

О ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА ИЛИ ОТСАСЫВАНИЯ

Ю. Л. Файницкий

(Куйбышев)

Исследуется поперечное обтекание несжимаемой жидкостью пластины, колеблющейся в своей плоскости, со вдувом или отсасыванием вещества через поверхность. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Ньютона. Показано, что течение можно представить как суперпозицию стационарного и нестационарного полей. При любых частотах процесс распространения возмущений скорости имеет вид затухающей волны. Предложен приближенный метод определения напряжения трения.

Аналогичная задача для непроницаемой пластины рассматривалась в [1,2].

В данной работе обобщаются результаты [1,2] на случай равномерного отсасывания или вдува в пограничный слой вещества, идентичного с жидкостью, обтекающей пластину.

Поле скоростей описывается системой уравнений и граничных условий

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u|_{y=0} = a \cos \omega t, \quad v|_{y=0} = v_w, \quad u|_{y \rightarrow \infty} = U = cx$$

Компоненты скорости разыскиваются в виде

$$(2) \quad u = cx f'(\eta) + a \sqrt{X^2 + Y^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad v = -\sqrt{c\nu} f(\eta)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{\nu}} y, \quad \cos \varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Предполагая, что решение для стационарной задачи должно следовать из (2) при $a = 0$, для определения $f(\eta)$ имеем

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0$$

при граничных условиях

$$f(0) = -v_w / \sqrt{c\nu} = -f_w, \quad f'(0) = 0, \quad f'|_{\eta \rightarrow \infty} = 1$$

Величины X и Y находятся из системы

$$X'' + fX' - f'X = -\omega c^{-1}Y, \quad Y'' + fY' - f'Y = \omega c^{-1}X$$

$$X(0) = 1, \quad X|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

В табл. 1 представлены значения угла отставания $-\varphi$. Зависимость $\varphi(\eta)$ близка к линейной. Из этого факта и характера изменения амплитуд $\sqrt{X^2 + Y^2}$ (табл. 2) следует, что распространение возмущений скорости при любых частотах имеет вид затухающей волны, аналогичной волне сдвига на пластине, колеблющейся в покоящейся жидкости.

Таблица 1

$f_W = 1$				$f_W = -1$			
η	ω/c			η	ω/c		
	0.25	1.0	5.0		0.25	1.0	5.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.0	0.000	0.000	0.000
0.4	0.049	0.185	0.587	0.2	0.019	0.076	0.281
0.8	0.095	0.359	1.161	0.4	0.038	0.147	0.553
1.2	0.139	0.525	1.725	0.6	0.055	0.215	0.818
1.6	0.180	0.685	2.282	0.8	0.071	0.279	1.078
2.0	0.220	0.838	2.833	1.0	0.087	0.341	1.332
2.4	0.258	0.985	3.376	1.2	0.102	0.401	1.581
2.8	0.293	1.124	3.909	1.4	0.117	0.459	1.826
3.2	0.326	1.256	4.429	1.6	0.131	0.515	2.065
3.6	0.358	1.378	4.934	1.8	0.144	0.568	2.299
4.0	0.387	1.493	5.421	2.0	0.157	0.620	2.527

Таблица 2

$f_W = 1$				$f_W = -1$			
η	ω/c			η	ω/c		
	0.25	1.0	5.0		0.25	1.0	5.0
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.4	0.8479	0.8198	0.6249	0.2	0.7244	0.7182	0.6436
0.8	0.6722	0.6316	0.3738	0.4	0.5087	0.5006	0.4059
1.2	0.4965	0.4548	0.2116	0.6	0.3464	0.3387	0.2503
1.6	0.3393	0.3039	0.1123	0.8	0.2287	0.2224	0.1507
2.0	0.2128	0.1869	0.0554	1.0	0.1464	0.1416	0.0885
2.4	0.1214	0.1048	0.0252	1.2	0.0908	0.0874	0.0506
2.8	0.0624	0.0531	0.0105	1.4	0.0545	0.0523	0.0282
3.2	0.0286	0.0241	0.0040	1.6	0.0317	0.0303	0.0153
3.6	0.0117	0.0097	0.0014	1.8	0.0178	0.0170	0.0081
4.0	0.0042	0.0035	0.0004	2.0	0.0097	0.0092	0.0041

В рассматриваемом процессе подавляющее воздействие внешнего течения ограничивает величину скорости в фиксированной точке пространства значением

$$(3) \quad A(\eta, f_W) = \sqrt{X^2 + Y^2}|_{\omega/c=0}$$

Если частота велика настолько, что возмущения скорости не успевают достигнуть величин, соответствующих (3), то амплитуды обуславливаются теми же факторами, что в волне сдвига. Нестационарную составляющую можно аппроксимировать соотношением ([3])

$$(4) \quad u_t = a \exp[-n(\omega/c, f_W)\eta] \cos[\omega t - m(\omega/c, f_W)\eta]$$

$$(5) \quad n = m = \sqrt{\omega/2c} \quad \text{при } f_W = 0$$

Использование (4) оправдано, если $\exp(-n\eta) < A(\eta, f_W)$. При выполнении противоположного условия (4) заменяется следующим:

$$u_t = aA(\eta, f_W) \cos(\omega t - m\eta)$$

Безразмерное напряжение трения при низких частотах записывается в виде

$$(6) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial u_t}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = A'(0, f_W) \cos \omega t + m \sin \omega t$$

и при высоких

$$(7) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial u_t}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -n \cos \omega t + m \sin \omega t$$

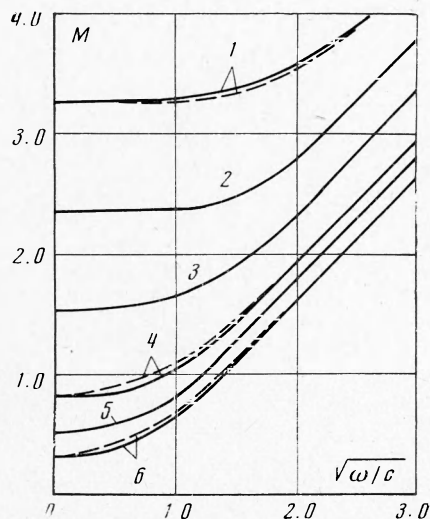
В качестве граничного значения частоты, разделяющего эти области, можно принять ω_0 , при котором экспонента в (4) совпадает вблизи поверхности с функцией $A(\eta, f_W)$. Это значение определяется уравнением

$$(8) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \exp[-n(\omega_0, f_W) \eta] \right\}_{\eta=0} = -n(\omega_0, f_W) = A'(0, f_W)$$

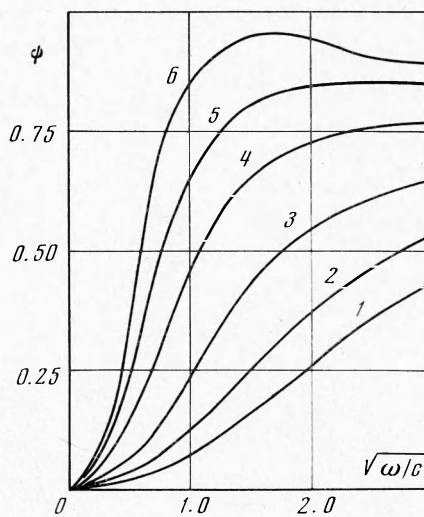
На фиг. 1 сплошными линиями представлены графики амплитуд напряжения трения, вычисленные с помощью точного решения по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = cx f''(0) + aM \cos(\omega t + \psi + \pi), \quad M = \sqrt{X'^2(0) + Y'^2(0)}$$

штриховыми — с помощью приближенного метода ((6) при $\omega \leq \omega_0$ и (7) при $\omega > \omega_0$). Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 относятся к $f_W = -3, -2, -1, 0, 0.5, 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

При $\omega = 0$ $m = 0$, движение квазистационарно, напряжение трения изменяется в фазе со скоростью поверхности. При $\omega \neq 0$ колебания периферийных слоев жидкости отстают от колебаний слоев, более близких к поверхности. Это приводит к появлению дополнительной составляющей напряжения трения $m \sin \omega t$.

При очень малых частотах $m \ll A'(0, f_W)$, возрастание амплитуд напряжения трения происходит медленно, затем ускоряется. Это возрастание связано с увеличением углов отставания с частотой.

При $\omega > \omega_0$ увеличиваются обе составляющие градиента скорости. Поэтому рост упомянутых амплитуд происходит быстрее. При $f_w = 0$ амплитуда напряжения трения пропорциональна $\sqrt{\omega/c}$. При $f_w < 0$ уменьшаются амплитуды колебаний скорости и возрастает абсолютная величина производной $A'(0, f_w)$. Поэтому напряжение трения при отсасывании выше, чем в случае $f_w = 0$. При более высоких частотах ω_0 выполняется равенство (8), вследствие чего зона малых частот увеличивается. Вдув приводит к противоположному эффекту.

Поскольку отсасывание увеличивает роль первого коэффициента в (6), угол опережения ψ возрастает при этом медленнее (фиг. 2). При вдуве угол опережения возрастает настолько быстро, что при некотором $\sqrt{\omega/c}$ превышает предельное значение, соответствующее $\sqrt{\omega/c} \rightarrow \infty$.

Поступила 25 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauert M. B.* The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt. 1.
2. *Rott N.* Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 13, No. 4.
3. *Регуер С. А.* Неустановившийся асимптотический пограничный слой на бесконечной пористой пластине. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.