

УДК 532.546

ТЕЧЕНИЕ СТОКСА ЧЕРЕЗ МЕМБРАНУ, СОСТОЯЩУЮ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

П. К. Ядав, П. Сингх*, А. Тивари**, С. Део***

Национальный технологический институт им. Мотилала Неру,
211004 Аллахабад, Индия

* Национальный технологический институт г. Патна, 800005 Патна, Индия

** Научно-исследовательский технологический институт им. Бирлы,
333031 Пилани, Индия

*** Аллахабадский университет, 211002 Аллахабад, Индия

E-mails: pramodky@mnnit.ac.in, rosaindica2k@gmail.com,
ast79.ashish@gmail.com, sd_mathau@yahoo.co.in

Исследуется просачивание (медленное течение) несжимаемой вязкой жидкости через мембрану. Предполагается, что мембрана состоит из неоднородных пористых цилиндрических частиц с внутренней полостью, пористость изменяется в радиальном направлении. Течение в неоднородной пористой среде удовлетворяет закону Дарси. Течение внутри полости и вне неоднородной пористой среды описывается уравнениями Стокса. С использованием ячеечной модели построено аналитическое решение задачи. Получены аналитические выражения для силы сопротивления, действующей на мембрану, и для гидродинамической проницаемости мембраны. Исследовано влияние пористости, изменяющейся в радиальном направлении, на параметры потока, а также влияние различных параметров задачи на гидродинамическую проницаемость мембраны для четырех различных моделей. Показано, что некоторые известные данные о гидродинамической проницаемости являются частными случаями построенного аналитического решения.

Ключевые слова: ячеечная модель, функция тока, закон Дарси, гидродинамическая проницаемость.

DOI: 10.15372/PMTF20190505

Введение. Интерес к исследованию гидродинамики течений жидкости через кластеры пористых частиц сферической и цилиндрической формы обусловлен широким применением таких течений в науке и различных технологиях. Подобные течения встречаются, например, в биомедицине (течение крови по венам и артериям), химии, нефтяной промышленности. Результаты исследований таких течений используются при разработке методов доставки потоком крови лекарств в капсулах, создании различных фильтров, разработке оборудования для охлаждения реакторов, создании пористых электродов и пористых катализаторов в химической промышленности, а также при изучении течений через полимерные катушки, течений в грунтовых водах и т. п.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда научных и инженерных исследований (SERB) Нью-Дели (грант № SR/FTP/MS-47/2012).

© Ядав П. К., Сингх П., Тивари А., Део С., 2019

Моделирование течения жидкости сквозь множество частиц с учетом положения каждой частицы является чрезвычайно сложной задачей. При исследовании течений в дисперсных системах со случайно распределенными пористыми частицами часто используется ячеечная (particle-in-cell) модель, в которой размер жидкой ячейки выбирается таким образом, чтобы пористость дисперсной системы была равна пористости внутри каждой ячейки. В работах [1–4] предложены различные краевые условия на поверхности гипотетической ячейки.

В [5–9] исследовано течение сквозь пористую среду, содержащую пористые частицы цилиндрической или сферической формы. В большинстве этих работ при описании течения чистой жидкости используются уравнения Навье — Стокса, при описании течения жидкости сквозь пористую среду — уравнения Дарси или Бринкмана, на границе между жидкостью и пористой средой задаются соответствующие условия сопряжения. В работах [10, 11] изучалось течение вязкой жидкости через неоднородный пористый цилиндр [10] или сферу [11], пористость которых изменялась в радиальном направлении. В [12] при исследовании течения Стокса через пронизываемый цилиндр использовались условия Саффмана на границе между жидкостью и пористой средой. В [13] экспериментально изучено стационарное обтекание пористого цилиндра при умеренных числах Рейнольдса. Медленное течение вязкой жидкости через совокупность пористых цилиндрических наночастиц исследовалось в работе [14]. В [15] изучалось влияние различных параметров на силу сопротивления, возникающую при медленном течении вязкой жидкости через множество концентрических кластеров пористых цилиндрических частиц [15]. В [16] рассматривалось течение вокруг капсулы, содержащей жидкость, при условии, что внешний поток не может просачиваться через пористую оболочку и смешиваться с жидкостью, находящейся внутри полости. Определена сила сопротивления, действующая на капсулу. В [17] с использованием метода частиц в ячейках (ячеечного метода) исследовалось медленное течение вокруг пористой цилиндрической оболочки, внутри которой имеется цилиндрическая полость. Обнаружено, что проницаемость мембраны уменьшается при увеличении объемной доли частиц. В работе [18] ячеечная модель использовалась для расчета гидродинамической проницаемости мембраны, состоящей из пористых частиц, и изучения влияния пористой оболочки на общую проницаемость мембраны. В [19] с помощью ячеечной модели исследовалась гидродинамическая проницаемость бипористой мембраны.

В работе [20] на основе ячеечной модели изучено течение вязкой жидкости через систему цилиндров с пронизываемой оболочкой при малых числах Рейнольдса и вычислена сила сопротивления, действующая на пористый цилиндр. В [21] решена двумерная задача о течении жидкости через пористое тело произвольной формы при малых числах Рейнольдса. Задача о течении жидкости через пористые цилиндры с ромбовидным и квадратным поперечными сечениями численно решалась в [22]. Течение в пористой среде моделировалось с использованием уравнений Дарси, Бринкмана и Форчхаймера, а течение свободной жидкости — уравнениями Навье — Стокса. В [22] установлено, что с увеличением числа Дарси давление уменьшается. В большинстве указанных выше работ рассматривались однородные пористые частицы. Однако во многих случаях имеет место течение через образованную неоднородными частицами пористую среду, проницаемость которой не является постоянной.

В данной работе исследуется течение вязкой жидкости через пористую среду, состоящую из неоднородных пористых частиц, проницаемость которых изменяется в радиальном направлении. Предлагаемая модель может быть использована при изучении свойств микрокапсул (пористых оболочек, содержащих вязкую жидкость [23, 24]).

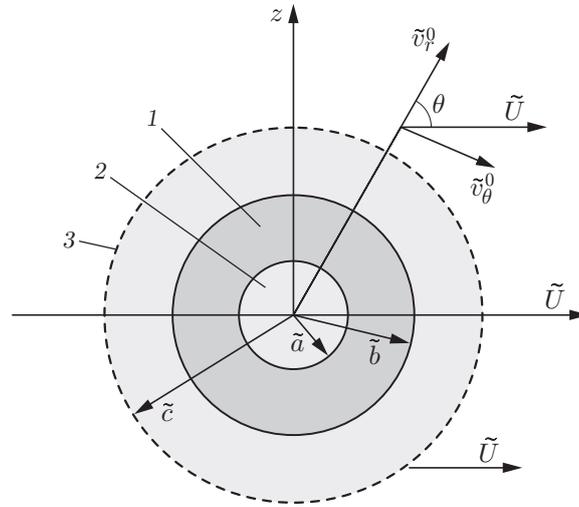


Рис. 1. Физическая модель задачи:

1 — неоднородная пористая частица, 2 — полость, 3 — поверхность гипотетической цилиндрической ячейки

Постановка задачи. Исследуется установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости через мембрану, состоящую из неоднородных пористых цилиндрических частиц радиусом \tilde{b} , окружающих цилиндрическую полость радиусом \tilde{a} ($\tilde{a} < \tilde{b}$), расположенную вдоль оси цилиндра (оси z). Жидкость движется с равномерно распределенной скоростью \tilde{U} . Предполагается, что каждая неоднородная пористая цилиндрическая частица находится внутри гипотетической концентрической ячейки радиусом \tilde{c} . Неоднородные пористые частицы радиусом a_p с изменяющейся в радиальном направлении пористостью находятся в кольцевой области, заключенной между окружностями радиусами \tilde{a} и \tilde{b} соответственно. Пусть $\tilde{\delta} = \tilde{b} - \tilde{a}$ — относительная толщина поры. Схема течения приведена на рис. 1.

Предполагается, что множество концентрических относительно оси z кластеров пористых цилиндрических частиц с изменяющейся в радиальном направлении проницаемостью, окружающих полость, гидродинамически эквивалентно коаксиальной цилиндрической оболочке, окружающей полость. Радиус \tilde{b} выбирается таким образом, чтобы объемная доля частиц в кластере γ была равна объемной доле частиц в ячейке: $1 - \varepsilon = \gamma = \pi(\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2)/(\pi\tilde{c}^2)$ (ε — пористость среды). Внешняя область $\tilde{b} \leq \tilde{r} \leq \tilde{c}$, пористая область $\tilde{a} \leq \tilde{r} \leq \tilde{b}$ и внутренняя область $0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{a}$ обозначены I, II, III соответственно.

При описании течения внутри полости и вне области однородной пористости (в областях I и III) используются уравнение Стокса и уравнение неразрывности:

$$\tilde{\nabla} \tilde{P}^{(i)} = \tilde{\mu}_1 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{V}}^{(i)}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^{(i)} = 0, \quad i = \text{I, III}. \tag{1}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{V}}^{(i)}$, $\tilde{P}^{(i)}$ — скорость и давление в жидкости соответственно; $\tilde{\mu}_1$ — вязкость жидкости в областях I и III.

При описании течения в области II (внутри неоднородной пористой среды) используется закон Дарси. Из результатов экспериментов [6, 25, 26] следует, что для среды с переменной проницаемостью уравнения Бринкмана непригодны. В работе [27] при решении задачи для среды с неоднородной проницаемостью среда разбивалась на слои, в каждом из которых проницаемость полагалась постоянной. Это позволяло использовать для каждого слоя модель Бринкмана. В данной работе при описании течения в области II, занятой неоднородной пористой средой, используются закон Дарси и уравнение неразрывности

$$\tilde{\mu}_2 \tilde{\nabla} \tilde{P}^{(\text{II})} = -K(\tilde{r}) \tilde{\nabla} \tilde{P}^{(\text{II})}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^{(i)} = 0, \tag{2}$$

где $K(\tilde{r})$ — коэффициент проницаемости неоднородной пористой среды. В данной работе используется зависимость $K(\tilde{r}) = k_0 \tilde{r}^2$. Соотношение между вязкостями $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$ зависит от свойств пористой среды.

Решение задачи. В безразмерных переменных

$$r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{b}}, \quad R = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}, \quad m = \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}}, \quad \nabla = \tilde{b} \tilde{\nabla}, \quad \nabla^2 = \tilde{\nabla}^2 \tilde{b}^2, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}, \quad K(r) = \frac{K(\tilde{r})}{\tilde{b}^2},$$

$$P = \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_0}, \quad \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{U} \tilde{\mu}_1}{\tilde{b}}, \quad \lambda^2 = \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}, \quad \delta = \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{b}} = 1 - R, \quad \psi = \frac{\tilde{\psi}^{(i)}}{\tilde{U} \tilde{b}^2}, \quad i = \text{I, II, III}$$

уравнения (1), (2) записываются в виде

$$\nabla^2 \mathbf{v}^{(i)} = \nabla P^{(i)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{(i)} = 0, \quad i = \text{I, III}; \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^{(\text{II})} = -\lambda^2 K(r) \nabla P^{(\text{II})}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{(\text{II})} = 0. \quad (4)$$

Функции тока $\psi^{(i)}(r, \theta)$, $i = \text{I, II, III}$, удовлетворяющие уравнениям неразрывности, вводятся следующим образом:

$$\tilde{v}_r^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta}, \quad \tilde{v}_\theta^{(i)} = -\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r}. \quad (5)$$

Исключая из уравнений (3) давление и используя соотношения (5), получаем уравнения для функции тока в областях I и III:

$$\nabla^4 \psi^{(i)} = \nabla^2 (\nabla^2 \psi^{(i)}) = 0, \quad i = \text{I, III},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

С использованием метода разделения переменных функции тока для уравнений Стокса представляются в следующем виде:

$$\psi^{(\text{I})}(r, \theta) = (B_1 r + B_2 r^3 + B_3/r + B_4 r \ln r) \sin \theta, \quad \psi^{(\text{III})}(r, \theta) = (C_1 r + C_2 r^3) \sin \theta.$$

Применяя оператор дивергенции к обеим частям первого уравнения в (4) и используя второе уравнение (4), получаем

$$\text{grad } K(r) \cdot \text{grad } p^{(\text{II})} + K(r) \nabla^2 p^{(\text{II})} = 0. \quad (6)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (6) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial K(r)}{\partial r} \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial r} + K(r) \left(\frac{\partial^2 p^{(\text{II})}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p^{(\text{II})}}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Полагая $p^{(\text{II})} = g(r) \cos \theta$ и $K(r) = k_0 r^2$, $k_0 > 0$ в уравнении (7), получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$r^2 \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial g(r)}{\partial r} - g(r) = 0,$$

общее решение которого записывается в виде

$$g(r) = A_1 r^{-1+\sqrt{2}} + A_2 r^{-1-\sqrt{2}}.$$

Следовательно, для давления и компонент вектора скорости в области II имеют место выражения

$$p^{(\text{II})} = (A_1 r^{-1+\sqrt{2}} + A_2 r^{-1-\sqrt{2}}) \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} v_r^{(\text{II})} &= -k_0\lambda^2[(-1 + \sqrt{2})r^{\sqrt{2}}A_1 - (1 + \sqrt{2})r^{-\sqrt{2}}A_2] \cos \theta, \\ v_\theta^{(\text{II})} &= k_0\lambda^2(r^{\sqrt{2}}A_1 + r^{-\sqrt{2}}A_2) \sin \theta. \end{aligned}$$

Решение уравнений (4) для функции тока имеет вид

$$\psi^{(\text{II})} = k_0\lambda^2[(1 - \sqrt{2})r^{1+\sqrt{2}}A_1 + (1 + \sqrt{2})r^{1-\sqrt{2}}A_2] \sin \theta.$$

Для компонент вектора скорости в областях I, III имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_r^{(\text{I})}(r, \theta) &= (B_1 + B_2r^2 + B_3/r^2 + B_4 \ln r) \cos \theta, \\ v_\theta^{(\text{I})}(r, \theta) &= -[B_1 + 3B_2r^2 - B_3/r^2 + B_4(1 + \ln r)] \sin \theta, \\ v_r^{(\text{III})}(r, \theta) &= (C_1 + C_2r^2) \cos \theta, \quad v_\theta^{(\text{III})}(r, \theta) = -(C_1 + 3C_2r^2) \sin \theta, \end{aligned}$$

для давления в областях I–III — выражения

$$p^{(\text{I})} = (8B_2r - 2B_4/r) \cos \theta, \quad p^{(\text{II})} = (A_1r^{-1+\sqrt{2}} + A_2r^{-1-\sqrt{2}}) \cos \theta, \quad p^{(\text{III})} = 8C_2r \cos \theta.$$

Краевые условия и определение произвольных констант. Ниже приводятся краевые условия, с использованием которых определяются произвольные константы $C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$.

Условия непрерывности нормальной компоненты вектора скорости на границе между областью, занятой жидкостью, и областью, занятой неоднородной пористой средой, имеют следующий вид:

$$r = R: \quad v_r^{(\text{II})} = v_r^{(\text{III})}, \quad r = 1: \quad v_r^{(\text{I})} = v_r^{(\text{II})}. \quad (8)$$

Предполагается, что на границе между областями, занятыми жидкостью и неоднородной пористой средой, нормальное напряжение в жидкости (в областях I, III) равно напряжению в области II, занятой неоднородной пористой средой [11]:

$$r = R: \quad P^{(\text{II})} = P^{(\text{III})} - 2 \frac{\partial v_r^{(\text{III})}}{\partial r}, \quad r = 1: \quad P^{(\text{II})} = P^{(\text{I})} - 2 \frac{\partial v_r^{(\text{I})}}{\partial r}. \quad (9)$$

Известно, что тангенциальная составляющая вектора скорости на границе областей, занятых жидкостью и неоднородной пористой средой, не является непрерывной [11]. Разности значений тангенциальной составляющей вектора скорости в областях III, II и в областях I, II пропорциональны скорости изменения тангенциальной составляющей в направлении внешней нормали [11]:

$$r = R: \quad v_\theta^{(\text{III})} - v_\theta^{(\text{II})} = \beta\sqrt{K(r)} \frac{\partial v_\theta^{(\text{III})}}{\partial r}, \quad r = 1: \quad v_\theta^{(\text{I})} - v_\theta^{(\text{II})} = -\beta\sqrt{K(r)} \frac{\partial v_\theta^{(\text{I})}}{\partial r} \quad (10)$$

($\beta = 0,25 \div 10,00$ — параметр разрывности [6, 7, 11]).

На поверхности гипотетической ячейки (при $r = m$)

$$v_r^{(\text{I})} = \cos \theta. \quad (11)$$

В соответствии с моделью Хаппеля [1] $\tau_{r\theta}^{(\text{I})}(m, \theta) = 0$, т. е.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{(\text{I})}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(\text{I})}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi^{(\text{I})}}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при } r = m. \quad (12)$$

В соответствии с моделью Кувабары [2] $\nabla^2 \psi^{(\text{I})}(m, \theta) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial^2 \psi^{(\text{I})}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(\text{I})}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{(\text{I})}}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{при } r = m. \quad (13)$$

В соответствии с моделью Квашнина [3]

$$\frac{\partial v_{\theta}^{(I)}}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

В соответствии с моделью Мехты — Морсе [4]

$$v_{\theta}^{(I)} = -\sin \theta. \quad (15)$$

Используя краевые условия (8)–(11) совместно с одним из краевых условий (12)–(15), получаем

$$\begin{aligned} R^{\sqrt{2}}(C_1 + R^2 C_2) + (-1 + \sqrt{2})R^{2\sqrt{2}}\lambda^2 A_1 k_0 - (1 + \sqrt{2})\lambda^2 A_2 k_0 &= 0, \\ B_1 + B_2 + B_3 + \lambda^2(-(-1 + \sqrt{2})A_1 + (1 + \sqrt{2})A_2)k_0 \cos \theta &= 0, \\ R^{2\sqrt{2}}A_1 + A_2 - 4R^{2+\sqrt{2}}C_2 = 0, \quad A_1 + A_2 - 4B_2 - 4B_3 + 4B_4 = 0, \\ R^{\sqrt{2}}C_1 - 3R^{2+\sqrt{2}}(-1 + 2\beta\sqrt{k_0})C_2 + \lambda^2 k_0 R^{2\sqrt{2}}A_1 + \lambda^2 k_0 A_2 &= 0, \\ B_1 + (3 + 6\beta\sqrt{k_0})B_2 - (1 - 2\beta\sqrt{k_0})B_3 + (1 + \beta\sqrt{k_0})B_4 + \lambda^2 k_0 A_1 + \lambda^2 k_0 A_2 &= 0, \\ m^2 B_1 + m^4 B_2 - m^2 + B_3 + m^2 \log(m) B_4 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из условия Хашпеля [1] следует

$$m^4 B_2 + B_3 = 0, \quad (17)$$

из условия Кувабары [2] следует

$$4m^2 B_2 + B_4 = 0, \quad (18)$$

из условия Квашнина [3] следует

$$6m^4 B_2 + 2B_3 + m^2 B_4 = 0, \quad (19)$$

из условия Мехты — Морсе [4] следует

$$m^2 + B_3 - m^2 B_1 - 3m^4 B_2 - m^2(1 + \log(m))B_4 = 0. \quad (20)$$

Из решения уравнений (16) совместно с одним из краевых условий (17)–(20) определяются произвольные константы и, следовательно, функции тока, скорости, напряжения и давление во всех трех областях в соответствии с четырьмя указанными выше моделями.

Выражения для констант не приводятся вследствие их громоздкости.

Результаты исследования и их обсуждение. Ниже приводятся выражения для гидродинамической силы сопротивления и гидродинамической проницаемости мембраны.

Определение гидродинамической силы сопротивления. Выражение для безразмерной гидродинамической силы сопротивления, действующей на единицу длины мембраны, состоящей из неоднородных пористых цилиндрических частиц, записывается в виде

$$F = \int_0^{2\pi} (\tau_{rr}^{(I)} \cos \theta - \tau_{r\theta}^{(I)} \sin \theta) \Big|_{r=1} d\theta, \quad (21)$$

где

$$\tau_{rr}^{(I)} = -4 \left(r B_2 + \frac{1}{r^3} B_3 - \frac{1}{r} B_4 \right) \cos \theta, \quad \tau_{r\theta}^{(I)} = -4 \left(r B_2 + \frac{1}{r^3} B_3 \right) \sin \theta. \quad (22)$$

Подставляя выражения (22) для $\tau_{rr}^{(I)}$ и $\tau_{r\theta}^{(I)}$ в (21) и выполняя интегрирование, получаем выражение для гидродинамической силы сопротивления, действующей на мембрану:

$$F = 4\pi B_4.$$

Выражение для гидродинамической силы сопротивления, действующей на мембрану, в размерной форме записывается следующим образом:

$$\tilde{F} = 4\pi\mu_1\tilde{U}\tilde{b}B_4.$$

Используя константу B_4 , можно вычислить гидродинамическую силу сопротивления, действующую на мембрану, состоящую из неоднородных пористых цилиндрических частиц, для всех четырех моделей, указанных выше.

Исследование гидродинамической проницаемости мембраны. Гидродинамическая проницаемость мембраны \tilde{L}_{11} определяется как отношение равномерно распределенной скорости течения \tilde{U} к величине \tilde{F}/\tilde{V} . Следовательно,

$$\tilde{L}_{11} = \frac{1 - R^2}{4B_4\gamma} \frac{b^2}{\mu_1} = L_{11} \frac{b^2}{\mu_1},$$

где $L_{11} = (1 - R^2)/(4B_4\gamma)$ — безразмерная гидродинамическая проницаемость мембраны.

Используя константу B_4 , можно вычислить безразмерную гидродинамическую проницаемость мембраны, состоящей из неоднородных пористых цилиндрических частиц, для всех четырех указанных выше моделей Хаппеля, Кувабары, Квашнина и Мехты — Морсе.

На рис. 2 приведена зависимость проницаемости L_{11} от коэффициента проницаемости k_0 при $\lambda = 2$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$. При использовании всех четырех моделей проницаемость L_{11} быстро увеличивается с увеличением коэффициента k_0 . Для модели Хаппеля проницаемость L_{11} наибольшая, а для модели Мехты — Морсе — наименьшая.

На рис. 3 представлена зависимость проницаемости L_{11} от объемной доли частиц γ при $k_0 = 0,01$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 0,5$, $\delta = 0,5$. Проницаемость L_{11} быстро уменьшается с увеличением параметра γ , но в отличие от случая среды с постоянной проницаемостью при $\gamma \geq 0,6$ для всех четырех моделей она практически не меняется с увеличением γ , поскольку при этом увеличивается доля твердой фазы и уменьшается пористость. Так же как и в случае среды с постоянной пористостью, наименьшая проницаемость имеет

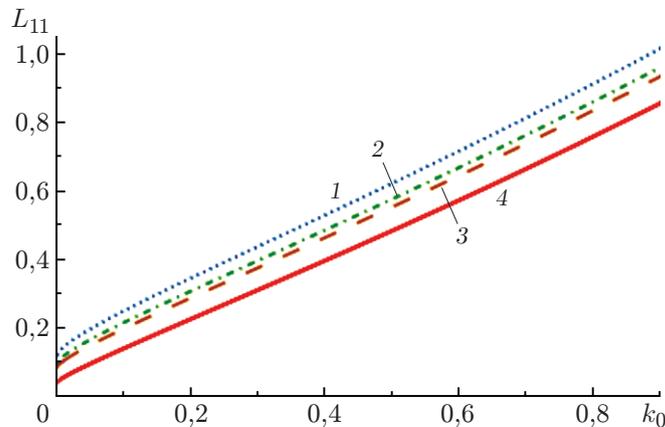


Рис. 2. Зависимость гидродинамической проницаемости от коэффициента проницаемости k_0 при $\lambda = 2$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$:

1 — модель Хаппеля, 2 — модель Квашнина, 3 — модель Кувабары, 4 — модель Мехты — Морсе

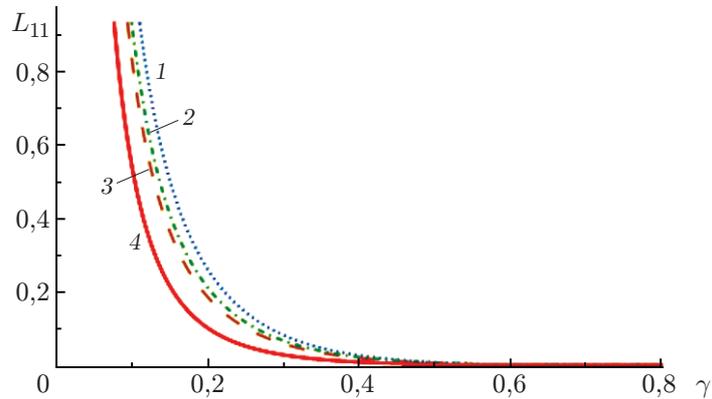


Рис. 3. Зависимость гидродинамической проницаемости от объемной доли частиц γ при $k_0 = 0,01$, $\beta = 0,5$, $\lambda = 0,5$, $\delta = 0,5$:

1 — модель Хаппеля, 2 — модель Квашнина, 3 — модель Кувабары, 4 — модель Мехты — Морсе

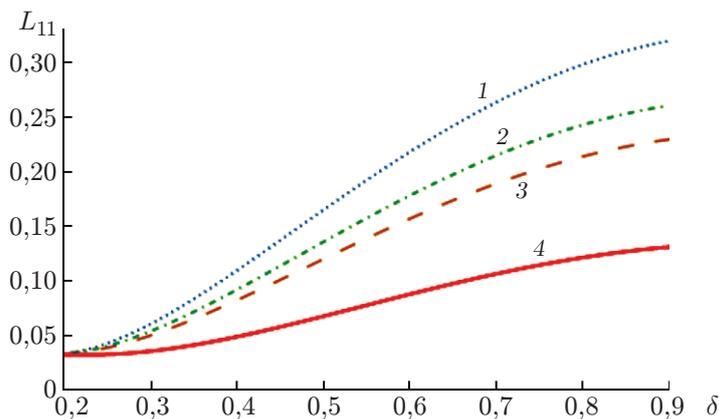


Рис. 4. Зависимость гидродинамической проницаемости от толщины пористой оболочки δ при $k_0 = 0,03$, $\gamma = 0,25$, $\lambda = 0,5$, $\beta = 0,5$:

1 — модель Хаппеля, 2 — модель Квашнина, 3 — модель Кувабары, 4 — модель Мехты — Морсе

место при использовании модели Мехты — Морсе, причем она существенно отличается от проницаемости для других моделей, что обусловлено большей диссипацией энергии при наличии однородного течения на поверхности ячейки. Наибольшая проницаемость мембраны имеет место при использовании модели Хаппеля, что обусловлено отсутствием трения на поверхности ячейки и, следовательно, наименьшей диссипацией энергии.

На рис. 4 показана зависимость безразмерной проницаемости мембраны L_{11} от толщины пористой оболочки δ при $k_0 = 0,03$, $\gamma = 0,25$, $\lambda = 0,5$, $\beta = 0,5$. Видно, что проницаемость мембраны L_{11} увеличивается с увеличением толщины пористой оболочки δ , поскольку в этом случае увеличивается глубина проникания жидкости в пористый слой. Однако при достаточно больших значениях δ происходит насыщение, поэтому скорость увеличения проницаемости мембраны постепенно уменьшается.

На рис. 5 приведена зависимость гидродинамической проницаемости мембраны от параметра вязкости λ при $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$, $\beta = 0,5$. Из рис. 5 следует, что безразмерную проницаемость мембраны можно увеличить за счет увеличения безразмерного параметра вязкости. С увеличением вязкости пористого слоя уменьшается проницаемость мембраны.

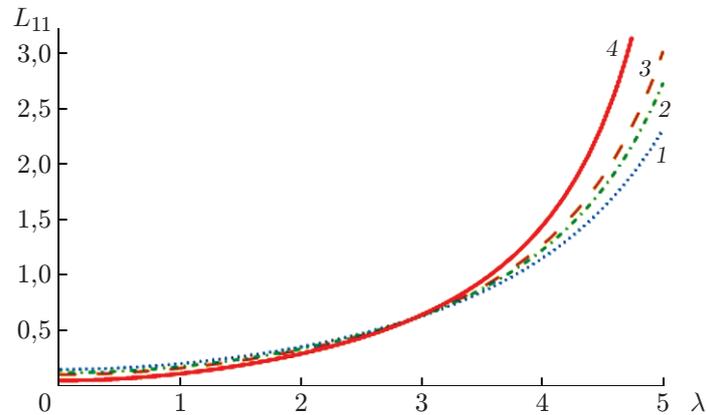


Рис. 5. Зависимость гидродинамической проницаемости от параметра вязкости λ при $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$, $\beta = 0,5$:

1 — модель Хашпеля, 2 — модель Квашнина, 3 — модель Кувабары, 4 — модель Мехты — Морсе

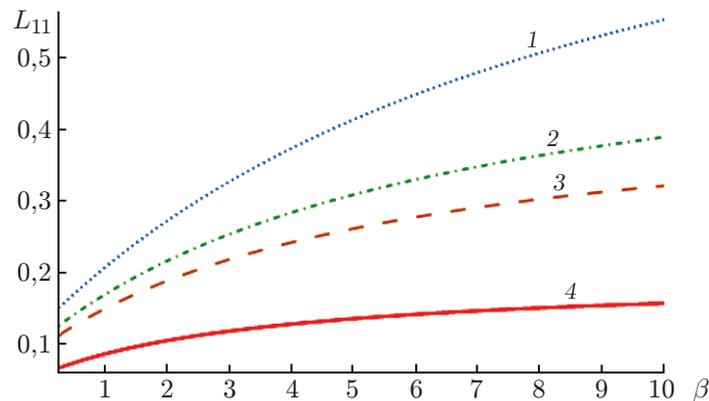


Рис. 6. Зависимость гидродинамической проницаемости от параметра разрывности β при $k_0 = 0,01$, $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$, $\lambda = 0,5$:

1 — модель Хашпеля, 2 — модель Квашнина, 3 — модель Кувабары, 4 — модель Мехты — Морсе

Наличие пологих участков на кривых при малых значениях λ означает, что при достаточно большой вязкости пористой среды течение через пористый слой практически отсутствует и, следовательно, проницаемость мембраны изменяется незначительно. Скорость увеличения гидродинамической проницаемости увеличивается с увеличением параметра вязкости.

На рис. 6 представлена зависимость безразмерной гидродинамической проницаемости от параметра разрывности β при $k_0 = 0,01$, $\gamma = 0,25$, $\delta = 0,5$, $\lambda = 0,5$. С увеличением параметра β уменьшается скорость протекания жидкости через поверхность раздела и, следовательно, увеличивается гидродинамическая проницаемость.

Для всех четырех моделей ячейки с увеличением потерь скорости на поверхности раздела двух сред скорость увеличения проницаемости мембраны уменьшается. Однако в случае большой диссипации на поверхности раздела (в случае условия Мехты — Морсе) проницаемость мембраны слабо зависит от потерь скорости на границе раздела и, следовательно, от импульса потока.

Верификация результатов. Для верификации результатов ниже рассматриваются некоторые предельные случаи полученного решения.

Оценка гидродинамической проницаемости мембраны, состоящей из неоднородных пористых частиц. При $R \rightarrow 0$, $\lambda = 1$ задача сводится к задаче о течении Стокса через мембрану, состоящую из неоднородных пористых цилиндрических частиц. В этом случае выражения для гидродинамической проницаемости имеют следующий вид:

— в модели Хаппеля

$$L_{11} = m^2 \{1 - m^4 + 2(1 + m^4) \log(m) + \beta[-1 + m^4 + 2(-3 + m^4) \log(m)] \sqrt{k_0} + \\ + 4[-5 + 4\sqrt{2} + m^4 + (-2 + \sqrt{2})(-1 + m^4) \log(m)] k_0 + 4(-1 + \sqrt{2})(-7 + 3m^4) \beta k_0^{3/2}\} / \\ / \{8[1 + m^4 + (-3 + m^4) \beta \sqrt{k_0} + 2(-2 + \sqrt{2})(-1 + m^4) k_0]\}; \quad (23)$$

— в модели Кувабары

$$L_{11} = \{-1 + 4m^2 - 3m^4 + 4m^4 \log(m) + \beta(3 - 4m^2 + m^4 + 4m^4 \log(m)) \sqrt{k_0} + \\ + 2[-2 + \sqrt{2} + 4(-3 + 2\sqrt{2})m^2 - (-6 + \sqrt{2})m^4 + 4(-2 + \sqrt{2})m^4 \log(m)] k_0 + \\ + 8(-1 + \sqrt{2})m^2(-1 + 3m^2) \beta k_0^{3/2}\} / \{16m^2[1 + \beta \sqrt{k_0} + 2(-2 + \sqrt{2})k_0]\}; \quad (24)$$

— в модели Квашнина

$$L_{11} = m^2 \{2m^2 - 2m^4 + \log(m) + 3m^4 \log(m) + \beta[(-1 + m^2)^2 + 3(-1 + m^4) \log(m)] \sqrt{k_0} + \\ + [-12 + 9\sqrt{2} + 4(-3 + 2\sqrt{2})m^2 - (-8 + \sqrt{2})m^4 + 2(-2 + \sqrt{2})(-1 + 3m^4) \log(m)] k_0 + \\ + 2(-1 + \sqrt{2})(-7 - 2m^2 + 9m^4) \beta k_0^{3/2}\} / \\ / \{4[1 + 3m^4 + 3(-1 + m^4) \beta \sqrt{k_0} + 2(-2 + \sqrt{2})(-1 + 3m^4) k_0]\}; \quad (25)$$

— в модели Мехты — Морсе

$$L_{11} = m^2 \{(-1 + m^2)[1 - m^2 + (1 + m^2) \log(m)] + \beta[2 - 2m^2 + (3 + m^4) \log(m)] \sqrt{k_0} + \\ + [-(-1 + m^2)(8 - 7\sqrt{2} + (-4 + \sqrt{2})m^2) + 2(-2 + \sqrt{2})(1 + m^4) \log(m)] k_0 + \\ + 2(-1 + \sqrt{2})(7 - 2m^2 + 3m^4) \beta k_0^{3/2}\} / \\ / \{4[-1 + m^4 + (3 + m^4) \beta \sqrt{k_0} + 2(-2 + \sqrt{2})(1 + m^4) k_0]\}. \quad (26)$$

Выражения (23)–(26) согласуются с полученными в работе [28].

Оценка гидродинамической проницаемости мембраны, состоящей из жестких цилиндрических частиц. При $R \rightarrow 0$, $k_0 \rightarrow 0$ задача сводится к задаче о течении Стокса через мембрану, состоящую из жестких цилиндрических частиц. В этом случае выражения для гидродинамической проницаемости имеют следующий вид:

— в модели Хаппеля

$$L_{11} = [-(\ln \gamma + 1) + 2\gamma^2/(1 + \gamma^2)]/(8\gamma); \quad (27)$$

— в модели Кувабары

$$L_{11} = (-\ln \gamma - 3/2 + 2\gamma - \gamma^2/2)/(8\gamma); \quad (28)$$

— в модели Квашнина

$$L_{11} = \{2(\gamma - 1) - [(3 + \gamma^2)/2] \log \gamma\} / [4\gamma(3 + \gamma^2)]; \quad (29)$$

— в модели Мехты — Морсе

$$L_{11} = \{\gamma - 1 - [(1 + \gamma)/2] \log \gamma\} / [4\gamma(1 + \gamma)]. \quad (30)$$

Выражения (27)–(30) согласуются с полученными в работах [17, 29].

Заключение. Для четырех ячеечных моделей исследовано влияние параметров вязкости, проницаемости и разрывности на безразмерную гидродинамическую проницаемость мембраны, состоящей из неоднородных пористых цилиндрических частиц ячейки. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Гидродинамическая проницаемость мембраны, состоящей из неоднородных пористых цилиндрических частиц, может быть увеличена за счет увеличения параметра проницаемости, толщины порового слоя, параметра разрывности и параметра вязкости.

Гидродинамическая проницаемость мембраны может быть уменьшена за счет увеличения объемной доли частиц.

Величина гидродинамической проницаемости L_{11} мембраны, состоящей из неоднородных пористых цилиндрических частиц с полостью, является наибольшей в модели Хаппеля. В модели Мехты — Морсе величина L_{11} имеет наименьшее значение во всем исследованном диапазоне значений параметра вязкости λ , за исключением области больших значений $\lambda > 3$. При $\lambda > 3$ наименьшее значение L_{11} дает модель Хаппеля.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении гидродинамики микрокапсул (пористых оболочек, содержащих твердые частицы или жидкость), а также изделий из них [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Happel J.** Viscous flow relative to array of cylinders // *AIChE J.* 1959. V. 5, N 2. P. 174–177.
2. **Kuwabara S.** The force experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynold number // *J. Phys. Soc. Japan.* 1959. V. 14. P. 527–532.
3. **Kvashnin A. G.** Cell model of suspension of spherical particles // *Fluid Dynamics.* 1980. V. 14, N 4. P. 598–602.
4. **Mehta G. D., Morse T. F.** Flow through charged membranes // *J. Chem. Phys.* 1974. V. 63, N 5. P. 1878–1889.
5. **Joseph D. D., Tao L. N.** The effect of permeability on the slow motion of a porous sphere in a viscous liquid // *Z. angew. Math. Mech.* 1964. Bd 44, N 8/9. S. 361–364.
6. **Beavers G. S., Joseph D. D.** Boundary conditions at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 30, N 1. P. 197–207.
7. **Raja Sekhar G. P., Amaranath T.** Stokes flow inside a porous spherical shell // *Z. angew. Math. Mech.* 2000. Bd 51, N 3. S. 481–490.
8. **Deo S.** Stokes flow past a swarm of porous circular cylinders with Happel and Kuwabara boundary conditions // *Sadhana.* 2004. V. 29, N 3. P. 381–387.
9. **Filippov A. N., Khanukaeva D. Y., Vasin S. I., et al.** Liquid flow inside a cylindrical capillary with walls covered with a porous layer (gel) // *Colloid J.* 2013. V. 75, N 2. P. 214–225.
10. **Singh M. P., Gupta J. L.** The flow of a viscous fluid past an inhomogeneous porous cylinder // *Z. angew. Math. Mech.* 1971. Bd 51, N 1. S. 17–25.
11. **Chernyshev I. V.** The Stokes problem for a porous particle with radially non-uniform porosity // *Fluid Dynamics.* 2000. V. 35, N 1. P. 147–152.
12. **Palaniappan D., Archana K.** Two-dimensional creeping flows with permeable cylinders // *Z. angew. Math. Mech.* 1997. Bd 77, N 10. S. 791–796.

13. **Noymer P. D., Glicksman L. R., Devendran A.** Drag on a permeable cylinder in steady flow at moderate Reynolds numbers // Chem. Engng Sci. 1998. V. 53, N 16. P. 2859–2869.
14. **Deo S., Yadav P. K.** Stokes flow past a swarm of porous nanocylindrical particles enclosing a solid core // Intern. J. Math. Math. Sci. 2008. V. 2008. P. 1–8.
15. **Deo S., Yadav P. K., Tiwari A.** Slow viscous flow through a membrane built up from porous cylindrical particles with an impermeable core // Appl. Math. Modelling. 2010. V. 34, N 5. P. 1329–1343.
16. **Vasin S. I., Kharitonova T. V.** Flow of liquid around the encapsulated drop of another liquid // Colloid J. 2011. V. 73, N 3. P. 297–302.
17. **Yadav P. K.** Slow motion of a porous cylindrical shell in a concentric cylindrical cavity // Meccanica. 2013. V. 48, N 7. P. 1607–1622.
18. **Filippov A. N., Vasin S. I., Starov V. M.** Mathematical modeling of the hydrodynamic permeability of a membrane built up from porous particles with a permeable shell // Colloids Surfaces A: Physicochem. Engng Aspects. 2006. V. 282/283. P. 272–278.
19. **Yadav P. K., Tiwari A., Deo S., et al.** Hydrodynamic permeability of biporous membrane // Colloid J. 2013. V. 75, N 4. P. 473–482.
20. **Stechkina I. B.** Drag of porous cylinders in a viscous fluid at low Reynolds numbers // Fluid Dynamics. 1979. V. 14, N 6. P. 912–915.
21. **Kohr M., Prakash J., Raja Sekhar G. P., Wendland W. L.** Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a porous circular cylinder // Appl. Anal. 2009. V. 88, N 7. P. 1093–1114.
22. **Valipour M. S., Rashidi S., Bovand M., Masoodi R.** Numerical modeling of flow around and through a porous cylinder with diamond cross section // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2014. V. 46. P. 74–81.
23. **Vasin S. I., Filippov A. N.** Hydrodynamic permeability of the membrane as a system of rigid particles covered with porous layer (cell model) // Kolloidn. Zh. 2004. V. 66, N 3. P. 305–309.
24. **Skirtach A. G., Antipov A. A., Shchukin D. G., Sukhorukov G. B.** Remote activation of capsules containing Ag nanoparticles and IR dye by laser light // Langmuir. 2004. V. 20, N 17. P. 6988–6992.
25. **Higdon J. J. L., Kojima M.** On the calculation of Stokes' flow past porous particles // Intern. J. Multiphase Flow. 1981. V. 7, N 6. P. 719–727.
26. **Auriault J. L.** On the domain of validity of Brinkman's equation // Transport Porous Media. 2009. V. 79. P. 215–223.
27. **Veerapaneni S., Wiesner M. R.** Hydrodynamics of fractal aggregates with radially varying permeability // J. Colloid Interface Sci. 1996. V. 177, N 1. P. 45–57.
28. **Tiwari A., Yadav P. K., Singh P.** Stokes flow through assemblage of non-homogeneous porous cylindrical particles using cell model technique // Nat. Acad. Sci. Lett. 2018. V. 41, N 1. P. 53–57.
29. **Deo S., Filippov A. N., Tiwari A., et al.** Hydrodynamic permeability of aggregates of porous particles with an impermeable core // Adv. Colloid Interface Sci. 2011. V. 164. P. 21–27.

*Поступила в редакцию 22/XI 2018 г.,
после доработки — 6/IV 2019 г.
Принята к публикации 29/IV 2019 г.*