УДК 532.591+517.958

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ВИХРЕВОЙ ЖИДКОСТИ ПОД КРЫШКОЙ

А. А. Чесноков

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассмотрена математическая модель вихревого движения идеальной двухслойной жидкости в узком прямом канале. Движение жидкости в эйлерово-лагранжевой системе координат описывается квазилинейными интегродифференциальными уравнениями. Найдены преобразования системы уравнений движения, в результате которых стало возможным применение общего метода исследования интегродифференциальных уравнений теории длинных волн, основанного на обобщении понятий характеристик и гиперболичности для систем с операторными коэффициентами. Получено и исследовано характеристическое уравнение. Сформулированы необходимые условия гиперболичности системы уравнений движения для течений с монотонным по глубине профилем скорости. Показано, что вопрос о получении достаточных условий гиперболичности эквивалентен решению некоторого сингулярного интегрального уравнения. Отдельно рассмотрен случай сильного скачка плотности (в нижнем слое тяжелая жидкость, а в верхнем достаточно легкая). Проведено моделирование, в результате которого система уравнений движения упростилась, но не потеряла физического смысла. Для этой системы даны необходимые и достаточные условия гиперболичности.

1. Вывод системы уравнений движения. Решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}
u_T + uu_X + vu_Y + \rho_1^{-1} p_X = 0, \quad \varepsilon^2(v_T + uv_X + vv_Y) + \rho_1^{-1} p_Y = -1, \quad 0 \leqslant Y \leqslant h, \\
u_T + uu_X + vu_Y + \rho_2^{-1} p_X = 0, \quad \varepsilon^2(v_T + uv_X + vv_Y) + \rho_2^{-1} p_Y = -1, \quad h \leqslant Y \leqslant 1, \\
u_X + v_Y = 0, \quad -\infty < X < \infty, \quad h_T + u^{\pm}(T, X, h) h_X = v^{\pm}(T, X, h), \\
v(T, X, 0) = v(T, X, 1) = 0, \quad u(0, X, Y) = u_0(X, Y), \quad h(0, X) = h_0(X)
\end{gathered} \tag{1.1}$$

описывает плоскопараллельные движения идеальной двухслойной жидкости в канале со стенками $Y = 0$ и $Y = 1$ в поле силы тяжести. Переменные $u^1 = (gH_0)^{1/2} u$, $v^1 = (gH_0)^{1/2} H_0 L_0^{-1} v$, $\rho_i^1 = R_0 \rho_i$ ($i = 1, 2$), $p^1 = R_0 g H_0 p$, $T^1 = L_0 (gH_0)^{-1/2} T$, $X^1 = L_0 X$, $Y^1 = H_0 Y$ — размерные компоненты вектора скорости, плотность, давление, время и декартовы координаты; u, v, ρ_i, p, T, X, Y — соответствующие им безразмерные величины. Параметр L_0 определяет характерный горизонтальный масштаб, H_0 — глубина канала, g — ускорение свободного падения, R_0 имеет размерность плотности, $h(T, X)$ — линия раздела жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($0 \leqslant h \leqslant 1$). Заданные функции u_0, h_0 ($0 \leqslant h_0 \leqslant 1$) определены при $0 \leqslant Y \leqslant 1$, $-\infty < X < \infty$. Величины $f^+(h)$ ($f^-(h)$) — пределы функции $f(Y)$ при стремлении Y к h, так что $Y \geqslant h$ ($Y \leqslant h$).

В приближении узкого канала параметр $\varepsilon = H_0 L_0^{-1}$ считается малым, и членами порядка ε^2 в уравнениях (1.1) пренебрегают. Вследствие этого давление распределено гидростатично и может быть представлено в виде

$$p(T, X, Y) = \rho_1(h - Y) + \rho_2(1 - h) + p^*(T, X) \qquad (0 \leqslant Y \leqslant h(T, X)),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859).

$$p(T,X,Y) = \rho_2(1-Y) + p^*(T,X) \qquad (h(T,X) \leqslant Y \leqslant 1), \tag{1.2}$$

где $p^*(T,X)$ — безразмерное давление на верхней границе канала. Интегрирование уравнения неразрывности с учетом краевых условий дает

$$v = -\int\limits_0^Y u_X\,dY \quad (0 \leqslant Y \leqslant h), \qquad v = -\int\limits_1^Y u_X\,dY \quad (h \leqslant Y \leqslant 1).$$

Обозначим через $[f] = f^+(h) - f^-(h)$ скачок функции f при переходе через линию $Y = h(T,X)$. Из уравнений (1.1) следует, что $[u_n] = 0$ ($u_n = -u(h)h_X + v(h)$ — нормальная составляющая вектора скорости). Рассмотрим течения, в которых $[u_n] = 0$, $[p] = 0$, а $[\rho]$ и, возможно, $[u_\sigma]$ (касательная составляющая вектора скорости) не равны нулю. Используя представление функции v, условие $[u_n] = 0$ можно записать как

$$\Big(\int\limits_0^h u\,dY + \int\limits_h^1 u\,dY\Big)_X = 0.$$

После преобразований возникает задача для нахождения u, p^*, h:

$$\rho_1(u_T + uu_X + vu_Y) + (\rho_1 - \rho_2)h_X + p^*_X = 0 \qquad (0 \leqslant Y \leqslant h(T,X)),$$

$$\rho_2(u_T + uu_X + vu_Y) + p^*_X = 0 \quad (h(T,X) \leqslant Y \leqslant 1), \qquad h_T + \Big(\int\limits_0^h u\,dY\Big)_X = 0, \tag{1.3}$$

$$\Big(\int\limits_0^h u\,dY + \int\limits_h^1 u\,dY\Big)_X = 0, \quad u(0,X,Y) = u_0(X,Y), \quad h(0,X) = h_0(X)$$

(функции p и v определены выше). В этой модели отсутствие завихренности эквивалентно условию $u_Y = 0$. Рассмотрим вихревые течения с монотонным по глубине профилем скорости. Пусть для определенности $u_Y > 0$ в каждом слое.

Перейдем к эйлерово-лагранжевой системе координат x, λ [1]

$$T = t, \quad X = x, \quad Y = \Phi(t,x,\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{1.4}$$

где $\Phi(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши,

$$\Phi_t + u(t,x,\Phi)\Phi_x = v(t,x,\Phi), \qquad \Phi(0,x,\lambda) = \Phi_0(x,\lambda). \tag{1.5}$$

Функция Φ_0 при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$ и $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$ задается формулами $\Phi_0(x,\lambda) = 2\lambda h_0(x)$, $\Phi_0(x,\lambda) = 2(1-\lambda)h_0(x) + 2(\lambda - 1/2)$. Линия $Y = h(T,X)$ переходит в прямую $\lambda = 1/2$, а функция $\Phi(t,x,\lambda)$ при $\lambda = 0$; $1/2$; 1 принимает значения 0, $h(T,X)$ и 1 соответственно. В силу (1.2)–(1.4) для определения функций $u(t,x,\lambda)$, $h(t,x)$ и $H(t,x,\lambda) = \Phi_\lambda$ получим систему

$$\rho_1(u_t + uu_x) + (\rho_1 - \rho_2)h_x - \rho_2(u_{1t} + u_1u_{1x}) = 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2),$$

$$u_t + uu_x - (u_{1t} + u_1u_{1x}) = 0 \quad (1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1), \qquad H_t + (uH)_x = 0, \quad \int\limits_0^{1/2} H\,d\lambda = h(t,x), \tag{1.6}$$

$$\int\limits_{1/2}^1 H\,d\lambda = 1 - h(t,x), \qquad u(0,x,\lambda) = u_0(x,\Phi_0(x,\lambda)), \qquad H(0,x,\lambda) = \Phi_{0\lambda}(x,\lambda)$$

($u_1 = u(t,x,1)$, $p_x^* = -\rho_2(u_{1t} + u_1u_{1x})$; поскольку давление p_x^* не зависит от λ, оно может быть выражено через скорость u и ее производные при фиксированном λ). Замена переменных (1.4) обратима при условии $\Phi_\lambda \neq 0$. Полагаем, что $\Phi_\lambda > 0$.

Рассмотрим течения, в которых $u^+(t,x,1/2) > u^-(t,x,1/2)$. Для дальнейшего преобразования уравнений движения перейдем от функций $u(t,x,\lambda)$, $H(t,x,\lambda)$, $h(t,x)$ к новым искомым величинам

$$u_\lambda,\ \theta = Hu_\lambda^{-1}, \qquad w(t,x) = \rho_1 u^-(t,x,1/2) - \rho_2 u^+(t,x,1/2)$$

(переменная θ обратно пропорциональна завихренности со знаком «$-$»), используя соотношение

$$\int\limits_0^{1/2} uH\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1} uH\,d\lambda = Q(t). \tag{1.7}$$

Пусть функция $Q(t)$ задана. Тогда от уравнений (1.6) можно перейти к системе

$$\begin{gathered} u_{\lambda t} + uu_{\lambda x} + u_\lambda u_x = 0, \qquad \theta_t + u\theta_x = 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \\ w_t + \rho_1^{-1}(w + \rho_2 q)w_x + \rho_1^{-1}\rho_2(w - (\rho_1 - \rho_2)q)q_x + (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_0^{1/2}(u_{\lambda x}\theta + u_\lambda\theta_x)\,d\lambda = 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где функции $u(t,x,\lambda)$, $q(t,x) = u^+(t,x,1/2)$, u_x, q_x, согласно (1.7), выражены формулами

$$u = \rho_1^{-1}(w + \rho_2 q) - \int\limits_\lambda^{1/2} u_\nu\,d\nu, \quad u_x = \rho_1^{-1}(w_x + \rho_2 q_x) - \int\limits_\lambda^{1/2} u_{\nu x}\,d\nu \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2),$$

$$u = q + \int\limits_{1/2}^{\lambda} u_\nu\,d\nu, \quad u_x = q_x + \int\limits_{1/2}^{\lambda} u_{\nu x}\,d\nu \qquad (1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

$$\begin{aligned} q = \Big(\rho_1^{-1}\rho_2 \int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1} u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)^{-1}\Big[Q(t) + \int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\Big(\int\limits_\lambda^{1/2} u_\nu\,d\nu\Big)\,d\lambda - \\ -\rho_1^{-1}w\int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda - \int\limits_{1/2}^{1} u_\lambda\Big(\int\limits_\lambda^{1} u_\nu\theta\,d\nu\Big)\,d\lambda\Big], \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} q_x = \Big(\rho_1^{-1}\rho_2 \int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1} u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)^{-1}\Big[- q\Big(\rho_1^{-1}\rho_2\int\limits_0^{1/2}(u_\lambda\theta)_x\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1}(u_\lambda\theta)_x\,d\lambda\Big) + \\ + \int\limits_0^{1/2}\Big(u_\lambda\theta\Big(\int\limits_\lambda^{1/2} u_\nu\,d\nu\Big)\Big)_x\,d\lambda - \rho_1^{-1}\Big(w\int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)_x - \int\limits_{1/2}^{1}\Big(u_\lambda\Big(\int\limits_\lambda^{1} u_\nu\theta\,d\nu\Big)\Big)_x\,d\lambda\Big]. \end{aligned}$$

Начальные условия для системы уравнений (1.8) имеют вид

$$u_\lambda(0,x,\lambda) = u_{0\lambda}, \quad \theta(0,x,\lambda) = \Phi_{0\lambda}/u_{0\lambda}, \quad w(0,x) = \rho_1 u_0^+(x,h_0(x)) - \rho_2 u_0^-(x,h_0(x)).$$

Если функции u_λ, θ и w найдены, то известны $H = u_\lambda\theta$, линия раздела жидкостей $h(t,x) = \int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda$ и в силу (1.9) u. Интегрирование величины $u_\lambda\theta$ от 0 до 1 дает полную глубину (верхнюю границу) канала. Начальные данные таковы, что при $t = 0$ глубина канала равна 1. Это значение сохранится во все моменты времени, так как

$$\Big(\int\limits_0^{1/2} u_\lambda\theta\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1} u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)_t = -\Big(\int\limits_0^{1/2} uu_\lambda\theta\,d\lambda + \int\limits_{1/2}^{1} uu_\lambda\theta\,d\lambda\Big)_x = -(Q(t))_x = 0.$$

Формулы $p_{\lambda}^* = -\rho_2(u_{1t} + u_1u_{1x})$, (1.2), $\Phi_\lambda = H$, (1.4) и (1.5) позволяют найти давление (с точностью до произвольной функции от t), Φ и вертикальную компоненту вектора скорости v. Преобразованиями система уравнений (1.1) сведена к задаче (1.8), исследование свойств гиперболичности которой можно проводить методами [2].

2. Характеристические свойства уравнений (1.8). Выводится характеристическое уравнение и формулируются необходимые условия гиперболичности. Вопрос о получении достаточных условий сведен к решению сингулярного интегрального уравнения.

Система (1.8) допускает запись

$$\boldsymbol{U}_t + A\boldsymbol{U}_x = 0, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{U} = (u_\lambda, \theta, w)^{\mathrm{T}}$; A — матрица с операторными коэффициентами, которая возникает при подстановке (1.9) в уравнения (1.8) и действует на вектор-функцию $\boldsymbol{f}$ по правилу

$$A\boldsymbol{f} = \Big(uf_1 - u_\lambda\int\limits_\lambda^{1/2} f_1\,d\nu + u_\lambda(\rho_1^{-1}f_3 + \rho_1^{-1}\rho_2N)s(1/2-\lambda) +$$
$$+ u_\lambda Ns(\lambda - 1/2), uf_2, \rho_1^{-1}(w + \rho_2q)f_3 +$$
$$+ \rho_1^{-1}\rho_2(w - (\rho_1 - \rho_2)q)N + (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_0^{1/2}(f_1\theta + u_\lambda f_2)\,d\lambda\Big)^{\mathrm{T}}.$$

В этом выражении $s(\lambda)$ — ступенчатая функция, равная 0 при $\lambda < 0$ и 1 при $\lambda > 0$, а N имеет вид

$$N = ((\rho_1^{-1}\rho_2 - 1)h + 1)^{-1}\Big[\int\limits_0^{1/2}\theta\Big(u\int\limits_\lambda^{1/2} f_1\,d\nu\Big)_\lambda d\lambda - \int\limits_{1/2}^{1} f_1\Big(\int\limits_\lambda^{1} u_\nu\theta\,d\nu\Big)d\lambda -$$
$$- \int\limits_{1/2}^{1} u\theta f_1\,d\lambda - \int\limits_0^{1/2} uu_\lambda f_2\,d\lambda - \int\limits_{1/2}^{1} uu_\lambda f_2\,d\lambda - \rho_1^{-1}hf_3\Big].$$

Согласно [2] характеристика системы (2.1) определяется дифференциальным уравнением $x'(t) = k(t,x)$ (k — собственное значение оператора A^*). Решение уравнения

$$(\boldsymbol{F}, (A - kI)\boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{2.2}$$

относительно векторного функционала $\boldsymbol{F} = (F_1^{\mp}, F_2^{\mp}, F_3)$, действующего по переменной λ на произвольную бесконечно дифференцируемую вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{\mathrm{T}}$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$ и $\boldsymbol{\varphi} = (\psi_1, \psi_2, \varphi_3)^{\mathrm{T}}$ при $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (функции φ_i и ψ_i ($i = 1, 2$) при $\lambda = 1/2$ имеют различные значения, φ_3 от λ не зависит, зависимость от t, x как от параметров), ищется в классе обобщенных либо локально интегрируемых функций. Выражение $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}) = (F_1^-, \varphi_1) + (F_2^-, \varphi_2) + (F_1^+, \psi_1) + (F_2^+, \psi_2) + (F_3, \varphi_3)$ обозначает результат действия функционала $\boldsymbol{F}$ на пробную вектор-функцию. Считаем функции u_λ, θ бесконечно дифференцируемыми по λ в каждом слое. Действие функционала $\boldsymbol{F}$ на уравнение (2.1) дает соотношение на характеристике

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}_t + k\boldsymbol{U}_x) = 0. \tag{2.3}$$

Система гиперболична, если все собственные числа k вещественные и совокупность соотношений на характеристиках (2.3) эквивалентна уравнениям (2.1).

Из уравнений (2.2) с учетом независимости компонент пробной вектор-функции получаем равенства

$$\Big(F_1^-,(u-k)\varphi_1-u_\lambda\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi_1\,d\nu\Big)+M\int\limits_0^{1/2}\theta\Big(u\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi_1\,d\nu\Big)_\lambda d\lambda+(\rho_1-\rho_2)(F_3,1)\int\limits_0^{1/2}\theta\varphi_1\,d\lambda=0; \quad (2.4)$$

$$\Big(F_1^+,(u-k)\psi_1+u_\lambda\int\limits_{1/2}^{\lambda}\psi_1\,d\nu\Big)-M\Big[\int\limits_{1/2}^{1}\psi_1\Big(\int\limits_\lambda^{1}u_\nu\theta\,d\nu\Big)d\lambda+\int\limits_{1/2}^{1}u\theta\psi_1\,d\lambda\Big]=0; \quad (2.5)$$

$$(F_2^-,(u-k)\varphi_2)-M\int\limits_0^{1/2}uu_\lambda\varphi_2\,d\lambda+(\rho_1-\rho_2)(F_3,1)\int\limits_0^{1/2}u_\lambda\varphi_2\,d\lambda=0; \quad (2.6)$$

$$(F_2^+,(u-k)\psi_2)-M\int\limits_{1/2}^{1}uu_\lambda\psi_2\,d\lambda=0; \quad (2.7)$$

$$-hM\varphi_3+[(F_1^-,u_\lambda)+(w+\rho_2q-\rho_1k)(F_3,1)]\varphi_3=0, \quad (2.8)$$

в которых $M=((\rho_1^{-1}\rho_2-1)h+1)^{-1}[\rho_1^{-1}\rho_2(F_1^-,u_\lambda)+(F_1^+,u_\lambda)+\rho_1^{-1}\rho_2(w-\rho_1q+\rho_2q)(F_3,1)]$.

Рассмотрим множество чисел k, принадлежащих комплексной плоскости, за исключением отрезков $[u_0,u_{1/2}^-]$ и $[u_{1/2}^+,u_1]$. Выразим величину $(F_3,1)$ из уравнения (2.8):

$$(F_3,1)=(h(F_1^+,u_\lambda)-(1-h)(F_1^-,u_\lambda))K, \quad (2.8')$$

где $K=[(1-h)(w+\rho_2q-\rho_1k)+\rho_2h(q-k)]^{-1}$. С использованием (2.8′) и функций

$$\varphi=\Big[(u-k)\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi_1\,d\nu\Big]_\lambda,\qquad \psi=\Big[(u-k)\int\limits_{1/2}^{\lambda}\psi_1\,d\nu\Big]_\lambda$$

приведем выражения (2.4) и (2.5) к виду

$$(F_1^-,\varphi)=-K\Big[(\rho_2(q-k)(F_1^-,u_\lambda)+(w+\rho_2q-\rho_1k)(F_1^+,u_\lambda))\int\limits_0^{1/2}\theta\Big(u(u-k)^{-1}\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi\,d\nu\Big)_\lambda d\lambda+$$

$$+(\rho_1-\rho_2)((1-h)(F_1^-,u_\lambda)-h(F_1^+,u_\lambda))\int\limits_0^{1/2}\theta\Big((u-k)^{-1}\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi\,d\nu\Big)_\lambda d\lambda\Big]; \quad (2.4')$$

$$(F_1^+,\psi)=K\Big[(\rho_2(q-k)(F_1^-,u_\lambda)+(w+\rho_2q-\rho_1k)(F_1^+,u_\lambda))\int\limits_{1/2}^{1}\theta\Big(u(u-k)^{-1}\int\limits_{1/2}^{\lambda}\psi\,d\nu\Big)_\lambda d\lambda\Big]. \quad (2.5')$$

Полагая в формулах (2.4′), (2.5′) $\varphi=u_\lambda$, $\psi=u_\lambda$ и приравнивая к нулю определитель линейной однородной относительно $(F_1^-,\ u_\lambda)$, $(F_1^+,\ u_\lambda)$ системы, получаем характеристическое уравнение

$$k\Big[\rho_2\int\limits_0^{1/2}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda+\rho_1\int\limits_{1/2}^{1}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda-$$

$$-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_0^{1/2}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda\int\limits_{1/2}^{1}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda\Big]=0, \qquad (2.9)$$

определяющее дискретный спектр оператора A^*. Выражение в квадратных скобках в формуле (2.9) обозначим через $\chi(k)$.

Замечание 1. Характеристическое уравнение (2.9) (без сомножителя k) можно получить исходя из уравнений (1.6) и того, что на характеристиках производные от искомых функций по нормали $\partial_n = k(t,x)\partial_t - \partial_x$ не выражаются через производные по касательной $\partial_\sigma = \partial_t + k(t,x)\partial_x$.

Характеристическое уравнение (2.9) $k\chi(k) = 0$ при $\rho_1 < \rho_2$ имеет единственный вещественный корень $k = 0$, так как $u_\lambda\theta = H = \Phi_\lambda > 0$ и функция $\chi(k)$ содержит только положительные слагаемые ($k \neq \pm\infty$). Покажем, что в случае $\rho_1 > \rho_2$ (более тяжелая жидкость в нижнем слое, а более легкая в верхнем) уравнение $\chi(k) = 0$ на рассматриваемом решении может иметь вещественные корни $k = k^i$. Анализ характеристического уравнения удобно проводить с использованием функций

$$a(k)=\rho_2-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{1/2}^{1}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda, \qquad b(k)=\rho_1-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_0^{1/2}(u-k)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda,$$

в терминах которых $\chi(k) = (\rho_1-\rho_2)^{-1}(\rho_1\rho_2 - a(k)b(k))$. Функция $a(k)$ не превосходит ρ_2 и стремится к этому значению, когда k по модулю стремится к бесконечности. В силу знака производной $a(k)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, u^+_{1/2})$ и монотонно возрастает на интервале (u_1,∞). Поведение функции $b(k)$ на интервалах $(-\infty,u_0)$ и $(u^-_{1/2},\infty)$ аналогично ($b(k) \leqslant \rho_1$). При достаточно больших по модулю значениях k функция $\chi(k)$ больше нуля, так как $0 < a(k) < \rho_2$ и $0 < b(k) < \rho_1$. Если $a(u_0) < 0$, то $\chi(k) \to -\infty$ при $k \to u_0$ и, следовательно, функция $\chi(k)$ на интервале $(-\infty,u_0)$ имеет хотя бы один корень. Так как производная функции $a(k)b(k)$ в этом интервале меняет знак только один раз (между нулями функций a и b), уравнение $\chi(k) = 0$ имеет единственный корень при $k < u_0$. Если $a(u_0) > 0$, то при $k < u_0$ функция χ не обращается в нуль. Таким же образом можно показать, что в зависимости от знака $b(u_1)$ функция χ обращается или не обращается в нуль при $k > u_1$. Кроме того, функция χ может обращаться в нуль на промежутке $(u^-_{1/2}, u^+_{1/2})$.

В безвихревом случае уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$ сводятся к системе двух дифференциальных уравнений [3], имеющих в области гиперболичности два вещественных корня. Поэтому в данном случае наиболее естественной, вероятно, будет ситуация, когда на рассматриваемом решении имеется два вещественных корня $k^1 < u_0$ и $k^2 > u_1$. Условия:

$$1)\ \ a(u_0)<0,\quad b(u_1)<0; \qquad 2)\ \ a(u^-_{1/2})<-(\rho_1\rho_2)^{1/2},\quad b(u^+_{1/2})<-(\rho_1\rho_2)^{1/2}$$

являются достаточными для существования корней $k^1 < u_0$ и $k^2 > u_1$. Первое условие гарантирует существование этих и только этих корней на интервалах $(-\infty,u_0)$ и (u_1,∞), а второе (если выполнено первое) не позволяет функции χ обращаться в нуль в промежутке $[u^-_{1/2}, u^+_{1/2}]$.

Вычислим собственные функционалы $\boldsymbol{F}^i$ и $\boldsymbol{F}^0$, отвечающие собственным числам $k = k^i$ $(k^i \neq 0)$ и $k = 0$. Из уравнений (2.4′) и (2.5′) с учетом (2.9) находим действие первой компоненты функционала $\boldsymbol{F}^i$ на пробную функцию

$$(F_1^{i-},\varphi) = \int\limits_0^{1/2} \theta\varphi\,d\lambda - k^i\rho_2^{-1}a(k^i)\int\limits_0^{1/2}\theta\Big[(u-k^i)^{-1}\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi\,d\nu\Big]_\lambda d\lambda,$$

$$(F_1^{i+},\psi) = \int\limits_{1/2}^{1}\theta\Big[u(u-k^i)^{-1}\int\limits_{1/2}^{\lambda}\psi\,d\nu\Big]_\lambda d\lambda.$$

Возвращаясь к (2.6), (2.7) и (2.8′), находим $F_2^{i\mp}$, F_3^i:

$$(F_2^{i-},\varphi) = \int\limits_0^{1/2} u_\lambda\varphi\,d\lambda + k^i\rho_2^{-1}a(k^i)\int\limits_0^{1/2}(u-k^i)^{-1}u_\lambda\varphi\,d\lambda,$$

$$(F_2^{i+},\psi) = \int\limits_{1/2}^{1}(u-k^i)^{-1}uu_\lambda\psi\,d\lambda, \qquad (F_3^i,1) = k^i\rho_2^{-1}\int\limits_{1/2}^{1}(u-k^i)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda.$$

Полагая в этих формулах $k^i = 0$, определяем функционал $\boldsymbol{F}^0$:

$$(F_1^{0-},\varphi) = \int\limits_0^{1/2}\theta\varphi\,d\lambda, \qquad (F_1^{0+},\psi) = \int\limits_{1/2}^{1}\theta\psi\,d\lambda,$$

$$(F_2^{0-},\varphi) = \int\limits_0^{1/2}u_\lambda\varphi\,d\lambda, \qquad (F_2^{0+},\psi) = \int\limits_{1/2}^{1}u_\lambda\psi\,d\lambda, \qquad (F_3^0,1) = 0.$$

Кроме дискретного спектра оператор A^* имеет непрерывный характеристический спектр $k^\lambda = u(t,x,\lambda)$, состоящий из двух отрезков $[u_0, u_{1/2}^-]$ и $[u_{1/2}^+, u_1]$. Действуя по аналогии с предыдущим, используем для преобразования выражений (2.4), (2.5), в которых теперь функционалы действуют по переменной ν, $u = u(t,x,\nu)$, $k = u(t,x,\lambda)$, уравнение (2.8′) и функции

$$\varphi = \Big[(u'-u)\int\limits_\nu^\lambda\varphi_1(\mu)\,d\mu\Big]_\nu, \qquad \psi = \Big[(u'-u)\int\limits_\lambda^\nu\psi_1(\mu)\,d\mu\Big]_\nu.$$

Здесь и далее для краткости применяем обозначение $f = f(t,x,\lambda)$, $f' = f(t,x,\nu)$. В этом случае при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$ получаем собственный функционал $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$:

$$(F_1^{1\lambda-},\varphi) = \int\limits_0^{1/2}\theta'\varphi'\,d\nu - u\rho_1\rho_2^{-1}\int\limits_\lambda^{1/2}\varphi(\mu)\,d\mu\int\limits_{1/2}^{1}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu +$$

$$+u\rho_2^{-1}a(u)\int\limits_0^{1/2}\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int\limits_\lambda^\nu\varphi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu d\nu,$$

$$(F_1^{1\lambda+},\psi) = \int\limits_{1/2}^{1}\theta'\Big[u'(u'-u)^{-1}\int\limits_{1/2}^{\nu}\psi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu d\nu,$$

$$(F_2^{1\lambda-},\varphi)=\int\limits_0^{1/2} u'_\nu\varphi'\,d\nu+u\rho_2^{-1}a(u)\int\limits_0^{1/2}(u'-u)^{-1}u'_\nu\varphi'\,d\nu,$$

$$(F_2^{1\lambda+},\psi)=\int\limits_{1/2}^{1}(u'-u)^{-1}u'u'_\nu\psi'\,d\nu,\qquad (F_3^{1\lambda},1)=u\rho_2^{-1}\int\limits_{1/2}^{1}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu,$$

а при $1/2\leqslant\lambda\leqslant 1$ — собственный функционал $\boldsymbol{F}^{2\lambda}$:

$$(F_1^{2\lambda-},\varphi)=\int\limits_0^{1/2}\theta'\varphi'\,d\nu-u\rho_1 b^{-1}(u)\int\limits_0^{1/2}\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int\limits_\nu^{1/2}\varphi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu\,d\nu,$$

$$(F_1^{2\lambda+},\psi)=\int\limits_{1/2}^{1}\theta'\Big[u'(u'-u)^{-1}\int\limits_\lambda^{\nu}\psi(\mu)\,d\mu\Big]_\nu\,d\nu+u\rho_2 b^{-1}(u)\int\limits_0^{1/2}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu\int\limits_{1/2}^{\lambda}\psi(\mu)\,d\mu,$$

$$(F_2^{2\lambda-},\varphi)=\int\limits_0^{1/2}u'_\nu\varphi'\,d\nu+u\rho_1 b^{-1}(u)\int\limits_0^{1/2}(u'-u)^{-1}u'_\nu\varphi'\,d\nu,$$

$$(F_2^{2\lambda+},\psi)=\int\limits_{1/2}^{1}(u'-u)^{-1}u'u'_\nu\psi'\,d\nu,\qquad (F_3^{2\lambda},1)=-ub^{-1}(u)\int\limits_0^{1/2}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu$$

(функции a и b определены выше).

Очевидно, что уравнения (2.4)–(2.8) имеют еще одно нетривиальное решение

$$F_2^{3\lambda-}=\delta(\nu-\lambda),\qquad F_2^{4\lambda+}=\delta(\nu-\lambda),$$

другие компоненты вектор-функционалов $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$ и $\boldsymbol{F}^{4\lambda}$ равны нулю.

Для получения соотношений на характеристиках при $u\neq 0$ подействуем функционалами $\boldsymbol{F}^0$, $\boldsymbol{F}^i$, $\boldsymbol{F}^{j\lambda}$ ($j=1,\ 2,\ 3,\ 4$) на систему (1.8). Действие функционала $\boldsymbol{F}^0$ дает уравнение

$$\Big(\int\limits_0^{1/2}u_\lambda\theta\,d\lambda+\int\limits_{1/2}^{1}u_\lambda\theta\,d\lambda\Big)_t=0, \tag{2.10}$$

выражающее тот факт, что верхняя граница канала фиксирована (в начальный момент времени равна 1). С учетом (2.10) и с помощью функций

$$r^i=\int\limits_0^{1/2}(u-k^i)^{-1}u_\lambda\theta\,d\lambda,\qquad l^i=\int\limits_{1/2}^{1}(u-k^i)^{-1}u_\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$R=\int\limits_0^{1/2}(u'-u)^{-1}u'_\nu\theta'\,d\nu,\qquad L=\int\limits_{1/2}^{1}(u'-u)^{-1}u'_\nu\theta'\,d\nu$$

результат действия функционалов $\boldsymbol{F}^i$, $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{2\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{4\lambda}$ на систему (1.8) после некоторых преобразований принимает вид

$$a(k^i)(r_t^i+k^ir_x^i)+\rho_2(l_t^i+k^il_x^i)+(\rho_2-a(k^i))(k^i+k^ik_x^i)=0,$$

$$a(u)(R_t + uR_x) + \rho_2(L_t + uL_x) + (\rho_2 - a(u))(u + uu_x) = 0, \tag{2.11}$$
$$\rho_1(R_t + uR_x) + b(u)(L_t + uL_x) - (\rho_1 - b(u))(u + uu_x) = 0, \quad \theta_t + u\theta_x = 0.$$

Уравнения (2.10), (2.11) образуют систему соотношений на характеристиках (характеристическую форму (1.8)).

Замечание 2. Если u обращается в нуль на интервале $[u_0, u^-_{1/2}]$, то для получения соотношений на характеристиках следует пользоваться собственными функционалами $\boldsymbol{F}^0$, $\boldsymbol{F}^i$, $\boldsymbol{F}^{j\lambda}$ ($j = 2, 3, 4$) и присоединенным функционалом $\boldsymbol{P}^{1\lambda}$, обладающим свойством $(\boldsymbol{P}^{1\lambda}, (A - uI)\boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{F}^0, \boldsymbol{\varphi})$. Действуя этими функционалами на систему (1.8), получим уравнения (2.10), (2.11). В случае, когда u обращается в нуль на интервале $[u^+_{1/2}, u_1]$, поступаем аналогично.

Необходимые условия гиперболичности заключаются в отсутствии на рассматриваемом решении комплексных характеристических корней. Если известно количество вещественных корней уравнения $\chi(k) = 0$, то условие того, что характеристическое уравнение не имеет комплексных корней, формулируется в терминах комплексной функции $\chi(z)$, а точнее, ее предельных значений

$$\chi^\pm(u) = a(u)\Big[-(u^-_{1/2} - u)^{-1}\theta^-_{1/2} + (u_0 - u)^{-1}\theta_0 + \int\limits_0^{1/2} (u' - u)^{-1}\theta'_\nu\, d\nu\Big] + \rho_1 \int\limits_{1/2}^{1} (u' - u)^{-2} u'_\nu \theta'\, d\nu \pm \pi i a(u)\theta_\lambda / u_\lambda,$$

$$\chi^\pm(u) = b(u)\Big[-(u_1 - u)^{-1}\theta_1 + (u^+_{1/2} - u)^{-1}\theta^+_{1/2} + \int\limits_{1/2}^{1} (u' - u)^{-1}\theta'_\nu\, d\nu\Big] + \rho_2 \int\limits_0^{1/2} (u' - u)^{-2} u'_\nu \theta'\, d\nu \pm \pi i b(u)\theta_\lambda / u_\lambda$$

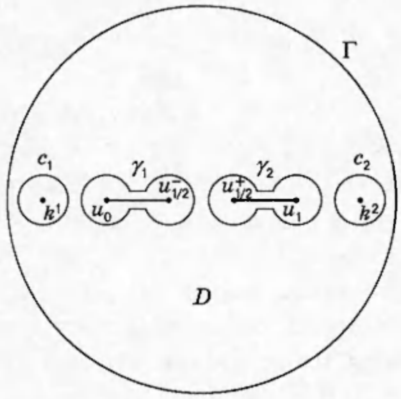
из верхней и нижней полуплоскости на отрезки $[u_0, u^-_{1/2}]$ и $[u^+_{1/2}, u_1]$ соответственно.

Лемма. *Уравнение* (2.9) *на решении* u_λ, θ, w *не имеет комплексных корней, если выполнено условие*

$$\Delta \arg (\chi^+/\chi^-) = 2\pi(n - 2), \qquad \chi^\pm \neq 0 \tag{2.12}$$

(*приращение аргумента при изменении* λ *от* 0 *до* 1/2 *и от* 1/2 *до* 1, n — *число вещественных нулей функции* $\chi(k)$).

Доказательство. Обведем интервалы изменения функции u контурами типа гантели γ_1, γ_2, точки k^i (нули функции χ) — окружностями малого радиуса c_i и очертим окружность Γ такого достаточно большого радиуса, чтобы все корни уравнения $\chi(k) = 0$ лежали в соответствующем круге (в случае двух вещественных корней) (см. рисунок). В области D (пересечение круга и внешности γ_1, γ_2, c_i) функция $\chi(k)$ аналитична и не имеет полюсов. В силу принципа аргумента число нулей $\chi(k)$ в этой области равно приращению аргумента по контурам, деленному на 2π. Приращение аргумента по Γ против часовой стрелки равно -4π (нуль второго порядка). При обходе по часовой стрелке каждой из окружностей малого радиуса, ограничивающих точки u_0, $u^-_{1/2}$, $u^+_{1/2}$, u_1, аргумент получает приращение по 2π (полюса первого порядка) и -2π при обходе в том же направлении окружностей c_i (нуль первого порядка). После их суммирования приращение аргумента



по всем контурам, за исключением ручек гантелей, равно $2\pi(2-n)$. Следовательно, чтобы в сумме получился нуль, на ручках гантелей аргумент должен получить приращение $2\pi(n-2)$. Таким образом, условие (2.12) является необходимым и достаточным для отсутствия комплексных корней уравнения $\chi(k)=0$, если это уравнение имеет n вещественных корней. Лемма доказана.

Для доказательства эквивалентности уравнений (1.8) и соотношений на характеристиках (2.10), (2.11) надо показать, что равенства $(\boldsymbol{F}^{j\lambda},\boldsymbol{S})=0$ ($j=1,2,3,4$), $(\boldsymbol{F}^0,\boldsymbol{S})=0$, $(\boldsymbol{F}^i,\boldsymbol{S})=0$ выполнены, если и только если вектор-функция $\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,S_3)$ (первые две компоненты — функции от λ, а последняя — постоянная) тождественно равна нулю.

Из уравнений $(\boldsymbol{F}^{3\lambda},\boldsymbol{S})=0$ и $(\boldsymbol{F}^{4\lambda},\boldsymbol{S})=0$ следует, что компонента S_2 равна нулю. С учетом этого запишем результаты действия функционалов $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{2\lambda}$, $\boldsymbol{F}^i$ и $\boldsymbol{F}^0$ на вектор-функцию $\boldsymbol{S}$:

$$a(u)\int_0^{1/2}\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int_\lambda^\nu S_1\,d\mu\Big]_\nu d\nu-\rho_1\int_\lambda^{1/2}S_1\,d\mu\int_{1/2}^1(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu+$$
$$+\rho_2\int_{1/2}^1\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int_{1/2}^\nu S_1\,d\mu\Big]_\nu d\nu+S_3\int_{1/2}^1(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu=0;\tag{2.13}$$

$$b(u)\int_{1/2}^1\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int_\lambda^\nu S_1\,d\mu\Big]_\nu d\nu+\rho_2\int_{1/2}^\lambda S_1\,d\mu\int_0^{1/2}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu-$$
$$-\rho_1\int_0^{1/2}\theta'\Big[(u'-u)^{-1}\int_\nu^{1/2}S_1\,d\mu\Big]_\nu d\nu-S_3\int_0^{1/2}(u'-u)^{-2}u'_\nu\theta'\,d\nu=0;\tag{2.14}$$

$$a(k^i)\int_0^{1/2}\theta\Big[(u-k^i)^{-1}\int_\lambda^{1/2}S_1\,d\nu\Big]_\lambda d\lambda-\rho_2\int_{1/2}^1\theta\Big[(u-k^i)^{-1}\int_{1/2}^\lambda S_1\,d\nu\Big]_\lambda d\lambda-$$
$$-S_3\int_{1/2}^1(u-k^i)^{-2}u_\lambda\theta\,d\lambda=0,\qquad\int_0^{1/2}\theta S_1\,\lambda+\int_{1/2}^1\theta S_1\,\lambda=0.\tag{2.15}$$

Заменой переменных $\tau(\lambda) = \int\limits_{\lambda}^{1/2} S_1\,d\nu$ и интегрированием по частям уравнения (2.13), (2.14) приводятся к сингулярному интегральному уравнению [4], заданному на разомкнутых контурах и содержащему как характеристическую часть, так и фредгольмов оператор первого рода. При этом S_3 и константы интегрирования τ_0, τ_1 определяются из уравнений (2.15) (предполагаем, что имеется не менее двух корней k^i). В аналогичных ситуациях в [5, 6] возникали характеристические сингулярные интегральные уравнения, что позволяло решать их путем сведения к задаче сопряжения. В данном случае решить уравнения (2.13), (2.14) не удается и вопрос о достаточных условиях гиперболичности остается открытым.

3. Случай сильного скачка плотности. Рассмотрим ситуацию, когда плотность жидкости в нижнем слое ρ_1 много больше, чем плотность жидкости в верхнем слое ρ_2. Кроме того, предположим, что линия раздела жидкостей h и давление на верхней границе канала p^* достаточно плавно меняются в зависимости от x. В системе (1.3) выполним растяжение $p^* \to \rho_2 p^*$ и домножим первое уравнение на ρ_1^{-1}, а второе на ρ_2^{-1}. При этом возникает малый параметр $\alpha = \rho_2\rho_1^{-1}$. Формально переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получаем уравнения

$$u_T + uu_X + vu_Y + h_X = 0, \qquad h_T + \Big(\int\limits_0^h u\,dY\Big)_X = 0 \tag{3.1}$$

в нижнем слое ($0 \leqslant Y \leqslant h$) и уравнения

$$u_T + uu_X + vu_Y + p^*_X = 0, \qquad h_T + \Big(\int\limits_1^h u\,dY\Big)_X = 0 \tag{3.2}$$

в верхнем слое ($h \leqslant Y \leqslant 1$). Система (3.1) описывает плоскопараллельные движения однородной жидкости со свободной границей в поле силы тяжести в приближении длинных волн [5] (u, h — искомые величины), а уравнения (3.2) описывают аналогичные течения в искривленном канале [6] (h — известная функция, u, p^* — искомые переменные). При моделировании система (1.3) расщепилась на уравнения (3.1) и (3.2). Линия раздела жидкостей h формируется под влиянием только тяжелой жидкости, расположенной в нижнем слое, а верхняя, достаточно легкая жидкость движется в области с заданными границами. Будем рассматривать вихревые течения с монотонным по глубине профилем скорости в каждом слое. В отличие от сделанного предположения в п. **2**, интервалы изменения функции u в нижнем и верхнем слоях могут пересекаться.

Характеристическое уравнение (2.9) в данном случае упрощается и принимает вид

$$k\Big(1 - \int\limits_0^{1/2} (u-k)^{-2} u_\lambda \theta\,d\lambda\Big) \int\limits_{1/2}^{1} (u-k)^{-2} u_\lambda \theta\,d\lambda = 0. \tag{3.3}$$

Перепишем уравнения (3.1), (3.2) в эйлерово-лагранжевых координатах t, x, λ:

$$u_t + uu_x + \int\limits_0^{1/2} H_x\,d\lambda = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0; \tag{3.1$'$}$$

$$u_t + uu_x - (u_{1t} + u_1 u_{1x}) = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \qquad \int\limits_{1/2}^{1} H\,d\lambda = 1 - h(t,x). \tag{3.2$'$}$$

Введем комплексные функции $\chi_1(z) = 1 - \int\limits_0^{1/2} (u-z)^{-2} u_\lambda \theta \, d\lambda$, $\chi_2(z) = \int\limits_{1/2}^{1} (u-z)^{-2} u_\lambda \theta \, d\lambda$ и вычислим их предельные значения из верхней и нижней полуплоскостей на отрезки $[u_0, u_{1/2}^-]$, $[u_{1/2}^+, u_1]$ соответственно:

$$\chi_1(u)^\pm = 1 + \theta_{1/2}^-(u_{1/2}^- - u)^{-1} - \theta_0(u-u_0)^{-1} - \int\limits_0^{1/2} \theta'_\nu (u'-u)^{-1} \, d\nu \mp \pi i \theta_\lambda / u_\lambda,$$

$$\chi_2(u)^\pm = -\theta_1(u_1 - u)^{-1} + \theta_{1/2}^+(u_{1/2}^+ - u)^{-1} + \int\limits_{1/2}^{1} \theta'_\nu (u'-u)^{-1} \, d\nu \pm \pi i \theta_\lambda / u_\lambda.$$

Далее, используя эти функции, в терминах которых уравнение (3.3) представимо в виде $k\chi_1(k)\chi_2(k) = 0$, сформулируем условия гиперболичности уравнений (3.1′) и (3.2′).

Согласно [5] условие

$$\Delta \arg \chi_1^+(u)/\chi_1^-(u) = 0, \qquad \chi_1^\pm \neq 0 \tag{3.4}$$

(приращение аргумента при изменении u от u_0 до $u_{1/2}^-$) является необходимым и достаточным для гиперболичности системы (3.1′), если u, θ дифференцируемые, а u_λ, θ_λ, H — гёльдеровы по переменной λ функции.

Уравнения (3.2′) отличаются от рассмотренных в [6] тем, что заданная функция h зависит не только от x, но и от t. Поэтому при переходе к новым переменным u_λ, θ система (3.2′) записывается в виде $\boldsymbol{U}_t + A\boldsymbol{U}_x = \boldsymbol{V}$, где $\boldsymbol{U}$ — вектор искомых величин, A — матрица с операторными коэффициентами (такая же, как в [6]), $\boldsymbol{V} = (-u_\lambda(1-h)^{-1}h_t, 0)^{\mathrm{T}}$ — правая часть. Собственные функционалы совпадают с данными в [6] и могут быть получены из функционалов $F_1^{2\lambda+}$, $F_2^{2\lambda+}$, F_1^0, F_2^0 преобразованиями и переходом к пределу $\alpha \to 0$. Условия (3.4), в которых вместо функции χ_1 следует подставить χ_2, являются необходимыми и достаточными для гиперболичности системы (3.2′) при таких же требованиях на гладкость искомых функций.

Таким образом, рассмотренные уравнения являются гиперболическими при выполнении определенных условий, нарушение которых приводит к появлению комплексных характеристических корней, что позволяет строить примеры Адамара некорректной постановки задачи Коши и, вероятно, говорить о возникновении длинноволновой неустойчивости.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Тешукову за внимание к работе, участие в обсуждении результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
2. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
3. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–13.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

5. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.

6. **Чесноков А. А.** Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–49.

Поступила в редакцию 20/VI 1997 г.