РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2014 № 5

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 559.373

МЕХАНИКА СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ: НЕКОТОРЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Рассмотрены прикладные задачи механики сыпучих сред, связанные с горным делом. Показана связь механики сыпучих сред с теорией пластичности, механикой горных пород, синергетикой и другими научными дисциплинами. Отмечены перспективные направления дальнейших исследований.

Сыпучая среда, дилатансия, напряжения, деформации

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в механике фундаментальную роль играют теории, описывающие поведение простейших представителей определенных классов материалов. К таким относятся теории упругости, пластичности, гидромеханика, газовая динамика. Сыпучий материал без сцепления также может быть отнесен к простейшим, фундаментальным.

С одной стороны, он подобен жидкости, так как до известной степени принимает форму емкости, в которой находится, способен к истечению из емкостей и т. д. С другой стороны, в стесненных условиях деформирования сыпучие среды обнаруживают все признаки поведения твердых тел. Сыпучие материалы обладают рядом свойств, присущих сложным грунтам, горным породам, металлам, различным искусственным материалам. Теория и экспериментальные исследования сыпучих сред в значительной мере проясняют многие эффекты деформирования и разрушения этого широкого класса материалов.

Значение механики сыпучих сред для горного дела определяется следующими факторами: 1) твердые полезные ископаемые и пустые породы после отбойки представляют собой сыпучий материал; 2) в большинстве случаев обрушение пород в выработанное пространство приводит к превращению монолита в сыпучий материал; 3) в ряде схем добычи полезных ископаемых сыпучие материалы используются для предотвращения мульд проседания и управления горным давлением (технологии с закладкой выработанного пространства); 4) сыпучие материалы можно использовать для создания несущих конструкций (искусственных целиков, анкеров и т. д.); 5) горное давление и большие пластические деформации могут привести к тому, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

в областях концентрации напряжений породы превращаются фактически в сыпучие материалы; 6) при определенных воздействиях массив горных пород подчиняется закономерностям деформирования сыпучих материалов (например, при взрывах достаточно большой мощности), с точки зрения феноменологического описания сыпучие материалы и горные породы обладают существенными общими признаками, поэтому теория деформирования сыпучих материалов тесно связана с механикой горных пород, а следовательно, и с задачами горного дела; 7) последнее обстоятельство позволяет на сыпучих материалах моделировать ряд процессов деформирования горного массива.

Горное дело, как практическая область деятельности, не только использует достижения механики сыпучих сред, но и ставит новые задачи, которые стимулируют развитие этой науки. Достаточно сослаться на следующие примеры. При расчете мощных взрывов Е. И. Шемякин использовал представления механики сыпучих сред, что в дальнейшем потребовало развития этой теории [1]. Следующие примеры связаны с основными достижениями Института горного дела СО РАН в области технологии горных работ [2]. Н. А. Чинакалом была создана система щитовой отработки угольных пластов с закладкой выработанного пространства [3]. Закладка представляет собой сыпучий материал. Исследование процесса ее деформирования и расчета давления на щиты — это задача механики сыпучих сред.

Для разработки рудных месторождений в 1959–1969 гг. Н. Г. Дубыниным совместно с коллективом лаборатории систем разработки рудных месторождений была создана новая технология, которая получила название “системы непрерывного этажно-принудительного обрушения с вибровыпуском руды”. Система явилась существенным шагом вперед в этой области. Она позволила поднять производительность труда в 3 раза, вдвое сократить себестоимость работ, улучшить условия безопасности труда горнорабочих [4]. Одна из основных операций данной технологии связана с выпуском раздробленной руды из камер. В теоретическом плане — это также типичная задача механики сыпучих сред.

С механикой сыпучих тел тесно связаны прикладные задачи порошковой металлургии (смешение, дозирование порошков, создание плотных упаковок частиц и др.). Можно также указать на широкий класс задач, возникающих в химической, пищевой и других областях промышленности. Если рассматривать механику сыпучих сред как фундаментальную науку, то здесь на первый план выходят проблемы формулировки и исследования нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение таких сред, поиск аналитических и численных решений начально-краевых задач.

Объект исследований — знакомый всем сухой кварцевый песок. На первый взгляд, он представляется достаточно тривиальным и прозаическим, однако его изучение открывает связи многих областей науки. Диапазон чрезвычайно широк: от конкретных задач горного дела и обработки порошковых материалов до глобальных проблем приливной эволюции Земли и фундаментальных вопросов о структуре пространства и времени.

ТЕОРИЯ АФФИННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И НОВЫЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ РЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Первый вопрос, который возникает при построении теории — это найти способ замены образца сыпучей среды на некоторый эквивалент образца, который будет существовать в мире математической реальности. По-другому это называется построением математических моделей сыпучей среды. Здесь есть два основных пути: первый — построение континуальных моделей в рамках механики сплошной среды и второй — построение дискретных моделей в рамках, например, метода дискретных элементов. В обоих случаях модель представляет собой замкнутую систему уравнений (и неравенств), дополненную начальными и краевыми условиями. Уравнения состоят из двух групп: первая отражает общие законы сохранения, которые выполняются всегда и везде, в том числе и для сыпучих сред; вторая группа уравнений (определяющих уравнений) отражает специфику деформирования сыпучей среды. Такие уравнения должны строиться на основе экспериментальных данных. Какими должны быть эти эксперименты? Для металлов используются эксперименты по растяжению – сжатию стержней и кручению тонкостенных трубчатых образцов. Для сыпучих сред такую методику реализовать довольно сложно.

Поиск более приемлемых методик можно свести к анализу одного чрезвычайно простого факта. Он состоит в следующем. Возьмем горизонтальный стержень квадратного поперечного сечения. Предположим, что: 1) материал стержня однородный; 2) нагружение достаточно медленное; 3) процесс деформирования устойчив так, что возможности разрушения, образования шейки и т. д. исключаются. Сместим теперь правый конец стержня на величину u вправо, а левый конец — на ту же величину влево. Куда сместится середина стержня? Из соображений симметрии ясно, что середина стержня останется на месте. Следовательно, смещения остальных сечений будут пропорциональны расстоянию до середины стержня. Результат не изменится, если пары боковых граней стержня сместить навстречу друг другу на одинаковые расстояния. Из симметрии следует, что центр среднего сечения стержня останется неподвижным. Таким образом, в данной ситуации кинематика деформирования стержня зависит только от краевых условий на смещения и не зависит от свойств самого стержня.

Выделим внутри стержня тело V, ограниченное поверхностью S. Весь материал стержня вне тела V отнесем к устройству нагружения тела V. Вычислим перемещения $\overline{u}$ на границе тела S. Теперь можно утверждать, что по заданным на границе перемещениям $\overline{u}$ можно определить перемещения внутри тела V только на основе указанных выше соображений симметрии и не располагая при этом никакими данными о материале стержня.

Полученный результат можно обобщить. Предположим, что в момент времени t нам удалось сделать следующее: зафиксировать все перемещения внутри и на границе тела V, затем удалить это тело из устройство нагружения, повернуть его на угол $\alpha(t)$ вокруг вектора $\overline{m}(t)$, вставить в новое устройство нагружения (новый стержень) и подвергнуть его новой деформации в течение времени от t до $t+\Delta_1 t$. Ясно, что все прежние условия симметрии здесь сохраняются. Поэтому по известным смещениям на границе мы снова определяем перемещения внутри области V. Затем все повторяем снова с новыми значениями $\alpha(t+\Delta_1 t)$, $\overline{m}(t+\Delta_1 t)$, переходим к моменту $t+\Delta_1 t+\Delta_2 t$ и т. д. Описанная процедура исчерпывает все возможные траектории нагружения элемента среды. Если в какой-то момент времени вектор $\overline{m}$ меняется скачком, то это дает излом на траектории нагружения. Изменению знака приращения $\alpha(t)$ может давать разгрузку и т. д.

Каким образом можно реализовать хотя бы некоторые из указанных траекторий нагружения? Общий ответ состоит в следующем. Необходимо выбрать исходную конфигурацию тела $S(0)$ и некоторую программу его нагружения. Далее необходимо рассмотреть изменение конфигурации тела со временем, т. е. рассмотреть перемещения на границе тела и соответствующее изменение его границы $S(t)$.

Будем перебирать все возможные исходные конфигурации тела $S(0)$ и все возможные программы его нагружения. В результате найдем такие изменения поверхности $S(t)$, которые вполне пригодны для реализации (хотя бы приближенно). К сожалению, для перебора имеется слишком много вариантов. Поэтому в общем виде данная задача не исследовалась и ее решение можно отнести к проблеме 1. Рассматривались только частные решения данной задачи, а именно: считалось, что все интервалы времени Δt бесконечно малы, а параметры течения либо постоянны, либо являются гладкими функциями времени (изломы траекторий рассматривались отдельно и только для плоско-параллельного течения Куэтта). При указанных ограничениях задачу определения формы тела в процессе его деформирования можно свести к решению следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3\,, \tag{1}$$

где $i = 1, 2, 3$; x_i — декартовы координаты материальных точек; t — время; a_{ij} — коэффициенты, выбранные из тех или иных соображений, $j = 1, 2, 3$. Коэффициенты не должны зависеть от координат, но могут зависеть от времени t. Последнее соответствует различным циклическим и другим подобным программам нагружения.

Необходимо отметить два существенных обстоятельства. В континуальной механике деформируемая среда предполагается сплошной. Вместе с предположением о сплошности вводится и предположение о достаточной гладкости всех функций, описывающих процесс деформирования (разрывы, связанные с ударными волнами, локализацией деформаций и разрушением рассматриваются только на изолированных поверхностях). Гладкость означает, что локально любую функцию можно считать либо постоянной, либо линейной по координатам. Если исключить градиентные модели, то можно принять, что в пределах элементарного бесконечно малого объема распределение деформаций и напряжений является однородным, а распределение скоростей и смещений — линейным по координатам. Главным является именно это обстоятельство, а не бесконечная малость элемента среды. Поэтому изучение поведения бесконечно малого объема, т. е. определяющих уравнений среды, можно свести к изучению поведения объема конечных размеров, в пределах которого распределение скоростей является линейным по координатам и имеет вид (1).

Далее, по своему построению любое течение из класса (1) обладает следующим свойством: задание на границе смещений (1) гарантирует реализацию линейного распределения смещений и внутри области деформируемой среды. При этом среда может быть упругой, пластичной, вязкой жидкостью либо любой другой средой с более сложной реологией. Необходимо выполнение только трех указанных выше условий. Именно поэтому опыты, в которых реализуются деформации (1), являются идеальными для построения определяющих уравнений среды. Таким образом, поиск приемлемых экспериментальных методик свелся к анализу уравнений (1).

Уравнения (1) хорошо известны. Им соответствуют аффинные преобразования пространства. Тем более удивительно, что рассмотренная постановка задачи, которая является практически очевидной и в общем-то известной, позволила получить в этой области ряд новых результатов — найти новые способы деформирования, которые, с одной стороны, близки к аффинным, а с другой — могут быть реализованы для сыпучих и других подобных им материалов.

Класс течений (1) определяется девятью скалярными функциями времени: $a_{ij}(t)$. Желательно было бы упорядочить течения (1). Формально это можно сделать, рассматривая собственные значения матрицы a_{ij} [5]. Важнее, однако, исходить из механического смысла течений (1). Прежде всего, исключим из (1) составляющую, которая дает изменение объема. Течение без изменения объема можно отнести к сдвиговым в широком смысле этого слова. В качестве второго шага предположим, что $a_{ij} = \text{const}$, т. е. ограничимся стационарными течениями. Стационарным течениям соответствуют стационарные краевые условия. Обобщение на нестационарный случай трудностей не представит за счет выбора нестационарных условий на границе.

Начнем с самого простого и классического случая — течения Куэтта между параллельными пластинами (рис. 1). Ему соответствует следующий набор коэффициентов в (1): $a_{12} \neq 0$, остальные коэффициенты $a_{ij} = 0$. Для вязких жидкостей есть условия прилипания, поэтому движение пластин, направленное по касательной к границе, внутрь области передается. Для сыпучих сред условий прилипания нет, и основная трудность состоит в том, чтобы каким-то образом вовлечь материал в плоскопараллельное течение. Это было сделано на приборе однородного сдвига за счет специальной конструкции камеры, набранной из П-образных пластин [6]. Позже конструкцию прибора усовершенствовали так, что в процессе сдвига можно было менять и объем камеры, и угол трения на ее вертикальных стенках [7].

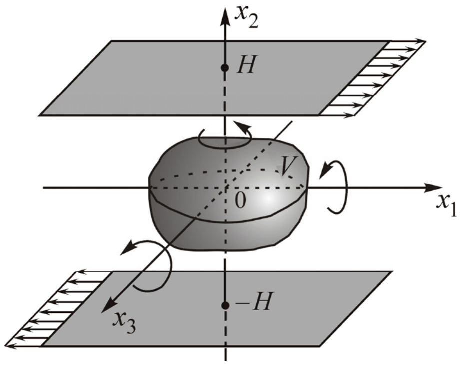

Рис. 1

Остальные три класса нагружений тесно связаны с течением Куэтта следующим образом. Ничто не мешает с самого начала в качестве базового процесса рассматривать не растяжение стержня, а сдвиг материала между параллельными пластинами (см. рис. 1). Все выводы, связанные с симметрией процесса и поворотом тела V, остаются без изменения. Повороту тела вокруг оси $0x_1$ отвечает набор коэффициентов в (1): $a_{12} = \gamma$, $a_{23} = -\Omega$, $a_{32} = \Omega$, где γ, Ω — параметры течения. Остальные коэффициенты равны нулю. Данное течение описано в [8, 9], но экспериментально не реализовано (его реализация — это проблема 2).

Повороту тела вокруг оси $0x_2$ соответствует набор коэффициентов $a_{12} = \gamma$, $a_{13} = \Theta$, $a_{31} = -\Theta$, где γ, Θ — параметры, остальные коэффициенты равны нулю. Этот тип течения приближенно реализован на приборе изотропного сдвига. На рис. 2 показаны две схемы работы данного прибора. Они являются различными с технической точки зрения, но в действительности реализуют одно и то же течение в различных системах координат. Смысл названия удобнее понять, пользуясь схемой, показанной на рис. 2*б*.

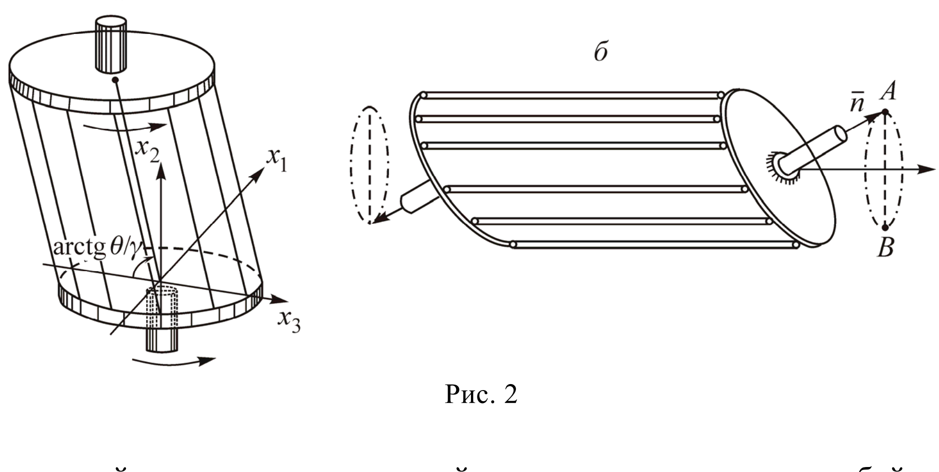

Рис. 2

Камера, в которой находится испытуемый материал, представляет собой наклонный цилиндр с жесткими круговыми основаниями. Боковая поверхность цилиндра выполнена из тонкой резины, которая натягивается на жесткие стержни, установленные вдоль образующих боковой поверхности. Стержни закреплены на основаниях шарнирно. Сдвиг материала осуществляется смещением конца нормали к основанию по круговой траектории. (Второе основание движется так же.) Для сравнения рассмотрим сдвиг, который реализуется при движении нормали по прямой AB. Этому движению соответствует плоскопараллельное течение Куэтта (изменение объема вывод не меняет). Представим себе, что материал внутри камеры набран из горизонтальных тонких цилиндрических волокон. Сдвиг вызывает скольжение между волокнами. Для различных образующих волокна скольжение будет различным: наибольшим — для образующих, которые касаются плоскостей, ортогональных AB, равным нулю — для плоскостей, параллельных AB, промежуточным — в остальных случаях. В этом смысле можно сказать, что классический сдвиг, который реализуется в случае плоской деформации, является анизотропным. Если же сдвиг осуществляется при движении нормали по конической поверхности, то скольжение волокон по всем их образующим будет одинаковым за полный оборот нормали. Именно в этом смысле данный тип сдвига можно отнести к изотропным.

При реализации изотропного сдвига по схеме, показанной на рис. 2*а*, за счет влияния силы тяжести наблюдалось дифференциальное вращение различных горизонтальных сечений наклонно-цилиндрического образца. В результате осевое плоское сечение образца приобретало геликоидальную форму с неограниченным закручиванием (рис. 3). Исследование дилатансии и напряжений при этом типе нагружения можно отнести к проблеме 3.

а *б*

Рис. 3

Так сложилось, что детальнее всего был исследован четвертый класс нагружений, который соответствует сдвигу с наложенным вращением вокруг оси $0x_3$. Для этого класса течений имеем

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = (\gamma - \omega)x_2, \quad \upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = \omega x_1, \quad \upsilon_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0. \tag{2}$$

Частицы (2) движутся согласованно вследствие того, что информация о краевых условиях передается через контакты между частицами. Предположим, что силы взаимодействия на контактах исчезли и их роль взяли на себя некоторые массовые силы. Из (2) следует, что

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega(\omega - \gamma)x_1, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega(\omega - \gamma)x_2.$$

Поле сил является центральным. Если $\omega > \gamma$, то каждая частица движется под действием центробежной силы и силы притяжения, пропорциональной расстоянию до центра. Частицы движутся с постоянной секториальной скоростью по эллиптическим орбитам. Последнее обстоятельство подсказывает и форму тела, которую удобнее всего выбрать для экспериментов. Она должна быть эллиптической (из (2) видно, что деформация является плоской). На границе условие постоянства секториальной скорости можно заменить условием постоянства линейной скорости. При малых эксцентриситетах деформирование будет близко к аффинному. Данный тип течений был реализован на приборе сложного нагружения (“вертушке”) [10].

Представляет интерес предельный случай, когда $\omega = 0$. Здесь речь идет о плоскопараллельном течении Куэтта, которое было реализовано на приборе однородного сдвига. Для этого класса течений реализованы также нагружения с изломами траекторий [11]. Поместим деформируемую среду в вертикальную оболочку в форме прямого кругового цилиндра. Цилиндр поместим в камеру однородного сдвига. Выполним циклические сдвиги в фиксированном направлении. В процессе нагружения цилиндр преобразуется в эллиптический, при обратном сдвиге пройдет свое исходное положение. В этот момент он будет круговым и его вместе с материалом можно повернуть на любой конечный угол. Затем можно продолжить сдвиги вдоль прежнего направления. Относительно материала сдвиг будет проходить уже по новому направлению.

Аналогичные способы можно реализовать и для других течений из класса (1). Если тело поместить в растяжимую оболочку, имеющую форму сферы, то излом траектории можно будет реализовывать в любом направлении (проблема 4).

Таким образом, анализ уравнений (1) приводит к ряду новых приборов, которые можно использовать для реометрических исследований сыпучих сред и других подобных материалов.

Проведенные эксперименты позволили обнаружить новые закономерности упругопластического поведения сыпучих сред. Они относятся как к зависимостям напряжений от деформаций, так и к дилатансионным свойствам сыпучих сред.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Полученные экспериментальные данные использовались при построении моделей деформирования сыпучих сред.

В рамках данных моделей исследован ряд прикладных задач о давлении сыпучего материала на дно и стенки емкости, на ограждение конструкции с учетом их податливости, введены поправки на дилатансию в основные справочные формулы механики грунтов (формулы для коэффициента бокового распора и угла наклона линии скольжения за подпорной стенкой), задачи о течении сыпучих материалов в сходящихся каналах и др. Построен также ряд точных решений в рамках классических уравнений идеально связанной и идеально сыпучей сред [12].

Предложенные модели позволили объяснить и преодолеть парадоксы модели Друккера–Прагера и адекватно учесть основные свойства среды — трение, дилатансию, наличие внутренних степеней свободы. Однако считать, что проблема построения континуальных моделей уже решена — нельзя. Адекватное ее решение для трехмерного случая и произвольных путей нагружения — это дело будущего (проблема 5).

Безусловно, делом будущего является и полное исследование математических свойств модели — доказательства теорем существования, единственности и устойчивости решений в статике и динамике, получение нижней и верхней оценок предельных нагрузок, поиск вариационных принципов (проблема 6).

В процессе доказательства теоремы единственности для уравнений [8] обнаружено, что единственность решения тесно связана с фактом незамкнутости специальных линий тока в деформируемой среде. Оказалось, что данные линии являются линиями тока энергии и ранее вводились в трудах Умова и Лява [13, 14]. Однако для задач статического деформирования сплошных сред они не исследовались, хотя в конкретных ситуациях картины течения энергии оказываются очень нетривиальными и интересными [15]. Вопрос о том, какой прикладной смысл можно им придать остается открытым (проблема 7).

"МОСТ" МЕЖДУ КОНТИНУАЛЬНЫМИ МОДЕЛЯМИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ И МОДЕЛЯМИ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод дискретных элементов приобретает все большую популярность и используется для решения ряда задач геомеханики. Сущность его состоит в том, что реальная среда заменяется некоторой упаковкой дискретных частиц. Между частицами постулируются те или иные законы взаимодействия. Формы частиц также представляют собой свободный многомерный параметр, который должен быть выбран из дополнительных соображений. Этот метод является принципиальной альтернативой классическим методам, основанным на традиционных представлениях механики сплошных сред.

Преимущества метода дискретных элементов хорошо известны и заключаются в следующем. В рамках данного метода не возникает дополнительных трудностей при решении задач с большими деформациями и поворотами. Кроме того, можно без принципиальных усложнений описывать локализацию сдвигов и физически нелинейные эффекты. При этом никаких данных о континуальных определяющих уравнениях среды не требуется.

Роль последнего обстоятельства неоднозначна. Фактически это обстоятельство означает следующее: решая задачу методом дискретных элементов, у нас нет полного представления о том, для какой, собственно, среды мы ее решаем. Это означает, что в вопросе о степени адекватности полученных результатов также ясности может не быть.

Действительно, задать начальную упаковку частиц и законы взаимодействия между частицами — это совсем не то же самое, что задать определяющие уравнения деформирования среды. В определяющих уравнениях содержится информация о поведении элементарных объемов среды. Таким образом, располагая определяющими уравнениями, мы представляем себе макросвойства среды, с которой имеем дело. Кроме того, в нашем распоряжении оказывается и весь арсенал средств, который выработан в континуальной механике за последние 200 лет. Он включает в себя средства для анализа типа уравнений, определения скоростей различных видов волн, теоремы о предельных нагрузках, критерии устойчивости и многое другое. Иными словами, еще до решения конкретной задачи основные черты решения мы знаем заранее. Это существенно облегчает как поиск адекватных постановок задач, так и интерпретацию полученных решений.

При использовании метода дискретных элементов таких возможностей уже нет. Возникает необходимость в "наведении моста" между двумя указанными выше подходами. Конечная цель "создания моста" — соединить вместе преимущества метода дискретных элементов и методов механики сплошных сред.

В работе [16] это предлагается сделать следующим образом. Вначале задаются форма частиц, их грансостав и алгоритм формирования начальной упаковки частиц. Задаются также условия взаимодействия между частицами. Далее (до исследования основной задачи) предлагается решение серии вспомогательных задач. Цель решения данных задач состоит в том, чтобы понять, каким именно определяющим уравнениям соответствуют выбранные упаковка частиц и законы взаимодействия между частицами. Поэтому вспомогательные задачи ставятся так: выбирается подходящая область V, ограниченная поверхностью S. На поверхности S задаются скорости или смещения, линейные по координатам. Коэффициенты, которые фигурируют в линейных зависимостях, однозначно определяют деформации, скорости деформаций, повороты и скорости поворотов элементарного объема сплошной среды, если его отождествить с объемом V. Смещения на границе S вызывают силы реакции между частицами, а также на самой границе S. Осредняя эти силы по соответствующим сечениям тела V, можно получить тензоры средних напряжений и их скоростей. В результате можно найти связь напряжений и деформаций для некоторой траектории нагружения. Такая связь относится уже к определяющим уравниям среды. В вырожденном случае в уравнении могут содержаться либо только напряжения, либо только деформации. В первом случае речь идет об условии предельного состояния среды, во втором — о ее дилатансионных характеристиках.

Таким образом, данная программа фактически совпадает с программой, изложенной в п. 1. Разница состоит только в том, что в п. 1 требуется проведение физических экспериментов, реализующих условия (1), а здесь — проведение численных экспериментов с теми же условиями (1). Численная программа имеет ряд несомненных преимуществ перед экспериментальной. Нет технических проблем с реализацией краевых условий любого типа. Численно можно реализовать любые условия, в том числе и условия кеплеровского типа, условия, дающие любые изломы траекторий нагружения, и т. д. Данная программа является весьма обширной и ее реализация (это проблема 8) позволит получить исчерпывающие решения целого ряда задач.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Итак, выше предполагалось, что процесс деформирования элементарного объема среды является устойчивым. Теперь необходимо рассмотреть случай, когда устойчивость нарушается. Для сыпучих сред и та и другая ситуация типична. Если у среды сцепление отсутствует, то потеря устойчивости приводит к локализации сдвигов на изолированных поверхностях (на линиях скольжения в плоском случае).

Свойство локализации играло основополагающую роль на первых этапах развития механики грунтов и сыпучих сред. В частности, предельное условие сухого трения было введено Кулоном для поверхностной локализации и имело смысл только на этих поверхностях. Затем Кеттер ввел гипотезу о выполнении предельного условия Кулона в каждой точке деформируемой массы. Эта гипотеза дала толчок к новым постановкам и решениям задач в механике сыпучих сред. В настоящее время развиваются оба направления, причем результаты, полученные в рамках первого направления, считаются приближенными, инженерными, а результаты, полученные в рамках гипотезы Кеттера, — точными. Приближенность результатов первого направления связана не с его основами, а с тем фактом, что в рамках этого направления обычно не рассматривается деформирование материала вне поверхностей локализации, а сами поверхности с некоторым произволом предполагаются заранее известными. В то же время в рамках моделей, основанных на гипотезе Кеттера, математическая задача решается обычно без введения дополнительных гипотез, поэтому методы решения и результаты считаются точными. Если же понятию точности придавать смысл степени адекватности описания реальных процессов, то в некоторых случаях приближенные решения первого направления могут оказаться гораздо более точными, чем точные решения второго направления. Кроме того, в рамках первого направления можно часть дополнительных гипотез снять, тогда точность результатов обоих направлений будет сравнима и в смысле строгости используемых математических методов (проблема 9 — определение конфигурации поверхностей скольжения в процессе решения задачи).

Известно, что уравнения предельного состояния относятся к гиперболическому типу, причем направления характеристик совпадают с площадками предельного состояния среды. Поэтому характеристики (как и в теории пластичности [17]) получили названия линий скольжения [18].

В [19] показано, что решения задачи с изолированными линиями скольжения стремятся к континуальному решению при увеличении числа линий. Процессы локализации на изолированных линиях исследовались в связи с задачами о давлении закладочного материала на щитовые перекрытия, о выпуске сыпучих материалов, а также при различных типах сложного нагружения. Здесь были обнаружены системы линий скольжения в форме логарифмических спиралей, овалов Кассини, лемнискаты Бернулли, локализация нового типа, когда линии скольжения зарождаются и растут постепенно в результате периодического нагружения материала в течение многих циклов [20, 21].

Если вспомнить известный принцип, согласно которому “природа действует оптимальными путями”, то можно считать, что локализация деформаций — это один из путей реализации данного принципа. Например, при движении сыпучего материала в сходящемся радиальном канале локализация сдвигов существенно уменьшает степень деформации материала вне линий [22]. Этот факт послужил основой для разработки вариационных подходов к задачам локализации и разрушения [23], введению нелокальных мер конечных деформаций [24], разработки инженерных подходов к задаче о деформировании горного массива вокруг выработок и т. д. [25].

Отметим еще один пример локализации [6], он был реализован при однородном сдвиге сыпучего материала. Речь идет о потере устойчивости течения Куэтта между параллельными пластинами. Потеря устойчивости происходит по регулярной сетке линий скольжения так, что в среде образуется устойчивая диссипативная структура. В последние десятилетия интерес к подобного рода явлениям значительно возрос. Изучение закономерностей самоорганизации, возникновение структур в системах различной природы составляют предмет новой научной дисциплины — синергетики.

ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Механика дает много примеров возникновения регулярных структур. В гидродинамике классическими являются примеры, связанные с формированием ячеек Бенара при конвективном всплывании слоя жидкости, вихрей Тейлора в сдвиговом течении между коаксильными цилиндрами, системы вихрей в стратифицированном сдвиговом течении (неустойчивость Кельвина – Гельмгольца) и др. Механика горных пород и сыпучих тел также имеет интересные примеры такого рода. Наверное, все наблюдали полигональные системы трещин, которые образуются при высыхании почвы после дождя. Различные системы трещин присущи и массиву горных пород. Они разбивают его на блоки различных масштабов, которые образуют определенную иерархию. Структуры могут формироваться и при некоторых способах деформирования сыпучих сред. Итак, мы видим, что при одних условиях нагружения в среде могут сформироваться регулярные структуры, а при других условиях никаких структур не возникает. Можно ли найти что-то общее в способах нагружения, которые приводят к образованию тех или иных структур? Попытаемся это сделать, используя следующие соображения.

Как и в [26], будем рассматривать структуры как нечто возникающее в процессе эволюции некоторой системы (в данном случае системы “деформируемая среда – устройство нагружения”). В такой постановке уместно поставить вопрос: каким условиям должен удовлетворять процесс, который предшествует возникновению структуры (назовем его базовым). Регулярность структуры означает ее инвариантность, однородность в пространстве. Поэтому и течение, которое предшествует возникновению структуры, должно быть как можно более однородным по пространству. Например, если x, y, z; r, θ, z — это декартовые или цилиндрические координаты, то распределение деформаций в базовом течении не должно зависеть: 1°) от всех трех координат и, значит, принадлежать к классу (1), либо 2°) от любых двух координат, декартовых или цилиндрических, либо 3°) от одной из координат. Аналогичные требования можно принять относительно сферических либо других криволинейных координат.

Таким образом, можно сформулировать следующий алгоритм получения регулярных структур:

— выбирается базовое течение, обладающее определенной степенью однородности по пространству;

— задается исходная конфигурация тела и по ней определяются соответствующие краевые условия в перемещениях (жесткое нагружение);

— создается устройство, реализующее необходимые краевые условия;

— реология среды и параметры нагружения выбираются такими, чтобы в определенный момент условия единственности базового течения нарушались.

В результате будет получен процесс, обладающий определенной регулярной структурой. Строгого доказательства приведенного алгоритма нет (это проблема 10), но все известные процессы с образованием регулярной структуры в указанный алгоритм вполне укладываются. Применение алгоритма позволяет получать различные структуры. На рис. 4 в качестве примера показана структура, возникающая из базового течения, близкого к (2) (материал — смесь песка и глицерина с водой).

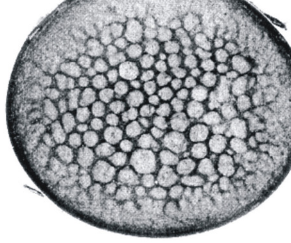

Рис. 4

Ничто не мешает в описанный алгоритм наряду с пространственными переменными включить и время. Это позволит рассмотреть различные временные структуры, т. е. случаи, когда стационарные внешние условия приводят к более-менее периодическим во времени процессам. Здесь прослеживается глубокая связь механики сыпучих сред с теорией нелинейных динамических систем, в том числе систем, описываемых последовательностью дискретных отображений [9, 27, 28].

Класс базовых течений и материалов, удовлетворяющий указанным условиям, весьма широк. Нет сомнений, что последовательная реализация данных течений позволит получить ряд новых регулярных структур, представляющих интерес (проблема 11).

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Давно стало общим местом утверждение о том, что любой фундаментальный результат рано или поздно найдет свои приложения. Механика сыпучих сред дает много примеров подобной связи. Сыпучая среда — это определенная упаковка частиц, т. е. упаковка твердых тел заданной формы. Задача исследования упаковок является весьма важной и находит приложения далеко за пределами механики. История ее исследования восходит к трудам Кеплера, Гильберта (18-я проблема Гильберта относится к упаковкам шаров), Кон-Фоссена, Дересевича и др. [29, 30]. С этой точки зрения изучение дилатансии сыпучих сред — это изучение вариации различных упаковок твердых тел. Параметры дилатансии закладываются в модель деформирования среды. Но они характеризуют и упаковку частиц, в частности ее устойчивость по отношению к различным возмущениям. Последнее обстоятельство имеет непосредственное прикладное значение.

Рассмотрим дилатансию при нагружении упаковки по некоторому замкнутому по деформациям циклу (например, сдвиг от 0 до 10° и назад от 10 до 0°). В [7] установлено, что здесь возможны два принципиально различных варианта. Первый — упаковка за один цикл полностью возвращается в исходное состояние, т. е. является обратимой. (При этом сами деформации упаковки являются, конечно, необратимыми.) Второй вариант — в результате циклического деформирования упаковка необратимо уплотняется. Это происходит за счет разрушения дефектов. Данное свойство можно использовать для создания достаточно плотных и однородных упаковок частиц порошковых материалов (дилатансионный способ уплотнения порошков).

Следующий пример показывает, как изучение одного специального теоретического вопроса (условия соосности тензоров напряжений и деформаций) приводит к новым результатам в области изучения приливного деформирования Земли, а также к решению ряда технологических задач.

При анализе сложного нагружения сыпучих сред (приближенная реализация течения (2)) обнаружен эффект дифференциального вращения среды в эллиптической области. Деформирование такой области представляет собой определенную модель деформирования небесного тела под действием приливных сил. Таким образом, исследование сложного нагружения сыпучих сред оказалось тесно связанным с изучением глобальной проблемы эволюции Земли и других небесных тел под действием приливных сил [10, 31].

Эффект дифференциального вращения приводит к постепенному и неограниченному нарастанию внутренних деформаций тела. Этот эффект можно использовать для обработки материалов, создания композиционных структур, разделения частиц материала по удельному весу (т. е. обогащению) и т. д. [8].

Фундаментальная система (1) была получена на основе общих соображений симметрии. Исходя из аналогичных соображений, можно получить и теоретическое решение задачи о смешивании порошковых материалов. Причем теоретическое решение подсказывает и способы его технической реализации. Коротко основную идею можно описать таким образом.

По собственному опыту мы знаем, что если не принимать специальных мер, то беспорядок в квартире будет только нарастать. Каковы максимальные степени порядка и беспорядка? Порядок — это когда, например, том 3 собрания сочинений писателя стоит строго на своем месте и только между томом 2 и томом 4. Максимальный беспорядок — это когда том 3 с одинаковой вероятностью можно обнаружить в любом месте квартиры. В некоторых технологических процессах требуется достичь именно максимального беспорядка, причем как можно быстрее. К одному из таких процессов относится смешение сыпучих (порошковых) материалов.

Пусть в емкость V помещено два порошковых материала, состоящих из отдельных твердых частиц. Они образуют некоторую упаковку. Требуется перемешать их так, чтобы распределение обоих компонентов материалов было равномерным.

Теоретическое решение задачи можно получить, опираясь на соображения симметрии, которые привели к уравнениям (1). Действительно, пусть $\bar{r}^0$ — радиус-вектор произвольной частицы A в начальной упаковке. Сделаем с материалом некоторые манипуляции и вернем смесь в емкость V. В новой упаковке частица A займет новое положение $\bar{r}$. Результатом манипуляции является смещение частицы на вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}^0$. Ничто не мешает трактовать вектор $\Delta\bar{r}$ как “свободный” пробег частицы A. Максимальному беспорядку и, значит, идеальной смеси соответствуют пробеги с плотностью вероятности, не зависящей от пространственных координат. Проще говоря, идеальными будут такие манипуляции, в результате которых любая частица A с одинаковой вероятностью может оказаться в любой точке области V. Этот факт не должен зависеть ни от массы, ни от размеров, ни от других характеристик частиц.

Есть единственный процесс, кинематика которого не зависит от свойств частиц, — это свободное падение в вакууме. Поэтому упаковку частиц следует разредить в пространстве и заставить свободно падать вниз. Если во время падения частицам придавать случайные компоненты скорости с равномерной плотностью вероятности, то за один цикл можно получить идеальную смесь [8].

ОТ ИЕРАРХИИ СТРУКТУРНЫХ УРОВНЕЙ ГОРНЫХ ПОРОД И СЫПУЧИХ ТЕЛ ДО СТРУКТУРНЫХ УРОВНЕЙ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Представление о блочно-иерархическом строении геосреды в настоящее время становится общепризнанным [32, 33]. Большую роль в этом сыграла работа [34], которая во многом опиралась на результаты [6].

Описание блочно-иерархической среды приводит к математическим моделям с внутренними переменными. Последовательное развитие таких моделей показывает, что иерархической структурой необходимо наделять также сами независимые переменные, т. е. пространственные переменные и время.

Это приводит к математическому аппарату, который имеет бóльшую степень разрешения, чем классический анализ [35]. Если бесконечно большому числу ω приписать неограниченную последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, …, то число $e^{\pi i \omega}$ можно обозначить как $(-j)$, где $j^2 = 1$ и j приписана последовательность (1, –1, 1, –1,…). Таким образом, мы попадаем в числовую область, имеющую неограниченно много масштабов как в мега- и микронаправлениях $(\ldots \omega^2,\ \omega, \omega^{-1},\ \omega^{-2},\ \ldots)$, так и в дополнительных измерениях $(1+j)$, $(1-j)$ и др. Здесь открываются принципиально новые возможности для различных теоретических построений и их дальнейших приложений.

ВЫВОДЫ

Механика сыпучих сред имеет широкую область приложений и связана с теорией пластичности, механикой горных пород и грунтов, синергетикой, теорией нелинейных динамических систем, статистической механикой, теорией точечных решеток и т. д. Исследование сложного нагружения сыпучих тел приводит к новым результатам в области изучения приливных деформаций Земли, анализ блочно-иерархического строения геосред — к одной из версий неархимедова математического анализа, в котором иерархией масштабных уровней наделены время и пространственные переменные.

Некоторые полученные результаты вошли в учебные курсы для студентов вузов и в концепцию современного естествознания [36, 37].

Автор глубоко признателен А. П. Бобрякову, В. Б. Бохонову, О. П. Бушмановой, С. В. Клишину, В. П. Косых, С. В. Лаврикову, О. А. Микениной, С. Б. Стажевскому, с которыми связаны многие годы совместной работы.

Особо хотелось бы отдать дань памяти академику Шемякину Евгению Ивановичу, который принимал участие в данных исследованиях и поддерживал их на всех этапах выполнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шемякин Е. И.** Волны напряжений при подземном взрыве в горных породах // ПМТФ. — 1963. —№ 5.
2. **Зворыгин Л. В., Курленя М. В.** Летопись Института горного дела Сибирского отделения РАН. — Новосибирск: Изд. дом “Новосибирский писатель”, 2004.
3. **Чинакал Н. А., Дзюбенко В. Т., Маревич Н. В., Жарков М. М.** Щитовая система разработки. — Новосибирск: Наука, 1972.
4. **Дубынин Н. Г.** Высокопроизводительная технология выпуска и доставки руды. — Новосибирск: Наука, 1969.
5. **Ревуженко А. Ф.** О самых простых течениях сплошной среды // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 1.
6. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3.
7. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5.
8. **Ревуженко А. Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: ЗАО ИПП “ОФСЕТ”, 2003.
9. **Revuzhenko A. F.** Mechanics of granular media, Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, 2006.
10. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О возможном механизме переноса масс Земли // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 272. — № 5.
11. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Сложное нагружение сыпучих материалов с изломами траекторий. Методика и экспериментальные результаты // ФТПРПИ. — 1994. — № 5.
12. **Димов А. И., Ревуженко А. Ф.** Один класс точных решений уравнений статики сыпучей среды // ПМТФ. — 1983. — № 3.

13. **Умов Н. А.** Избранные сочинения. — М.; Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1950.
14. **Ляв А.** Математическая теория упругости. — М.; Л.: Объед. науч.-техн. изд. НКТИ СССР, 1935.
15. **Ревуженко А. Ф., Клишин С. В.** Линии тока энергии в деформируемом горном массиве, ослабленном эллиптическими отверстиями // ФТПРПИ. — 2009. — № 3.
16. **Ревуженко А. Ф., Клишин С. В.** Численный метод построения континуальной модели деформирования твердого тела, эквивалентной заданной модели дискретных элементов // Физ. мезомеханика. — 2012. — Т. 15. — № 6.
17. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
18. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. — М.: Физматгиз, 1960.
19. **Бушманова О. П., Ревуженко А. Ф.** О пластическом деформировании в условиях локализации сдвигов на дискретной системе линий // Физ. мезомеханика. — 2002. — Т. 5. — № 3.
20. **Ревуженко А. Ф., Бобряков А. П., Косых В. П.** О течении сыпучей среды с возможным неограниченным скольжением по поверхностям локализации // ФТПРПИ. — 1997. — № 3.
21. **Ревуженко А. Ф., Косых В. П., Бобряков А. П.** О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения // ФТПРПИ. — 1998. — № 6.
22. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246. — № 3.
23. **Ревуженко А. Ф.** Вариационная постановка краевых задач разрушения // ПМТФ. — 1980. — № 4.
24. **Ревуженко А. Ф.** Нелокальные меры конечных деформаций // ПМТФ. — 1993. — № 6.
25. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об устойчивости деформирования блочного массива вокруг выработки // ФТПРПИ. — 1991. — № 1.
26. **Пригожин И.** От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985.
27. **Бобряков А. П., Косых В. П., Ревуженко А. Ф.** О временных структурах в процессах деформирования сыпучей среды // ФТПРПИ. — 1990. — № 2.
28. **Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.** О самоорганизации процесса деформирования сыпучего материала во вращающейся цилиндрической емкости // ФТПРПИ. — 2006. — № 6.
29. **Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
30. **Дересевич Г.** Механика зернистой среды // Проблемы механики. Вып. III / под общ. ред. Х. Драйдена и Т. Кармана. — М.: ИЛ, 1961.
31. **Ревуженко А.Ф.** Приливные волны и направленный перенос масс Земли. — Новосибирск: Наука, 2013.
32. **Адушкин В. В., Гарнов В. В., Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф., Спивак А. А.** Знакопеременная реакция горной породы на динамические воздействия // Докл. АН СССР. — 1992. — Т. 323. — № 2.
33. **Качарян Г. Г., Спивак А. А.** Динамика деформирования блочных массивов горных пород. — М.: ИКЦ “Академкнига”. — 2003.
34. **Садовский М. А.** О естественной кусковости горных пород // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4.
35. **Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной: Специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды. — Новосибирск: Наука, 2012.
36. **Булычев Н. С.** Механика подземных сооружений в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Недра. — 1987.
37. **Дубнищева Т. Я.** Концепция современного естествознания: учеб. пособие. — М.: Изд. центр “Академия”, 2003.

Поступила в редакцию 11/VIII 2014