УДК 539.374.1, 422.2

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЕ. ДИАГРАММА ДЕФОРМАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

А. М. Авдеенко

Московский институт стали и сплавов, 117934 Москва

На основе модели нелинейного псевдоконтинуума Коссера построена диаграмма деформации локально-неоднородной среды (пористой структуры либо системы с неперерезаемыми частицами). Рассмотрен модифицированный критерий геометрического разупрочнения, позволяющий установить зависимость момента потери устойчивости пластического течения от статистических характеристик среды.

Поле деформации, возникающее в процессе нагружения среды с порами или частицами второй фазы, неоднородно: частицы (поры) являются концентраторами напряжений и при больших значениях средних деформаций взаимодействуют друг с другом (течение окрестности поры вблизи соседней происходит интенсивнее). Нарастание локальных отклонений изменяет осредненную диаграмму деформации "чистой" (без пор или частиц) среды, причем мера влияния определяется не только концентрацией пор, но и статистикой — взаимным расположением пор (частиц), т. е. корреляционными функциями второго и, возможно, высших порядков.

Процесс разрушения необходимо рассматривать вместе с процессом деформации. Во-первых, пластическая деформация инициирует зарождение микротрещин (пор) на структурных неоднородностях — частицах второй фазы, заторможенных полосах сдвига, ослабленных сегрегациями границах зерен. Во-вторых, от величины деформации зависит слияние зародышевых микротрещин в мезотрещину, что ведет к "ямочному" вязкому излому в масштабах $0{,}1 \div 10{,}0$ мкм. Наконец, в-третьих, когда возможность пластической релаксации внешних нагрузок в целом исчерпана, это приводит к образованию магистральной трещины — макроразрушению [1].

Для построения адекватной модели разрушения необходимо прежде всего построить диаграмму деформации пористой среды (среды с частицами второй фазы) с учетом флуктуаций пластической деформации в ней, связать обобщенные параметры диаграммы деформации (например, эффективный показатель упрочнения) со статистикой неоднородности и сформулировать модифицированный критерий геометрического разупрочнения, позволяющий, в частности, решить задачу структурной оптимизации — найти соотношение количества и распределения частиц второй фазы (пор) при заданной диаграмме "чистой" среды, гарантирующее максимальную макроравномерную деформацию. Для решения этих вопросов необходимо модифицировать рассмотренную ранее в работах [2, 3] статистическую модель нелинейного псевдоконтинуума для учета локальных структурных неоднородностей.

Для статистического описания медленной (склерономной) деформации введем функционал плотности распределений флуктуаций полей смещения $A_\mu(\boldsymbol{r})$ ($\mu = 1, 2, 3$): $f[A_\mu] = \exp(-W[A_\mu])$. Производящий функционал рассматриваемой системы представим в виде функционального ряда

$$W[A_\mu] = \int \dots \int \sum_{k=2}^{\infty} \frac{V_k^{\mu p \dots q\nu}(\boldsymbol{r}_i)}{k} A_{\mu,p} \dots A_{q,\nu}\, d\boldsymbol{r}_1 \dots d\boldsymbol{r}_i \dots . \qquad (1)$$

Действительные тензоры $V_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$ ранга $2k$ назовем вершинами, первые k индексов ($\mu = 1,\, 2,\, 3$) будем относить к компонентам поля смещений A_μ, последующие k индексов ($\mu = 1,\, 2,\, 3$) — к пространственным производным $A_{\mu,p} = \partial A_\mu/\partial x_p$, $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Изменение поля $A_\mu(\boldsymbol{r})$ со временем деформации t назовем траекторией нагружения $A_\mu(\boldsymbol{r}, t)$. Плотность распределения $f[A_\mu]$ — монотонная функция $W[A_\mu]$, поэтому наиболее вероятному процессу соответствует траектория $\bar{A}_\mu$, удовлетворяющая вариационному уравнению $\delta W[A_\mu]/\delta A_\mu = 0$ при заданных граничных условиях. Его решение $\bar{A}_\mu$ назовем "классической" траекторией, разность $\delta A_{\mu,\nu} = A_{\mu,\nu} - \bar{A}_{\mu,\nu}$ — флуктуациями. В дальнейшем ограничимся рассмотрением так называемых "активных" траекторий. Длина траектории $s = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\dfrac{\partial \bar{A}_{\mu,\nu}}{\partial t}\, \dfrac{\partial \bar{A}^{\mu,\nu}}{\partial t}\Big)^{1/2} d\tau$, где $\bar{A}_{\mu,\nu} = \partial \bar{A}_\mu(\boldsymbol{r}, t)/\partial x_\nu$, увеличивается в процессе нагружения, "активная" эволюция вдоль "классической" траектории одинакова для всех микрообъемов v_i (М-образец в терминологии школы А. А. Ильюшина [4]).

Для построения производящего функционала флуктуаций полей деформации разложим функционал (1) в ряд в окрестности "классической" траектории $\bar{A}_{\mu,\nu}$. Если в (1) вершины имеют максимальный порядок n, то вершина флуктуаций $\bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$ имеет вид

$$\bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i) = \bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i) + \int \dots \int \sum_{p=3}^{n} V_{p,r\dots q}^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i') \bar{A}^{r,l}(\boldsymbol{r}_1', t) \dots \bar{A}^{s,q}(\boldsymbol{r}_p', t)\, d\boldsymbol{r}_1' \dots d\boldsymbol{r}_p'.$$

Интегрирование по $\boldsymbol{r}_1' \dots \boldsymbol{r}_p'$ на "М-образце" дает несущественную константу, пропорциональную объему тела в степени $p - k$. Тензору $\bar{A}^{r,l}$ поставим в соответствие вектор в m-мерном пространстве E_m (m — количество независимых компонент тензора $\bar{A}^{r,l}$) и представим комбинацию $\bar{A}^{\mu,\nu} \dots \bar{A}^{p,s}$ в виде функции внутренней геометрии "классической" траектории — ее длины s, кривизн $\vartheta_1(s) \dots \vartheta_{n-1}(s)$ и кручения $\vartheta_n(s)$ [4]. В этом случае $\bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i, t) = \bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i, \vartheta_n(s), s)$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением простых процессов (пропорционального нагружения), для которых скалярные кривизны и кручения тождественно равны нулю. Тогда $\bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i) = \bar{V}_k^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i, s)$, т. е. производящий функционал для простого (пропорционального) нагружения "М-образца" параметризуется вторым инвариантом тензоров производных полей смещения. Черта над вершиной и δ перед флуктуациями в дальнейшем опускаются.

Нормированное гауссово среднее с весом $\exp(-W)$ при $V_k^{\mu\dots\nu} = 0$ $(k > 2)$ назовем свободной корреляционной функцией деформации и представим в виде

$$R_{20}^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}) = C_2^{\mu\dots\nu} R_{20}(\boldsymbol{r}) = \langle A^{\mu,p}(\boldsymbol{r}') A^{q,\nu}(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r})\rangle =$$
$$= \int A^{\mu,p}(\boldsymbol{r}') A^{q,\nu}(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}) \exp(-W[A_\mu])\, dA_\mu \Big/ \int \exp(-W[A_\mu])\, dA_\mu. \qquad (2)$$

Здесь dA_μ — символ континуального интегрирования; $C_2^{\mu\dots\nu}$ — некоторый симметричный тензор.

Оператор $V_{20}^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$, обратный свободной корреляционной функции $R_{20}^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r})$, определим с помощью соотношения

$$\int V_2^{\mu\dots\nu}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1') R_{20,mpqn}(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2)\, d\boldsymbol{r}_1' = \delta_m^\mu \delta_n^\nu \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \qquad (3)$$

и назовем свободной вершиной второго порядка. Для системы с $V_k^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)=0$ $(k>2)$ свободная вершина второго порядка совпадает с вершиной $V_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$. В общем случае, когда $V_k^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)\neq 0$ $(k>2)$, нормированное двухточечное среднее с весом $\exp(-W)$ определяет полную корреляционную функцию $R_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r})$. Оператор $V_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$, обратный полной корреляционной функции, задается выражением (3) при замене $R_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r})\to R_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r})$. Этот оператор учитывает взаимодействия флуктуаций полей деформации (нелинейные эффекты) и в дальнейшем будет называться полной вершиной второго порядка. Полная вершина, вообще говоря, не совпадет с оператором при квадрате полевых переменных в производящем функционале (1), который теперь будет обозначаться $V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$.

Положим, что в исходном (ненагруженном) состоянии "классическая" траектория соответствует уравнению равновесия модели упругого псевдоконтинуума Коссера [5]

$$\nabla^2 A_\mu+\frac{1}{1-2\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\nu)-\xi_0^2\nabla^2(\nabla^2 A_\mu-\nabla_\mu\nabla^\nu A_\nu)=0,$$

где ξ_0 — структурный масштаб упругого псевдоконтинуума; $\nabla_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\nabla^2=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$.

Разобьем поле A_μ на продольную и поперечную составляющие: $A_\mu=A_\mu^n+A_\mu^t$, тогда соответствующие дисторсии $A^n_{\mu,\nu}=1/(n\delta_{\mu\nu}A_{k,k})$ и $A^t_{\mu,\nu}=A_{\mu,\nu}-A^n_{\mu,\nu}$. Свободную вершину второго порядка представим в виде суммы $V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)=V_{20}^{\mu\ldots\nu,n}(\boldsymbol{r}_i)+V_{20}^{\mu\ldots\nu,t}(\boldsymbol{r}_i)$:

$$V_{20}^{\mu\ldots\nu,n}(\boldsymbol{r}_i,s\to+0)=\frac{T_2^{\mu\ldots\nu,n}}{V\langle\varepsilon_2^2\rangle}\Big[\frac{3-2\nu}{1-2\nu}\Big]\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

$$V_{20}^{\mu\ldots\nu,t}(\boldsymbol{r}_i,s\to+0)=\frac{T_2^{\mu\ldots\nu,t}}{V\langle\varepsilon_1^2\rangle}[1+\xi_0^2\nabla^2]\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

где $\langle\varepsilon_1^2\rangle=V^{-1}\displaystyle\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,t}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$, $\langle\varepsilon_2^2\rangle=V^{1}\displaystyle\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,n}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$ — поперечные и продольные дисперсии флуктуаций полей деформации в ненагруженном состоянии; V — объем тела.

Можно показать, что в нагруженном состоянии свободные вершины продольных флуктуаций остаются неизменными, а для поперечных принимают вид

$$V_{20}^{\mu\ldots\nu,t}(\boldsymbol{r}_i,s\to+0)=\frac{T_2^{\mu\ldots\nu,t}}{V\langle\varepsilon_1^2\rangle}\,[\theta(s)+\xi_0^2\nabla^2]\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

где $\theta(s)=(1/G)\,d\tau/ds$ — касательный модуль упрочнения вдоль "классической" траектории, нормированный на модуль сдвига.

Соответствующие свободные корреляционные функции имеют вид

$$R_{20}^{\mu\ldots\nu,t}(\boldsymbol{r},s)=\frac{C_2^{\mu\ldots\nu,t}V\langle\varepsilon_1^2\rangle}{4\pi r\xi_0^2}\exp{(r/\xi)},\qquad R_{20}^{\mu\ldots\nu,n}(\boldsymbol{r},s)=C_2^{\mu\ldots\nu,n}V\langle\varepsilon_{12}^2\rangle\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$

где $C_2^{\mu\ldots\nu,t}=\delta^{\mu p}\boldsymbol{e}^q\boldsymbol{e}^\nu$; $C_2^{\mu\ldots\nu,n}=\boldsymbol{e}^\mu\boldsymbol{e}^\mu\boldsymbol{e}^\nu\boldsymbol{e}^\nu$; $\boldsymbol{e}^\nu$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{r}$; $\xi=\xi_0\theta^{-\alpha/2}$ — интервал корреляций флуктуаций поперечной деформации; $\alpha=1-(n+2)g_4/2$, где величина g_4 связана с вершиной четвертого порядка флуктуаций деформации соотношением $\displaystyle\int V_4^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i,s\to+0)\,d\boldsymbol{r}_i=T_4^{\mu\ldots\nu}g_4$; n — количество компонент поля A_μ [2, 3].

Дисперсии флуктуаций полей поперечной и продольной деформации выражаются соответственно следующим образом:

$$\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle=V^{-1}\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,t}(\boldsymbol{r},\theta)\,d\boldsymbol{r}=\langle\varepsilon_1^2\rangle\theta^{-\alpha},\qquad\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle=V^{-1}\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,n}(\boldsymbol{r},\theta)\,d\boldsymbol{r}=\langle\varepsilon_2^2\rangle,$$

и, так как за исключением узкой области в окрестности макроупругости $\theta \ll 1$ и $\langle\varepsilon_1^2\rangle \approx \langle\varepsilon_2^2\rangle$, то $\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle \gg \langle\varepsilon_2^2\rangle$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением статистики лишь поперечных флуктуаций полей деформации.

Безразмерный модуль упрочнения в процессе нагружения уменьшается $(d\theta/ds < 0)$, что ведет к степенным особенностям $\xi(\theta)$, $\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle$ с сохранением подобия $\langle\varepsilon_1^2\rangle/\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle = \xi_0^2/\xi^2(\theta)$. Для экспериментальных зависимостей $\xi(\theta)$, $\langle\varepsilon^2(\theta)\rangle$ для поликристаллов железа [6] и алюминия [2] значение индекса α лежит в интервале $1{,}1 \div 1{,}2$. Экстраполяция $\xi(\theta)$ к ненагруженному состоянию $s \to +0$ дает структурный масштаб $\xi_0 = 25 \div 100$ мкм.

Перейдем к приведенным переменным: $A_{\mu,\nu} \to A_{\mu,\nu}\xi_0 V^{-1/2}\langle\varepsilon_1^2\rangle^{-1/2}$, тогда в состоянии $s > 0$ свободная вершина второго порядка $V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i) = T_2^{\mu\ldots\nu}(\theta(s)\mu^2 + \nabla_\mu\nabla^\mu)\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$. После фурье-преобразования

$$V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p}) = \int V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\exp(i(\boldsymbol{pr} + \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1))\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}_1$$

имеем $V_{20}^{\mu\ldots\nu}(p) = T_2^{\mu\ldots\nu}(\theta(s)\mu^2 + p^2)$, где $\mu = \xi_0^{-1}$. Отсюда безразмерный модуль $\theta(s)$ упрочнения в состоянии $s > 0$ связан с $V_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p},\theta)$ соотношением

$$\theta(s) = \lim_{\boldsymbol{p}\to 0}(V_{20}(\boldsymbol{p},\theta)\mu^{-2}). \tag{4}$$

Учет дисперсных неоднородностей проведем в предположении, что величина λ^2 зависит от пространственной координаты: $\lambda^2 = \lambda^2(\boldsymbol{r})$. Определим среднее

$$\bar\lambda^2 = V^{-1}\int \lambda^2(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$$

и введем случайную функцию $\varphi(\boldsymbol{r}) = \mu^{-2}(\lambda^2(\boldsymbol{r}) - \bar\lambda^2)$.

В исходном состоянии $s \to +0$ для сред с заданным структурным масштабом среднее $\bar\lambda^2$ $(s \to +0)$ стремится к величине $\lambda^2 \to \mu^2(1 + \eta N_0)$, где N_0 — объемная доля неоднородностей. Величина $\eta = (G - G_1)/G$ (G_1 и G — упругие модули дискретной неоднородности и среды соответственно) определяет тип неоднородности: если структурная неоднородность — пора, то $\eta = -1$. В общем случае $(\eta \geqslant -1)$ положительному значению η соответствует частица с бóльшим упругим модулем. Полагается, что неоднородности не образуют связного кластера, их средний размер много меньше структурного масштаба среды, а случайная функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ реализует дельта-коррелированный (поры либо частицы не перекрывают друг друга) изотропный процесс: $\langle\langle\varphi(\boldsymbol{r}_1)\varphi(\boldsymbol{r}_2)\rangle\rangle = \Delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \Delta\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$, где угловые скобки означают осреднение по всем реализациям случайного поля $\varphi(\boldsymbol{r})$. Для пор $\Delta = N_0(1 - N_0)$, для частиц $\Delta = \eta^2 N_0(1 - N_0)$.

Производящий функционал для поля φ имеет вид

$$W_1[\varphi] = \int \frac{\varphi^2}{2\Delta}\,dr,$$

общий производящий функционал для системы с локальными неоднородностями — $W'[A_\mu,\varphi] = W[A_\mu] + \Delta W[A_\mu,\varphi] + W_1[\varphi]$, где $W[A_\mu]$ — производящий функционал в модели нелинейного псевдоконтинуума

$$\Delta W[A_\mu,\varphi] = \int \frac{\mu^2}{2}\,T_2^{\mu pq\nu}\varphi A_{\mu,p}A_{q,\nu}\,d\boldsymbol{r}.$$

Осредняя систему с производящим функционалом $W'[A_\mu,\varphi]$ по полю φ в континуальном смысле, получим производящий функционал флуктуаций полей деформации в модели нелинейного псевдоконтинуума с локальными неоднородностями

$$\exp(-W''[A_\mu]) = \int \exp(-W[A_\mu,\varphi])\,d\varphi$$

или

$$W'' = -\ln \int \exp\left(-W[A_\mu, \varphi]\right) d\varphi,$$

где $d\varphi$ — символ континуального интегрирования по полю φ.

Нормированные двухточечные средние с весом $\exp\left(-W''[A_\mu]\right)$ являются полными корреляционными функциями $R_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r})$ в модели нелинейного псевдоконтинуума с неоднородностями. Оператор $V_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i)$ (полная вершина второго порядка), обратный $R_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r})$, зависит теперь от статистики неоднородности — величины Δ. Соответствующий безразмерный модуль упрочнения по аналогии с (4) определяется соотношением $\Omega(s) = \lim\limits_{\boldsymbol{p}\to 0} V_2(\boldsymbol{p}, \Delta, \theta(s))$. Эффективное напряжение вдоль “классической” траектории имеет вид

$$\sigma(s) = \int\limits_1^{\theta(s)} \Omega(\theta)\, \frac{ds(\theta)}{d\theta}\, d\theta. \tag{5}$$

Таким образом, построение диаграмм деформации для нелинейных сред с заданной статистикой некоррелированных локальных неоднородностей сводится к осреднению функционала $W'[A_\mu, \varphi]$ по полю φ и вычислению полной вершины второго порядка $V_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p})$ в точке $\boldsymbol{p} = 0$ с последующим интегрированием (5).

Пусть в исходной модели $V_k^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{r}_i) = 0$ $(k > 2)$, тогда единственная нелинейность в системе с локальными неоднородностями связана со слагаемым $\varphi A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}$. Дисперсию локальной неоднородности $\Delta \approx N_0 \ll 1$ будем рассматривать как малый параметр разложения, тогда парная корреляционная функция в модели с неоднородностями в состоянии $s > 0$ имеет вид $R_2^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p}) = R_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p}) - R_{20}^{\mu\ldots q'}(\boldsymbol{p})\Sigma_{\mu'\ldots\nu'}(\boldsymbol{p})R_{20}^{p\ldots\nu'}(\boldsymbol{p})$, где $R_{20}^{\mu\ldots\nu}(\boldsymbol{p}) = C_2^{\mu\ldots\nu}(\mu^2\theta(s) + p^2)^{-1}$, $\Sigma_{\mu'\ldots\nu'}(\boldsymbol{p}) = \Delta T_{2,\mu'\ldots\nu'}\Big(\int R_{20}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} + 2\Delta \int R_{20}^2(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} + \ldots\Big) + O(\Delta^3)$.

Учитывая, что $C_2^{\mu\nu pq}T_{2,k\nu pq} = \delta_k^\mu$, $V_2(\boldsymbol{p}) = R_2^{-1}(\boldsymbol{p})$, и разрешая это выражение относительно $V_2(\boldsymbol{p})$, имеем

$$V_2(\boldsymbol{p}) = V_{20}(\boldsymbol{p}) + \Sigma(\boldsymbol{p}, \Delta) = V_{20}(\boldsymbol{p}) - \bar{\Delta}(\theta) \int R_{20}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q},$$

где $\bar{\Delta}(\theta) = \Delta + 2\Delta^2 \int R_{20}^2(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} + O(\Delta^3)$.

Переходя к пределу $\boldsymbol{p} \to 0$ и учитывая определение (5), получим выражение для безразмерного модуля упрочнения локально-неоднородной среды в виде

$$\Omega(\theta) = (1 + \eta N_0)(\theta + \mu^{-2}\bar{\Delta}(\theta)) \int R_{20}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}, \qquad \bar{\Delta}(\theta) = \Delta + 2\Delta^2 \int R_{20}^2(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} + \ldots.$$

При вычислении интегралов $J_1 = \int R_{20}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}$, $J_2 = \int R_{20}^2(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}$ для исключения особенностей необходима регуляризация, определяемая таким образом, чтобы в ненагруженном состоянии $\Omega(\theta) = \theta(s \to +0)(1 + \eta N_0) = 1 + \eta N_0$ [3, 6]. Соответствующие регуляризованные интегралы имеют вид

$$J_1(\text{reg}) = \int R_{20}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2}\, \mu^2\theta \ln \theta, \qquad J_2(\text{reg}) = \int R_{20}^2(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} = -\frac{1}{2}\, \ln \theta.$$

Окончательно получаем

$$\Omega(\theta) = (1 + \eta N_0)\theta\Big(1 + \frac{1}{2}\, \bar{\Delta}(\theta)\, \ln \theta + \ldots\Big), \qquad \bar{\Delta}(\theta) = \Delta(1 - \Delta \ln \theta + \ldots). \tag{6}$$

Соотношений (6) достаточно для построения диаграммы деформации нелинейной среды с неоднородностями: первое соотношение учитывает локальную перегрузку структуры ($\Omega(\theta) \approx \Delta \ln \theta$), второе — эффективное взаимодействие локальных неоднородностей ($\bar{\Delta}(\theta) \approx \Delta^2 \ln \theta$). Существенно, что в полученные соотношения для Ω и $\bar{\Delta}$ не входит величина структурного масштаба ξ_0.

Уточнение соотношения (6) возможно следующим образом. Введем функции $F_1(\theta) = \Omega/\theta$, $F_2(\theta) = \bar{\Delta}(\theta)/\Delta$. Поскольку $F_1(1) = F_2(1) = 1$, то справедливы равенства $F_1(\theta_1)/F_1(\theta_2) = 1/F_1(\theta_1/\theta_2)$, $F_2(\theta_1)/F_2(\theta_2) = 1/F_2(\theta_1/\theta_2)$, что равносильно системе ренормгрупповых уравнений

$$\theta \frac{d \ln \Omega}{d\theta} = \theta \frac{d \ln \Omega}{d\theta}\Big|_{\theta=1} + \frac{d \ln \Omega}{d\Delta} \frac{d\Delta}{d\theta}\Big|_{\theta=1}, \qquad \theta \frac{d\bar{\Delta}}{d\theta} = \theta \frac{d \ln \Delta}{d\theta}\Big|_{\theta=1}.$$

Решение этой системы при начальном условии $\Omega(s \to +0) = 1 + \eta N_0$ имеет вид

$$\Omega(\theta) = (1 + \eta N_0)\theta \exp\Big(\int\limits_{\Delta}^{\bar{\Delta}} \frac{A(\Delta)}{B(\Delta)}\, d\Delta\Big),$$

где $A(\Delta) = \dfrac{d \ln \Omega}{d \ln \theta}\Big|_{\theta=1}$; $B(\Delta) = \dfrac{d\bar{\Delta}}{d\theta}\Big|_{\theta=1}$.

Первые члены разложения $\Omega(\theta)$ по Δ совпадают с выражением (4), однако приближение более точное за счет эффективного суммирования слагаемых, содержащих сколь угодно высокую степень Δ.

Выполняя вычисления в первом приближении Δ, имеем

$$\Omega(\theta) = (1 + \eta N_0)\theta^{1+\nu(\theta)}, \tag{7}$$

где $\nu(\theta) = (1/2)\ln(1 + 2\Delta \ln \theta)/\ln \theta = (1/2)\bar{\Delta}(\theta) \approx \Delta(1 - \Delta \ln \theta)^{-1} + O(\Delta^3)$.

Подстановка (7) в (5) позволяет получить диаграмму деформации "чистой" среды ($N_0 = 0$), учитывающую статистику неоднородности.

Явное интегрирование (5) возможно лишь в первом порядке по Δ для некоторых частных зависимостей $\theta(s)$. Пусть "классическая" траектория в истинных координатах аппроксимируется зависимостью $\sigma(s) = \sigma_0 s^m$ ($m < 1$).

В ненагруженном состоянии ($s \to +0$) $\theta(s) \approx s^{m-1} \to \infty$, поэтому ограничимся рассмотрением деформации $s \geqslant s_1$, при этом $\lim\limits_{s \to s_1} \theta(s) \to 1 - 0$. Отсюда соответствующее значение напряжения $\sigma(s_1) = \sigma_1 = m^{-1}(\sigma_0 m)^{1/(1-m)}$. Подставляя эту зависимость в (3), после интегрирования получим $\sigma(\theta) = (1 + \eta N_0)\sigma_1(1 + (m/M)(\theta^{M/(m-1)} - 1)) = (1 + \eta N_0)\sigma_1(1 + (m/M)((s/s_1)^M - 1))$, где $M = m - \Delta(1 - m)$.

Для большинства пластичных материалов $\sigma_0 = (2 \div 9) \cdot 10^{-3}$ (истинное напряжение нормируется модулем сдвига), $m = 0{,}2 \div 0{,}3$ [1], отсюда $s_1 = 10^{-4} \div 10^{-3}$ и для реальных процессов $s/s_1 \gg 1$, поэтому $\sigma(s) \approx \sigma_0 s^M$. Показатель упрочнения M всегда меньше показателя для "чистой" среды, причем относительная погрешность $(M - m)/m = \Delta(1 - m)/m \approx \eta^2 N_0(1 - m)/m$ увеличивается с увеличением N_0, η и уменьшением m. В области малых $N_0 < 0{,}02$ величина $(M - m)/m$ сравнима с дисперсией воспроизводимости показателя упрочнения "чистой" среды $\delta m/m$, и ее вкладом можно пренебречь [7]. Уменьшение безразмерного модуля упрочнения θ ведет к увеличению Δ, т. е. к уменьшению величины M независимо от знака η (при $-\Delta \ln \theta \approx 1$ необходимо учитывать высшие порядки теории возмущений).

Для активного простого нагружения определим эффективный показатель упрочнения

$$M(\theta) = \frac{d\,\ln\,\sigma(\theta)}{d\,\ln\,\theta}\,\frac{d\,\ln\,\theta}{d\,\ln\,s} = \frac{\Omega(\theta)s(\theta)}{\sigma(\theta)},$$

где $s(\theta)$ — истинная деформация; $\Omega(\theta)$, $\sigma(\theta)$ — эффективный модуль упрочнения и напряжение соответственно.

В ненагруженном состоянии $s \to +0$ $(\theta \to 1-0)$, поэтому $\sigma(\theta \to 1-0) = \lim\limits_{s\to+0} \theta(s)s(\theta)$ и $M(s \to +0) = 1$ (упругая система).

Рассмотрим простой активный процесс — одноосное растяжение. Пусть Σ — текущее сечение образца, F — приложенная сила. Пластическое течение устойчиво при $dF = -\sigma d\Sigma + \Sigma d\sigma > 0$ или $d\,\ln\,\sigma/d\,\ln\,s > s$, поскольку $d\Sigma = -\Sigma\,ds$. В противном случае $d\,\ln\,\sigma/d\,\ln\,s < s$ макрооднородное течение неустойчиво: при одноосном растяжении образуется шейка $(d\,\ln\,\sigma/d\,\ln\,s = s)$. Для степенной аппроксимации истинной диаграммы $\sigma = \sigma_0 s^m$ решение уравнения $d\,\ln\,\sigma/d\,\ln\,s = s$ принимает наиболее простой вид $s_{\text{p}} = m$. При $s > m$ течение устойчиво, при $s < m$ происходит локализация.

Учет флуктуационных поправок в рамках рассматриваемой концепции требует замены показателя m эффективной величиной $M(\theta)$. Модифицированный критерий потери устойчивости течения принимает вид

$$M(\theta) - s(\theta) = 0 \tag{8}$$

или

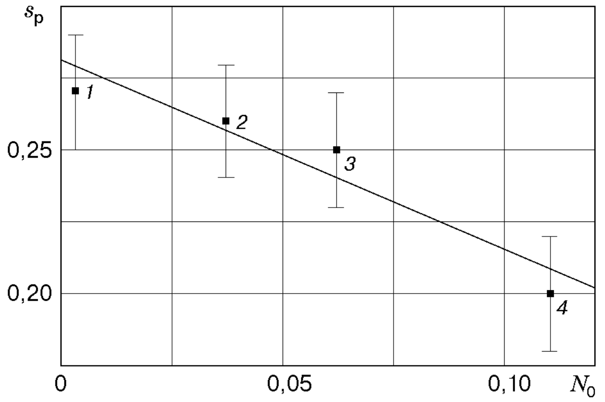
$$\sigma(\theta) - \Omega(\theta) = 0. \tag{9}$$

Единственное решение уравнений (8), (9) относительно θ (величина θ_{p}) и соответствующая равномерная деформация s_{p} зависят от дисперсии Δ и параметров диаграммы деформации, поскольку $\theta(s)$ — гладкая убывающая функция истинной деформации.

В нулевом приближении теории возмущений $s_{\text{p}}^0 = m$, в высших приближениях необходимо численное решение уравнений (8), (9). Для пористой структуры на основе чистого железа ($\sigma_0 = 8{,}63\cdot 10^{-3}$, $m = 0{,}31$, $\eta = -1$) получены следующие результаты: увеличение концентрации пор уменьшает равномерную деформацию с $s_{\text{p}} \approx 0{,}27$ при $N_0 = 0{,}05$ до $s_{\text{p}} \approx 0{,}14$ при $N_0 = 0{,}15$. Если $\Delta \ll m/(1-m)$, можно пренебречь изменением величины Δ в процессе нагружения: $\Delta \ll \ln^{-1}\theta_{\text{p}}^0$, где $\theta_{\text{p}}^0 = \theta_{\text{p}}|_{s=m} \ll 1$. Тогда $s_{\text{p}}(\Delta) = s_{\text{p}}(0) - \Delta(1-m)$, где $s_{\text{p}}(0) = m$ — макроравномерная деформация "чистой" среды. Для пористой структуры $\Delta = N_0(1-N_0)$, тогда при $N_0 \ll 1$

$$s_{\text{p}}(N_0) = m - N_0(1-m). \tag{10}$$

Сопоставим это соотношение с экспериментом для пористого железа, полученного спеканием и компактированием с различной объемной долей пор N_0 [7]. Технологические поры распределены изотропно и равномерно. Их диаметр $1{,}5 \div 3{,}0$ мкм много меньше структурного масштаба $\xi_0 = 20 \div 30$ мкм упругого псевдоконтинуума, определенного для матрицы из статистики рельефа деформации [6]. На рисунке представлена зависимость макроравномерной деформации (одноосное растяжение) от концентрации пор N_0 по данным [7] с учетом стандартной оценки среднеквадратичного отклонения. Увеличение концентрации пор приводит к уменьшению макроравномерной деформации с примерно 0,27 при $N_0 = 0{,}003$ до примерно 0,2 при $N_0 = 0{,}1$. В области $N_0 < 0{,}11$ зависимость $s_{\text{p}}(N_0)$ линейна: $s_{\text{p}}(N_0) = (0{,}279 \pm 0{,}009) - (0{,}659 \pm 0{,}145)N_0$. Свободный член $0{,}279 \pm 0{,}009$ и угол наклона $0{,}659 \pm 0{,}145$ в пределах ошибки воспроизводимости совпадают с показателем упрочнения основы (чистого железа) $m = 0{,}27 \pm 0{,}02$ и величиной $1 - m = 0{,}63 \pm 0{,}02$ соответственно, что согласуется с (10) и подтверждает правомерность предложенной схемы построения диаграммы деформации неоднородной среды.



Равномерная деформация пористого железа:
1 — $N_0 = 0{,}003$; *2* — $N_0 = 0{,}037$; *3* — $N_0 = 0{,}062$; *4* — $N_0 = 0{,}110$

Таким образом, когда среднее расстояние между изотропными порами $N_0^{-1/3}$ не менее 2–3 диаметров пор, равномерная деформация пористой структуры хорошо определяется по диаграмме деформации сплошной среды в пределе дельта-коррелированной модели с учетом лишь двухточечных корреляционных функций полей деформации, хотя рост пор и зарождение микротрещин в явном виде не учитываются вплоть до значений истинных деформаций примерно 0,2.

Рассмотренная модель представляет собой лишь первое приближение реальной структуры локально-неоднородной среды. Эффекты следующего порядка связаны, очевидно, с размещением частиц второй фазы (пор) кластерами, когда интервал корреляции (полупериод структуры) $l_{\text{к}}$ может быть сравним с величиной структурного масштаба ξ_0. Это требует учета поправок порядка $l_{\text{к}}/\xi_0$ к величине Δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Штремель М. А.** Прочность сплавов. М.: Моск. ин-т стали и сплавов, 1997. Ч. 2.
2. **Авдеенко А. М.** Критические явления при пластической деформации // Металлофизика. 1990. Т. 2, № 5. С. 7–12.
3. **Авдеенко А. М.** Скейлинг структурно-неоднородных сред // Изв. АН СССР. Металлы. 1992. № 9. С. 64–67.
4. **Ильюшин А. А.** Механика сплошных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
5. **Лихачев В. А., Малинин В. Г.** Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука. С.-Петерб. отд-ние, 1993.
6. **Авдеенко А. М., Кузько Е. И., Штремель М. А.** Развитие неустойчивости пластической деформации как самоорганизация // Физика твердого тела. 1994. № 10. С. 3158–3161.
7. **Spitzig W. A., Smelser R. E., Richmond O.** The evolution of damage and fracture in iron compacts with various initial porosities // Acta Metall. 1988. V. 36, N 5. P. 1201–1211.

Поступила в редакцию 16/VII 1999 г.,
в окончательном варианте — 11/X 1999 г.