ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ СМАЗОЧНЫЙ СЛОЙ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

И. И. Шидловская, В. П. Шидловский
(Москва)

Постановка общей задачи неизотермической газовой смазки на основе уравнений Рейнольдса и отдельные решения этой задачи даны в работах [1,2]. Может представлять практический и теоретический интерес тот случай, когда имеются внешние магнитные и электрические поля, а смазывающая среда обладает отличной от нуля электропроводностью. Для несжимаемой проводящей жидкости постановку такой задачи наиболее четко сформулировал Шукла [3], а для изотермического газового слоя — Константинеску [4,5], который провел также ряд количественных оценок.

Авторы данной работы дают формулировку и исследуют некоторые принципиальные особенности задачи о трехмерном слое неизотермической электропроводной газовой смазки при наличии поперечного магнитного поля.

Пусть имеется газовый слой, часть которого схематически изображена на фиг. 1. Поверхность, расположенная в плоскости $x0z$, движется в направлении оси x с постоянной скоростью U, а противоположная поверхность неподвижна, причем ни одна из поверхностей не является токопроводящей. При помощи тех или иных средств (воздействие излучения, введение ионизирующих присадок и т. п.) обеспечивается отличие от нуля электропроводности σ смазывающего газа; будем считать, что $\sigma = \mathrm{const}$.

Вся система находится во внешнем магнитном поле H_0, направленном вдоль оси y. В дальнейшем рассматриваются только те случаи, когда магнитные числа Рейнольдса R_m малы и когда индуцированным магнитным полем можно пренебречь, считая $H \equiv H_0 = \mathrm{const}$.

Введем безразмерные обозначения составляющих скорости газа u, v, w, плотности ρ, температуры T и давления p, выбирая в качестве масштабов значения на поверхности xz и давление p_0 на некоторой линии, параллельной оси y. В качестве масштаба отсчета длин по направлениям x, z берется l (характерный размер подшипника), а по направлению y — средняя толщина зазора h_0.

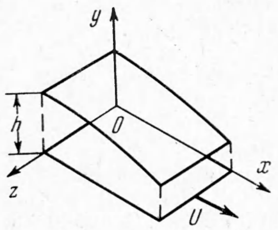
Введем также общепринятые безразмерные величины

$$P = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \qquad M = \frac{U}{\sqrt{RT_0}}, \qquad \Lambda = \frac{U\mu_0 l}{h_c^2 p_0}, \qquad G = h_0 \mu_e H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_0}}$$

Здесь P — число Прандтля, M — число Маха, Λ — характеристическое число газового подшипника, G — число Гартмана.

В работе [1] показано, что если величина $\alpha = (\varkappa - 1)\ \mathrm{Pr}\ M^2$ мала, а коэффициент вязкости связан с температурой степенным законом, то в приближении теории газовой смазки (гидродинамическое число Рейнольдса $\mathrm{Re} = O(1)$, $(h_0 / l)^2 \ll 1$) уравнение энергии позволяет получить выражение температуры

$$T = \left[(\chi^{n+1} - 1)\frac{y}{h} + 1\right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{1}$$



Фиг. 1

Здесь χ — постоянное отношение температур подвижной и неподвижной поверхностей, n — показатель степени в законе зависимости вязкости от температуры. Обращаясь к магнитогазодинамической задаче, нетрудно установить, что отношение члена, характеризующего джоулеву диссипацию, к основному члену уравнения энергии, связанному с теплопроводностью, пропорционально величине

$$\beta = (\varkappa - 1)\ P\ M^2 G^2$$

Следовательно, при условии малости параметра β джоулева диссипация не влияет на температуру и выражение (1) остается в силе. Дальнейшие рассуждения будут относиться именно к этому случаю.

Исключив, таким образом, из рассмотрения уравнение энергии, достаточно исследовать уравнение состояния, три проекции уравнений движения и уравнение неразрывности. Добавляя к прежним предположениям допущение о том, что смазывающая среда — совершенный газ, получаем

$$p = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\rho T, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(T^n \frac{\partial u}{\partial y}\right) - G^2 u = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(T^n \frac{\partial w}{\partial y}\right) - G^2 w = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Как уже упоминалось, случай T=const исследовался в работах [4,5] и поэтому исключается из рассмотрения. При переменной температуре внутри смазочного слоя, т. е. при $\chi \neq 1$, уравнение (1) дает однозначную зависимость $T = T(y)$ при фиксированном h (фиксированные значения x, z). Это позволяет в уравнениях движения системы (2) от переменной y перейти к новой независимой переменной T. При этом

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\chi^{n+1}-1}{(n+1)h}\left[(\chi^{n+1}-1)\frac{y}{h}+1\right]^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\chi^{n+1}-1}{(n+1)h}T^{-n}\frac{\partial}{\partial T}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}$$

Величины $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial z$ предполагаются конечными. В результате система (2) преобразуется к виду

$$p = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\rho T, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - G^2\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n u = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial T^2} - G^2\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n w = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n, \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Первая стадия решения сводится к интегрированию второго и четвертого уравнений (3), т. е. к представлению скоростей u и w в форме выражений, содержащих производные давления $\partial p / \partial x$ и $\partial p / \partial z$. Уравнения для u и w имеют аналогичную структуру; проведем решение одного из них, а именно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - G^2\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n u = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^2(n+1)^2}{(\chi^{n+1}-1)^2}T^n \tag{4}$$

Вследствие того, что величины p и h зависят только от x и z, уравнение допускает интегрирование по одной независимой переменной, а именно T. Уравнение линейное, поэтому общее решение есть сумма общего решения без правой части и частного решения с правой частью. Известно (см., например, [6]), что решение уравнения такого типа без правой части выражается через бесселевы функции в форме

$$u^{(0)} = \sqrt{T}Z_\nu\left(\frac{2}{n+2}G\frac{h(n+1)}{(\chi^{n+1}-1)}T^{\frac{n+2}{2}}\right), \qquad \nu = \frac{1}{n+2} \tag{5}$$

В формуле (5) через Z_ν обозначается линейная комбинация функций Бесселя чисто мнимого аргумента

$$Z_\nu(\xi) = C_1 I_\nu(\xi) + C_2 I_{-\nu}(\xi), \qquad \xi = 2G\frac{(n+1)h}{(n+2)(\chi^{n+1}-1)}T^{\frac{n+2}{2}} \tag{6}$$

Методом вариации постоянных, используя выражение вронскиана комплекса фундаментальных решений модифицированного уравнения Бесселя [7]

$$I_\nu'(\xi)I_{-\nu}(\xi) - I_\nu(\xi)I_{-\nu}'(\xi) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi\xi}$$

и связанное с ним выражение

$$I_{1-\nu}(\xi)I_\nu(\xi) - I_{\nu-1}(\xi)I_{-\nu}(\xi) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi\xi}$$

можно получить также частное решение уравнения (5) с правой частью. В итоге общие решения уравнения (3) относительно u и w принимают вид

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{T}[f_1(x,z)I_\nu(\xi) + f_2(x,z)I_{-\nu}(\xi)] - \frac{1}{G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x} \\ w &= \sqrt{T}[f_3(x,z)I_\nu(\xi) + f_4(x,z)I_{-\nu}(\xi)] - \frac{1}{G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \tag{7}$$

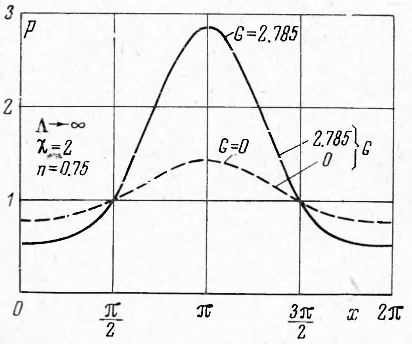
Произвольные функции f_1, f_2, f_3 и f_4 определяются из граничных условий, которые для температуры и составляющих скорости имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} &T = 1, \quad u = 1, \quad v = w = 0 \quad \text{при } y = 0 \\ &T = \chi, \quad u = v = w = 0 \quad \text{при } y = h \end{aligned} \tag{8}$$

Если обратиться к формуле (6), то получим

$$\xi = \xi_0 = 2G\frac{(n+1)h}{(n+2)(\chi^{n+1}-1)} \quad \text{при } y=0, \qquad \xi = \xi_0\chi^{1/2(n+2)} \quad \text{при } y = h \tag{8a}$$

На основании условий (8) и (8а) получим



Фиг. 2

$$f_1 = -\frac{1}{A_\nu}\left[I_{-\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) + \frac{1}{G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}C_{-\nu}\right]$$

$$f_2 = \frac{1}{A_\nu}\left[I_\nu(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) + \frac{1}{G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}C_\nu\right]$$

$$f_3 = -\frac{1}{A_\nu G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial z}\left[I_{-\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - \chi^{-\frac{1}{2}}I_{-\nu}(\xi_0)\right]$$

$$f_4 = \frac{1}{A_\nu G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial z}\left[I_\nu(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - \chi^{-\frac{1}{2}}I_\nu(\xi_0)\right]$$

$$A_\nu = I_\nu(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0)\, I_{-\nu}(\xi_0) - I_{-\nu}(\xi_0)\, I_{-\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0)$$

$$C_{\pm\nu} = I_{\pm\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - \chi^{\frac{1}{2}}I_{\pm\nu}(\xi_0)$$

Следующий этап решения задачи связан с подстановкой выражений (7) в уравнение неразрывности, т. е. последнее уравнение системы (3), которое удобнее представить в интегральной форме, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\int_0^h \frac{u}{T}\,dy\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\int_0^h \frac{w}{T}\,dy\right) = 0 \tag{10}$$

Интегрирование функций u/T и w/T, получаемых из выражений (7), упрощается с учетом возможности замены

$$dy = \frac{h(n+1)}{\chi^{n+1}-1}T^n dT = \frac{1}{G}\,T^{\frac{n}{2}}d\xi$$

При преобразовании уравнения (10) в уравнение для определения давления приходится вводить некоторые, непредставимые в аналитической форме интегралы типа

$$D_{\pm\nu}(\xi) = \int_\alpha^\xi \xi^{1-3\nu}I_{\pm\nu}(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

Здесь α — постоянная величина, не равная какому-либо из значений ξ_0 или $\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0$, но близкая к одному из них по своему порядку. Введем также обозначение

$$B_{\pm\nu} = D_{\pm\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - D_{\pm\nu}(\xi_0) \tag{12}$$

Если применить, кроме того, введенные ранее обозначения A_ν и $C_{\pm\nu}$, то упомянутое выше уравнение может быть представлено в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left\{h^{3\nu-1}p\left\{\frac{1}{G^2\Lambda}\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{B_{-\nu}C_\nu - B_\nu C_{-\nu}}{A_\nu} - \frac{1}{2(1-2\nu)}\left(\frac{2G(1-\nu)h}{\chi^{(1-\nu)/\nu}-1}\right)^{2-3\nu}(\chi^{\frac{1-2\nu}{\nu}}-1)\right] + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{A_\nu}\left[B_{-\nu}I_\nu(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - B_\nu I_{-\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0)\right]\right\}\right\}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{h^{3\nu-1}\frac{1}{G^2\Lambda}p\frac{\partial p}{\partial z}\left[\frac{B_{-\nu}C_\nu - B_\nu C_{-\nu}}{A_\nu} - \right.\right. \tag{13}$$
$$\left.\left. \frac{1}{2(1-2\nu)}\left(\frac{2G(1-\nu)h}{\chi^{(1-\nu)/\nu}-1}\right)^{2-3\nu}(\chi^{\frac{1-2\nu}{\nu}}-1)\right]\right\} = 0$$

Если известен индекс ν (иначе говоря, если известен показатель степени n в законе связи между вязкостью и температурой), а также число Гартмана G, характеристическое число газового подшипника Λ и отношение температур поверхностей χ, то для определенной функции $h(x, z)$, характеризующей форму зазора, и при определенных граничных условиях из уравнения (13) можно найти давление p на любой линии, параллельной оси y. Можно убедиться, что в предельном случае $G \to 0$ уравнение (13) совпадает с аналогичным уравнением теории неизотермической газовой смазки [1].

Как показано в работах [1,2], решение уравнения (13) даже в простейшем случае $G = 0$ осуществляется либо численными методами, либо при помощи тех или иных упрощений. Еще в большей степени это относится к случаю $G \neq 0$.

Представляет интерес одна характерная особенность поведения давления при $\Lambda \to \infty$, являющаяся следствием уравнения (13). В случаях $G = 0$, а также $G \neq 0$, но $\chi = 1$ (см. [5]), предельный переход $\Lambda \to \infty$ приводил к условию

$$ph = \text{const} \tag{14}$$

Из уравнения (13) видно, однако, что в неизотермическом газовом слое с конечным числом Гартмана асимптотическое условие (14) уже не имеет места. Вместо него появляется значительно более сложное условие

$$p\iota^{3\nu-1}\frac{B_{-\nu}I_\nu(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0) - B_\nu I_{-\nu}(\chi^{\frac{1}{2\nu}}\xi_0)}{A_\nu} = \text{const} \tag{15}$$

Как видно из формул (9), (11) и (12), величины A_ν и $B_{\pm\nu}$ содержат некоторые комбинации функций Бесселя от чисто мнимого аргумента и интегралов, содержащих эти функции, но не представимых, вообще говоря, в аналитической форме. Кроме того, табличная форма самих функций $I_{\pm\nu}(\xi)$ точно известна только для некоторых дискретных значений показателя степени n (например, $n = 1$, что соответствует $\nu = {}^1/_3$). Однако один из наиболее простых путей решения уравнения (13) в общем случае произвольного n связан с представлением бесселевых функций $I_{\pm\nu}(\xi)$ посредством сходящихся степенных рядов [7]

$$I_{\pm\nu}(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,\Gamma(1+r\pm\nu)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2r\pm\nu} \tag{16}$$

Пользуясь рядами (16), для любого данного значения $\nu = (n+2)^{-1}$ легко вычислить определяемые формулами (9) величины A_ν и $C_{\pm\nu}$. Путем подстановки этих же рядов в подынтегральные выражения формул (11) получим

$$D_{\pm\nu}(\xi) = 2^{2-3\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,(2r+2-3\nu\pm\nu)\,\Gamma(1+r\pm\nu)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2r+2-3\nu\pm\nu}\Bigg|_{\alpha}^{\xi} \tag{17}$$

Вычисляя с необходимой степенью точности правые части формулы (17), нетрудно, пользуясь (12), найти $B_{\pm\nu}$ и получить все данные для решения уравнения (13).

Все высказанные выше соображения относятся и к условию (15), определяющему асимптотическое поведение давления в неизотермическом слое проводящего газа при конечном числе Гартмана. Авторы работы [5] указывают, что несущая способность изотермического подшипника может быть как увеличена, так и уменьшена за счет изменения направления вектора $\mathbf{H}_0$ и величины числа Гартмана; безусловно этот тезис остается справедливым и для неизотермического подшипника. Однако количественная сторона этого эффекта здесь не выяснялась. Для оценки же изменения асимптотики давления были проведены вычисления применительно к конкретному примеру. Были выбраны следующие параметры: $n = {}^3/_4$ $(\nu = {}^4/_{11})$, $\chi = 2$, эксцентриситет радиального подшипника $\eta = 0.3$, число Гартмана $G = 2.785$. Как видно из фиг. 2, где показаны кривые распределения давления при $\Lambda \to \infty$ для данного значения G и для $G = 0$, разница получается весьма существенной. Следовательно, поведение характеристик течения в смазочном слое при $\chi \neq 1$ и $G \neq 0$ невозможно охарактеризовать при помощи одного лишь введения поправок к известным решениям.

Поступила 4 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шидловская И. И. Постановка и решение задач о газовой смазке при больших поперечных перепадах температуры. Revue Roumaine des sciences techniques, ser. Mécanique appliquée, 1966, t. 11, No. 1.
2. Шидловская И. И. Некоторые задачи теории газовой смазки с учетом температурных изменений. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
3. Shukla J. B. Principles of hydromagnetic lubrication. J. Phys. Soc. Japan, 1963, vol. 18, No. 7.
4. Constantinescu V. N. On the magnetogasdynamic lubrication. Revue Roumaine des sciences techniques, ser. Mécanique appliquée, 1966, t. 11, No. 4.
5. Constantinescu V. N., Dimofte F. On the influence of magnetic and electrical fields on gas lubrication. Revue Roumaine des sciences techniques, ser. Mécanique appliquée, 1967, t. 12, No. 6.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
7. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., Изд-во иностр. лит., 1953.