nabla - \mathbf{v}(\delta\nabla)$ (и относится к материальной точке), а если в эйлеровом, — $\delta(\mathbf{v}\tilde{\nabla}) = (\delta\mathbf{v})\tilde{\nabla}$ (и относится к точке пространства, занимаемой данной материальной точкой). В первом случае набла-вектор ∇ считается материальным и его вариация характеризует возмущение конфигурации, в рамках же эйлерова подхода возмутить пространственный набла-вектор $\tilde{\nabla}$ не представляется возможным, в результате чего в операторе и граничных условиях возмущенной задачи теряется важный член.

Устойчивость растяжения полосы из линейно-вязкого идеально пластичного материала по отношению к малым произвольным возмущениям границы в рамках эйлерова описания изучена в классических работах [4, 5]. В [6] аналогичная задача решена для нелинейно-вязкого материала. В [2] с использованием лагранжева подхода для режима сверхпластичности найдено условие устойчивости процесса растяжения полосы из нелинейно-вязкого материала по отношению к однородному возмущению. В работе [7] указано на существование проблемы выбора способа описания движения при исследовании устойчивости течений жидкостей. Проблема заключается в построении определяющих соотношений, описывающих движение сред, занимающих промежуточное положение между твердым телом и жидкостью и обнаруживающих изменение локальной топологии (смену соседей частиц среды). В данной работе предлагается промежуточный способ варьирования уравнений, учитывающий континуально изменяемую локальную топологию, в предельных случаях соответствующий лагранжеву либо эйлерову описанию и, вероятно, более подходящий для описания задач устойчивости изучаемого класса сред.

Возмущенные уравнения движения нелинейно-вязкой среды. В качестве простейшей модели сверхпластичной среды принимаются тензорно-линейные нелинейно-вязкие определяющие уравнения в предположении несжимаемости материала. Для такой среды уравнения равновесия в скоростях в терминах лагранжева текущего подхода имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \mathbf{0}, & \sigma &= -pI + \frac{\tau(\xi)}{\xi} D, \\ D &= (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)/2, & \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Рис. 1. Зависимость $\ln \tau(\ln \xi)$

где ∇ — материальный оператор градиента в текущей конфигурации; σ , D — тензоры напряжений и деформаций скорости; p — гидростатическое давление; I — единичный тензор второго ранга; $\tau(\xi)$ — материальная функция; $\xi = \sqrt{(1/2)D : D}$; \mathbf{v} — скорость перемещений. Зависимость $\ln \tau(\ln \xi)$ предполагается сигмовидной, типичной для среды, в которой имеет место режим сверхпластичности, возможно, с участком, на котором “скоростное разупрочнение” уменьшается (рис. 1). Множитель в определении ξ выбран таким образом, чтобы его можно было использовать в изучаемой далее двумерной задаче, для которой $\tau = \sqrt{2\sigma' : \sigma'}$ (штрих означает девиаторную часть).

Возмущая (1), получим

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta\sigma + \delta\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}, \quad \delta\sigma = -\delta p I + \left(\frac{\tau'}{\xi} - \frac{\tau}{\xi^2} \right) \delta\xi D + \frac{\tau}{\xi} \delta D, \\ \delta D = (\nabla \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \nabla) / 2 + ((\delta \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} (\delta \nabla)) / 2, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{v} + \delta \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом соотношений [8]

$$\delta \nabla = -(\nabla \delta \mathbf{u}) \cdot \nabla, \quad \delta \xi = \frac{1}{2\xi} D : \delta D, \quad \frac{\tau'}{\tau} \xi = \frac{d \ln \tau}{d \ln \xi} \equiv m$$

система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta\sigma - \nabla \delta \mathbf{u} : \nabla \sigma = \mathbf{0}, \quad \delta\sigma = -\delta p I + \frac{\tau}{\xi} \left(\frac{m-1}{2} \frac{D}{\xi} \frac{D}{\xi} + I_4 \right) : \{ \delta \mathbf{v} \nabla - \mathbf{v} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \nabla \}, \\ \nabla \cdot \delta \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla : \delta \mathbf{u} \nabla = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A : B = \text{tr } A \cdot B$; I_4 — единица в пространстве тензоров четвертого ранга; $\{A\} = (A + A^T)/2$. Следует учитывать, что

$$\delta \mathbf{v} = \delta \dot{\mathbf{u}}. \quad (4)$$

В рамках эйлерова подхода оператор ∇ воспринимается как пространственный и возмущенная система (1) легко получается из (3) в пренебрежении слагаемыми, содержащими возмущение текущей конфигурации $\delta \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta\sigma = \mathbf{0}, \quad \delta\sigma = -\delta p I + \frac{\tau}{\xi} \left(\frac{m-1}{2} \frac{D}{\xi} \frac{D}{\xi} + I_4 \right) : \{ \delta \mathbf{v} \nabla \}, \\ \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Наряду с (3) и (5) предлагается рассматривать “промежуточную” постановку

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta \sigma - \chi \nabla \delta \mathbf{u} : \nabla \sigma = \mathbf{0}, \quad \delta \sigma = -\delta p I + \frac{\tau}{\xi} \left(\frac{m-1}{2} \frac{D}{\xi} \frac{D}{\xi} + I_4 \right) : \{ \delta \mathbf{v} \nabla - \chi \mathbf{v} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \nabla \}, \\ \nabla \cdot \delta \mathbf{v} - \chi \mathbf{v} \nabla : \delta \mathbf{u} \nabla = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которая при граничных значениях параметра $0 \leq \chi \leq 1$ сводится к (3) или (5).

Аналогично возмущаются граничные условия исследуемой задачи, в частности, на свободной границе [8]

$$\mathbf{n} \cdot \delta \sigma - \chi \mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{u} \nabla) \cdot \sigma = \mathbf{0}. \quad (7)$$

В эйлеровой постановке возмущение текущей конфигурации учитывается в начальных условиях, а в лагранжевой и промежуточной — также в вызываемом возмущением изменении локальной метрики в операторе равновесия и граничных условиях. В новой постановке геометрически нелинейный член учитывается частично, целесообразность чего обсуждается ниже.

Устойчивость одноосного растяжения образца. Исследуем устойчивость процесса однородного одноосного растяжения сверхпластичного образца по отношению к малым неоднородным возмущениям конфигурации в текущий момент времени. Данная задача оказывается критической для анализа рассматриваемых подходов к описанию движения.

Рассматривается плоский прямоугольный образец (полоса), течение которого в исследуемом возмущаемом состоянии характеризуется относительным перемещением концов

$$v_1|_{x=0} = 0, \quad v_1|_{x=l} = v, \quad \sigma_{12}|_{x=0} = \sigma_{12}|_{x=l} = 0$$

при свободных боковых сторонах:

$$\sigma_{22}|_{y=\pm b/2} = \sigma_{21}|_{y=\pm b/2} = 0$$

(выбрана декартова система координат с осью x , направленной вдоль оси растяжения). В данном состоянии $D_{11} = -D_{22} = v/l \equiv \xi$, $D_{12} = D_{21} = 0$, $\sigma_{11} = \tau$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, $\nabla \sigma = 0$.

Возмущенное движение описывается вытекающими из (6) уравнениями

$$\begin{aligned} m(\delta v_{1,11} - \chi \xi \delta u_{1,11}) + \delta v_{1,22} + \delta v_{2,12} - \chi \xi (\delta u_{1,22} - \delta u_{2,12}) &= (\xi/\tau) \delta p_{,1}, \\ m(\delta v_{2,22} + \chi \xi \delta u_{2,22}) + \delta v_{1,21} + \delta v_{2,11} - \chi \xi (\delta u_{1,21} - \delta u_{2,11}) &= (\xi/\tau) \delta p_{,2}, \\ \delta v_{1,1} + \delta v_{2,2} - \chi \xi (\delta u_{1,1} - \delta u_{2,2}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

следующими из (7) условиями на боковых сторонах

$$-\tau \delta u_{2,1} + \delta \sigma_{21} = \delta \sigma_{22} = 0 \quad (y = \pm b) \quad (9)$$

и условиями на концах

$$\delta \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0, l) \quad (10)$$

при постоянной растягивающей силе. Условиям (10) удовлетворяют возмущения в форме

$$\delta u_1 = \varphi(ay) \sin(ax) e^{\lambda \xi t}, \quad \delta u_2 = \phi(ay) \cos(ax) e^{\lambda \xi t} \quad (11)$$

при $a = \pi n/l$, где n — целое число. В (11) учтено, что монохроматические возмущения вдоль оси x опаснее произвольных [9]. С учетом (4) и (11) из (8) можно получить уравнение

$$\phi^{\text{IV}} - 2(2m-1)\phi^{\text{II}} + \phi = 0 \quad (12)$$

(производные берутся по переменной y), совпадающее с уравнением равновесия для функции тока возмущенной скорости в [7]. Коэффициент при ϕ^{II} в (12) с феноменологической точки зрения отличается от аналогичного коэффициента в [7]. При $m > 0$ система является системой эллиптического типа, а при $m \leq 0$ — системой гиперболического типа. Далее рассматривается только первый случай, хотя второй случай, связанный со скоростным разупрочнением при динамической сверхпластичности, также представляет интерес, но требует несколько иной формулировки задачи. Путь интегрирования уравнения (12) с учетом граничных условий (9) подробно изложен в [5]. Приведем лишь один промежуточный результат — граничные условия в терминах функции ϕ :

$$\phi^{\text{III}} + (1 - 4m)\phi^{\text{I}} = \phi - (\lambda + \chi)(\phi^{\text{II}} + \phi) = 0 \quad (y = \pm b/2). \quad (13)$$

Следует отметить, что вся неэйлеровость описания движения (связанная с сохранением локальной топологии) в задаче (12), (13) сосредоточена в члене с множителем $\lambda + \chi$ в условии для касательного напряжения на свободной границе, что характерно исключительно для данной задачи, а не для предлагаемого способа. Из уравнений задачи получаем зависимость $\lambda(k)$, где $k = \pi nb/l$:

$$\lambda = \frac{2 \sin(k\sqrt{m-1})}{m \sin(k\sqrt{m-1}) \pm \sqrt{m(m-1)} \operatorname{sh}(k\sqrt{m})} - \chi \quad (0 < m < 1); \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{2 \operatorname{sh}(k\sqrt{m-1})}{m \operatorname{sh}(k\sqrt{m-1}) \pm \sqrt{m(m-1)} \operatorname{sh}(k\sqrt{m})} - \chi \quad (m \geq 1). \quad (15)$$

В (14), (15) знаки “+” и “-” соответствуют четной и нечетной функции ϕ , задающей симметричные или антисимметричные относительно оси растяжения моды возмущения. В случае симметричной моды функция ϕ в виде

$$\phi \sim \cos(\bar{\gamma}h) \sin(\gamma t) + \cos(\gamma h) \sin(\bar{\gamma}t), \quad \gamma = \sqrt{1-m} + i\sqrt{m} \quad (16)$$

конкретизируется в зависимости от диапазона изменения параметра m . Функция φ находится с использованием выражений для ϕ и λ (14)–(16) и соотношения

$$\varphi = -\frac{\lambda + \chi}{\lambda - \chi} a^{-1} \phi',$$

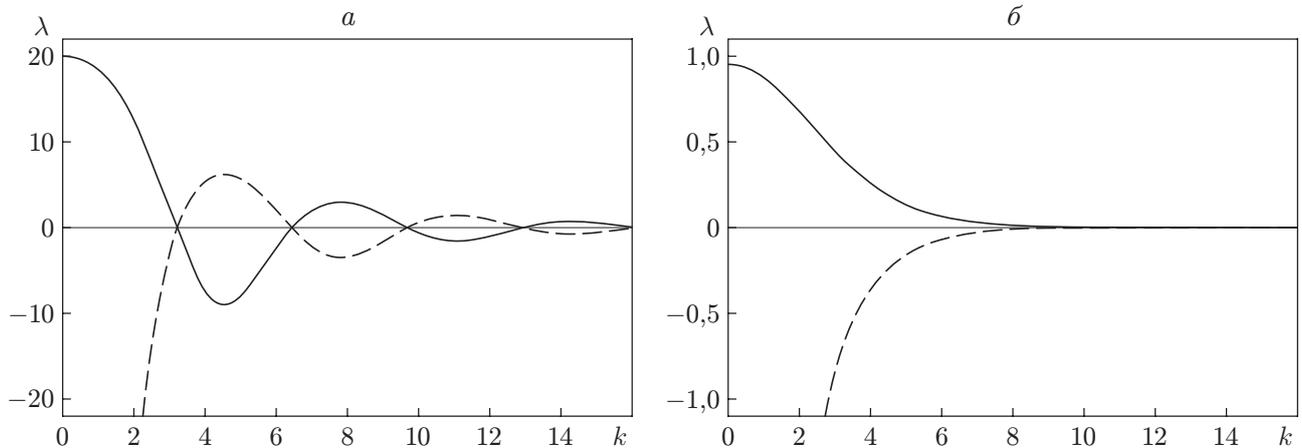
вытекающего из уравнения несжимаемости системы (8) с учетом (11). Можно убедиться, что решение (11) гарантирует выполнение условия постоянства приложенной растягивающей силы на концах полосы в интегральном смысле.

В случае $\chi = 1$ предельный переход $a \rightarrow 0$ для симметричной моды соответствует однородному возмущению, рассмотренному в [2]; из (14) или (15) при этом получаем известный результат

$$\lambda = (1 - m)/m.$$

Анализ условий устойчивости. На рис. 2 приведены зависимости λ (скорости роста (затухания) возмущения, отнесенной к ξ) от k (отношения ширины полосы b к половине длины волны возмущения вдоль полосы $l/(\pi n)$) при $\chi = 0$.

Следует отметить, что симметричная мода возмущения (“шейки”) оказывается более опасной, чем антисимметричная (“волна”), поэтому далее рассматривается симметричная мода. Очевидно, что в однородном процессе растяжения полосы с постоянной скоростью v относительного смещения ее концов деформация скорости ξ уменьшается обратно пропорционально длине образца l . При этом ξ попадает в зону сверхпластичности, где степень чувствительности к скорости деформации m достигает максимальных значений (см.

Рис. 2. Зависимости $\lambda(k)$ при $\chi = 0$:

a — $m = 0,05$; b — $m = 1,05$; сплошная линия — симметричное возмущение; штриховая — антисимметричное возмущение

рис. 1). Каждая из конфигураций, через которые “проходит” образец при однородном растяжении, независимо “зондируется” на устойчивость путем возмущения симметричными относительно оси растяжения монохроматическими модами с различным числом полуволн, а также путем регистрации скорости роста или затухания указанного возмущения. Результат такого “зондирования” представлен на рис. 2. Движение влево вдоль горизонтальной оси можно интерпретировать как уменьшение числа полуволн возмущения, накладываемого на фиксированную конфигурацию, или как удлинение полосы, возмущаемой модой с фиксированным числом полуволн. При $m < 1$ растягиваемая полоса периодически находится в состояниях устойчивости и неустойчивости по отношению к возмущениям с произвольным фиксированным числом полуволн, до тех пор пока при некотором критическом удлинении не окажется неустойчивой по отношению к этой моде возмущения. При увеличении параметра χ на рис. 2 графики сдвигаются вниз на величину χ ($0 \leq \chi \leq 1$). Поэтому при $m < 1$ с увеличением χ неустойчивость наступает в более поздние моменты, при этом качественных изменений не происходит. При увеличении m ($m < 1$) и $\chi = 0$ значение $\lambda(0)$ уменьшается, достигая значения $\lambda = 1$ при $m = 1$. В этом предельном состоянии также с увеличением χ неустойчивость наступает в более поздние моменты, а при $\chi = 1$ вообще не наступает. Эта ситуация соответствует рассмотренной в [2]. При $m > 1$ чередования состояний устойчивости и неустойчивости относительно фиксированной моды возмущения с удлинением полосы не происходит, а момент наступления неустойчивости зависит от χ . При этом, поскольку максимальное значение $\lambda = \lambda(0) < 1$ (уменьшающееся с ростом m при $m > 1$), существует такое максимальное значение χ ($0 \leq \chi \leq 1$), при котором состояние неустойчивости отсутствует. Отметим, что независимо от того, превышает значение m единицу или нет, в области изменения параметров k , χ (или n , l/b , χ) существуют неустойчивые состояния.

Критерием выбора способа описания движения, в частности значения χ , должен быть эксперимент.

Из выражений (14), (15) следует, что устойчивость течения определяется только материальным параметром m , представляющим собой текущий касательный модуль кривой $\ln \tau(\ln \xi)$, что характерно для вязких сред [7].

Следует отметить излишнюю жесткость условий устойчивости однородного растяжения образца, кроме того, необходимо провести анализ устойчивых неоднородных режимов течения, сопровождающихся образованием и “замораживанием” уединенных “шеек” [3].

Обсуждение предложенного способа возмущения уравнений. Для исследования процессов деформирования (течения) сред, сопровождающихся существенным искажением лагранжевой сетки координат (изменением локальной топологии), требуется эффективный подход к описанию движения. К числу таких процессов, как представляется авторам данной работы, относятся режимы сверхпластического деформирования поликристаллических сред с относительным скольжением зерен и сменой соседей [1]. Следует отметить, что предложенный способ возмущения уравнений движения частично учитывает континуальное изменение локальной топологии.

В [10] установлены условия интегрируемости текущей конфигурации в евклидовом пространстве:

$$F \wedge \nabla_0 = \mathbf{0}, \quad \dot{F} - L \cdot F = 0. \quad (17)$$

Здесь поля F и L определяются дифференциальными соотношениями

$$d\hat{\mathbf{x}} = F \cdot d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{v} = L \cdot d\hat{\mathbf{x}},$$

$d\mathbf{x}$, $d\hat{\mathbf{x}}$ — бесконечно малые материальные отрезки в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно; $d\mathbf{v}$ — относительная скорость концов отрезка $d\hat{\mathbf{x}}$; ∇_0 — набла-оператор в отсчетной конфигурации. Невыполнение (17) означает, что наличие и развитие некоего скрытого поля дефектов континуально изменяет локальную топологию сплошной среды.

Возмущая соотношение (17), получим

$$\delta F \wedge \nabla_0 = \mathbf{0}, \quad \delta \dot{F} - \delta L \cdot F - L \cdot \delta F = 0. \quad (18)$$

Условия (18) выполняются тождественно в рамках лагранжева описания. Для первого условия это можно установить с помощью соотношения $\delta F = \delta \mathbf{u} \nabla_0$, а для второго — с помощью соотношений $\delta \dot{F} = \delta \mathbf{v} \nabla_0$, $\delta L = \delta \mathbf{v} \nabla - L \cdot \delta \mathbf{u} \nabla$ и $\nabla_0 = \nabla \cdot F$. В рамках предложенного описания при $0 \leq \chi < 1$ изменяется запись $\delta L = \delta \mathbf{v} \nabla - \chi L \cdot \delta \mathbf{u} \nabla$, в силу чего во втором соотношении в (18) появляется невязка $(1 - \chi)L \cdot \delta \mathbf{u} \nabla$, представляющая собой источник изменения локальной топологии, мощность которого максимальна в случае эйлерова описания ($\chi = 0$). При $\chi = 1$ в случае однородного одноосного растяжения вторые условия в (17) и (18) обращаются в тождества:

$$\frac{\dot{l}}{l_0} - \frac{\dot{l}}{l} \frac{l}{l_0} = 0, \quad \frac{\delta \dot{l}}{l_0} - \left(\frac{\delta \dot{l}}{l} - \frac{\dot{l} \delta l}{l^2} \right) \frac{l}{l_0} - \frac{\dot{l}}{l} \frac{\delta l}{l_0} = 0,$$

а при $\chi \neq 1$

$$\frac{\delta \dot{l}}{l_0} - \left(\frac{\delta \dot{l}}{l} - \chi \frac{\dot{l} \delta l}{l^2} \right) \frac{l}{l_0} - \frac{\dot{l}}{l} \frac{\delta l}{l_0} = (1 - \chi) \frac{\dot{l} \delta l}{l^2} \neq 0,$$

что подтверждает обнаруженное нарушение согласованности кинематических полей. Тем самым данный феноменологический материальный параметр позволяет учитывать новое свойство среды — степень сохранения локального порядка — независимо от используемых определяющих уравнений.

Данный источник изменения локальной топологии имеет градиентный вид и порождает скрытое векторное поле $(1 - \chi)L \cdot \delta \mathbf{u}$ [11]. Для выяснения его смысла запишем уравнения траектории и линии тока, проходящих через одну и ту же точку в текущей конфигурации:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{ds} = \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}', t). \quad (19)$$

В уравнении линии тока параметр s выбираем совпадающим с t , фиксируя t в правой части этого уравнения. Тогда из (19) следует выражение для мгновенной скорости расхождения траекторий и линий тока в данной точке:

$$\frac{d \delta \hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{v} \nabla \cdot \delta \hat{\mathbf{x}}. \quad (20)$$

Поскольку в (20) $\delta\hat{\mathbf{x}} = \delta\mathbf{u}$, при $\chi = 0$ правая часть представляет собой источник изменения локальной топологии, при $\chi = 1$ этот источник отсутствует. Учитывая, что в рамках лагранжева подхода возмущение перемещения материальной точки происходит вдоль траектории этой точки, заключаем, что в рамках эйлера подхода то же возмущение двигает материальную точку вдоль линии тока, проходящей через точку пространства, занятую в данный момент рассматриваемой материальной точкой. Теперь становится ясным смысл скрытого векторного поля $(1 - \chi)L \cdot \delta\mathbf{u}$ и в промежуточных случаях $\chi \neq 0$, $\chi \neq 1$. Таким образом, установлен смысл возмущения текущей конфигурации при использовании различных подходов к описанию движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васин Р. А.** Введение в механику сверхпластичности: В 2 ч. / Р. А. Васин, Ф. У. Еникеев. Уфа: Гилем, 1999.
2. **Hart E. W.** Theory of the tensile test // Acta Metall. 1967. V. 15, N 2. P. 351–355.
3. **Wray P. J.** Tensile plastic instability at an elevated temperature and its dependence upon strain rate // J. Appl. Phys. 1970. V. 41, N 8. P. 3347–3352.
4. **Ильюшин А. А.** Деформация вязкопластического тела // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. Механика. 1940. Вып. 39. С. 1–39.
5. **Ишлинский А. Ю.** Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 2. С. 109–130.
6. **Шишкина О. В., Келлер И. Э., Трусов П. В.** Об устойчивости сверхпластического течения к малым возмущениям границы // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 9-й Междунар. конф. Ростов: Изд-во ООО “ЦВВР”, 2005. Т. 1. С. 222–227.
7. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1986.
8. **Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.** Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986.
9. **Hill R., Hutchinson J. W.** Bifurcation phenomena in the plane tension test // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 239–264.
10. **Kunin I. A.** Kinematics of media with continuously changing topology // Intern. J. Theor. Phys. 1990. V. 29, N 11. P. 1167–1176.
11. **Мясников В. П., Гузев М. А.** Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 1. С. 5–16.

Поступила в редакцию 22/XI 2006 г.