

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТСЛОЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОКРЫТИЯ

А. О. Ватульян, К. Л. Морозов

Южный федеральный университет, 344049 Ростов-на-Дону, Россия

E-mails: vatulyan@aaanet.ru, morozovkl1996@gmail.com

Проведено исследование потери устойчивости и закритического поведения неоднородных покрытий. На основе вариационной трактовки задачи и метода Ритца изучено изменение первого критического значения нагрузки, при котором происходит потеря устойчивости, в зависимости от параметров задачи, проведены расчеты для неоднородного покрытия двух типов: покрытия с кусочно-постоянной жесткостью и покрытия с непрерывно изменяющейся жесткостью, имеющей точку максимума внутри и вне зоны отслоения. Изучено закритическое поведение покрытия.

Ключевые слова: отслоение, тонкое покрытие, коэффициенты постели, закритическое поведение, метод Ритца.

DOI: 10.15372/PMTF20210616

Введение. Исследование процесса отслоения покрытия от упругого основания проводится при анализе эффективности покрытий различного назначения (антикоррозионных, термобарьерных и др.). Как правило, технологические процессы, связанные с нанесением покрытий, сопровождаются значительными изменениями температуры, а возникающие при несоблюдении режима охлаждения предварительные напряжения способствуют возникновению зон ослабленных связей, развитию отслоения и преждевременному разрушению покрытия. В последнее время увеличилось количество работ, в которых большое внимание уделяется исследованию устойчивости покрытий и влияния различных факторов на критические значения нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости. В [1] приведен обзор работ, посвященных исследованию процесса отслоения покрытий. Ряд результатов изучения выпучивания и закритического поведения покрытий представлен в работах [2, 3]. В [2] исследуются потеря устойчивости и закритическое поведение покрытий, находящихся на упругом и квазивинклеровском основаниях. В работе [3] проведена численная обработка результатов лабораторных экспериментов с помощью математических моделей, рассмотренных в [2].

В работе [4] исследовалось формирование зон расслоения вдоль границы раздела в упругой изотропной однородной плоскости, подвергнутой расклиниванию и одноосному сжатию. Расслоение моделировалось трещинами смешанного типа, зоны скольжения — сдвиговыми трещинами, клин — краевой дислокацией. Показана возможность образования зон скольжения конечных размеров до начала расслоения на границе раздела. Установлено, что в зависимости от сочетания параметров внешнего воздействия могут наблюдаться

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-11-00069).

© Ватульян А. О., Морозов К. Л., 2021

различные конфигурации трещин. В работе [5] изучено упругое деформирование тонких покрытий при механическом нагружении. Покрытие моделировалось продольно сжатой бесконечной балкой, находящейся на упругом основании. Получены формы потери устойчивости балки при закритическом поведении. Проведены анализ решения и его сравнение с численным решением, полученным методом конечных элементов.

Также следует отметить работу [6], в которой проанализированы общие закономерности отслоения неоднородных упругих слоистых структур под действием индентора, построены зависимости сила — глубина внедрения при приложении нагрузки для образцов с трещинами, получено трансцендентное уравнение, содержащее два коэффициента постели, изучено влияние основных параметров модели на первое критическое значение нагрузки, при котором происходит потеря устойчивости. На основе результатов работ [2, 3, 5, 6] проведены подробные исследования трансцендентных уравнений, полученных в рамках балочных моделей, для однородных покрытий. В работе [7] на основе балочной модели изучен процесс отслоения предварительно сжатого покрытия, лежащего на упругом основании. Подробно проанализировано трансцендентное уравнение, связывающее основные параметры, доказано существование решения в некотором диапазоне значений параметров, построены асимптотические соотношения для критических значений нагрузки. На основе минимизации неквадратичного функционала потенциальной энергии, полученного в работе [2], и метода Ритца изучено закритическое поведение покрытия. Задача сводится к определению критического значения нагрузки в задаче об устойчивости балки с модифицированными граничными условиями на участке отслоения, оценено влияние такого упрощения на критическое значение нагрузки. В [8] с использованием результатов, полученных в [6], предложена модель, более общая, чем в [7]. При анализе поведения покрытия, лежащего на упругом основании, использовано модифицированное балочное приближение, учитывающее два коэффициента постели для основания, аналогичного основанию Пастернака [9]. Изучено соответствующее трансцендентное уравнение, доказано наличие решения в некотором диапазоне параметров, проведено численное исследование трансцендентного уравнения для двух типов покрытия: условно мягкого и условно жесткого, представлены асимптотические приближения. Также с помощью метода Ритца изучено закритическое поведение покрытия. Сформулирована и исследована упрощенная балочная модель с модифицированными граничными условиями.

В данной работе, которая является продолжением работ [7, 8], исследуются потеря устойчивости и закритическое поведение неоднородных покрытий.

Сравнительный анализ моделей однородных покрытий с одним и двумя коэффициентами постели. В работах [7, 8] рассмотрены две модели однородного покрытия. В рамках балочной модели исследовано критическое и закритическое поведение упругого бесконечного покрытия с ослабленной связью с основанием, предварительно сжатого продольной нагрузкой σ . Влияние сил упругого основания описывается коэффициентами постели, причем в первой модели учитывается влияние только одного коэффициента, во второй — двух. Покрытие является однородным по всей длине, ослабление связей происходит на участке $[-b, b]$. В работах [7, 8] проанализированы трансцендентные уравнения, связывающие основные параметры задачи:

$$\operatorname{tg} k = k\sqrt{2\eta_1 - k^2} / (k^2 - \eta_1); \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} k = k\sqrt{2\eta_1 - k^2 + \eta_2^2} / (k^2 - \eta_1). \quad (2)$$

Здесь k — параметр, характеризующий критическую нагрузку; η_1, η_2 — безразмерные коэффициенты постели:

$$k^2 = \sigma b^2 / D_*, \quad \eta_1^2 = B_1 b^4 / D_*, \quad \eta_2^2 = B_2 b^2 / D_* \quad (3)$$

($D_* = EJ$ — жесткость на изгиб; E — модуль упругости; J — момент инерции сечения; B_1, B_2 — размерные коэффициенты постели).

Проведем анализ решений трансцендентных уравнений (1), (2), введя параметр $t = k^2$. Наименьшее положительное решение (1) обозначим через $t^{(1)}$, а наименьшее положительное решение (2) — через $t^{(2)}$. Рассмотрим по отдельности правые и левые части уравнений (1), (2), которые обозначим следующим образом:

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}, \quad g_1(t) = \frac{\sqrt{2\eta_1 - t}}{t - \eta_1}, \quad g_2(t) = \frac{\sqrt{2\eta_1 - t + \eta_2^2}}{t - \eta_1}. \quad (4)$$

С учетом (4) необходимо рассмотреть два интервала изменения искомой величины t :
1) интервал $\eta_1 < t < 2\eta_1$, соответствующий условно мягкому основанию при $\eta_1 < \pi^2/4$;
2) интервал $t < \eta_1$, соответствующий условно жесткому основанию при $\eta_1 > \pi^2/4$. Определим производные функций $g(t), g_1(t), g_2(t)$:

$$g'(t) = \frac{\sqrt{t} - (1/2) \sin 2\sqrt{t}}{2t\sqrt{t} \cos^2 \sqrt{t}}, \quad (5)$$

$$g_1'(t) = \frac{t - 3\eta_1}{2\sqrt{2\eta_1 - t} (t - \eta_1)^2}, \quad g_2'(t) = \frac{t - 3\eta_1 - 2\eta_2^2}{2\sqrt{2\eta_1 - t + \eta_2^2} (t - \eta_1)^2}.$$

Из (5) следует, что в рассматриваемых диапазонах значений t всегда имеют место неравенства $g_1' < 0, g_2' < 0, g' > 0$, что свидетельствует о монотонном убывании и возрастании соответствующих функций. Рассмотрим следующие два случая.

1. В случае $\eta_1 < t < 2\eta_1$ $g_1 > 0, g_2 > 0$. В частности, $\eta_1 \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.
2. В случае $t < \eta_1$ $g_1 > 0, g_2 < 0$. В частности, при больших значениях η_1 $\eta_1 \rightarrow \infty, t \rightarrow \pi^2$.

Поскольку $|g_2| > |g_1|$, в первом случае (мягкое основание) $t^{(2)} > t^{(1)}$, во втором случае (жесткое основание), наоборот, $t^{(1)} > t^{(2)}$. На рис. 1 приведены зависимости g, g_1, g_2 от параметра k .

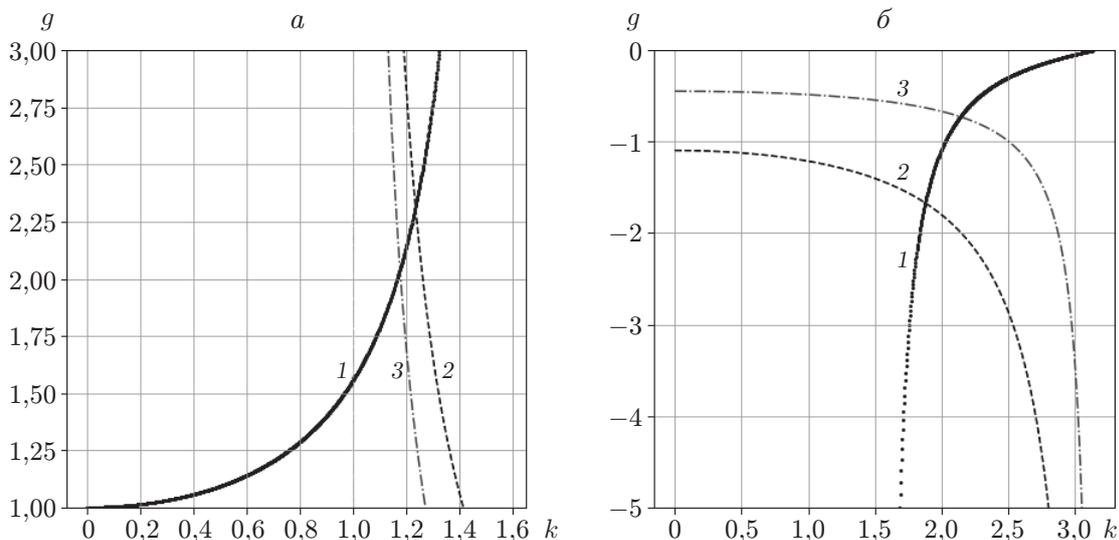


Рис. 1. Зависимости функций g (1), g_1 (2), g_2 (3) от параметра k :
 a — $\eta < \pi^2/4$, b — $\eta > \pi^2/4$

Модель отслоения неоднородного покрытия на упругом основании. С использованием методов, описанных в работах [7, 8], рассмотрим задачу о неоднородном покрытии толщиной h , лежащем на упругом основании толщиной H . Так как покрытие является неоднородным, то отслаивающийся участок покрытия может иметь несимметричную форму, поэтому будем рассматривать задачу на всем участке $[-\infty, \infty]$, полагая, что отслоение произошло на участке $[-b, b]$.

Запишем неквадратичный функционал для упругого балочного покрытия (см. [2]):

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [D_0 w_0''^2 (1 + w_0'^2) + D_1 (w_0'^2 + w_0'^4/4) + D_2 w_0^2] dx_1, \quad (6)$$

соответствующий ему квадратичный функционал имеет вид

$$\Lambda_{0*} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (D_0 w_0''^2 + D_1 w_0'^2 + D_2 w_0^2) dx_1, \quad (7)$$

где D_0, D_1, D_2 — в общем случае функции x_1 , определяемые следующими соотношениями:

$$D_0 = D, \quad D_1 = -P + B_2, \quad D_2 = B_1, \quad (8)$$

коэффициенты B_1, B_2 аналогичны двум коэффициентам постели; P — некоторый параметр, задающий предварительную нагрузку; D — аналог изгибной жесткости. Для покрытия с основанием толщиной $h+H$ коэффициенты (8) представлены следующим образом [6]:

$$P = \int_H^{h+H} \sigma dx_3, \quad D = \int_H^{h+H} (\lambda + 2\mu)(x_3 - H)^2 dx_3, \quad B_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{H}, \quad B_2 = \frac{\mu H}{3}$$

(λ, μ — коэффициенты Ламе).

Следует отметить, что величины B_1, B_2 не являются постоянными, а их зависимость от x_1 характеризует ослабление связей покрытия с основанием на участке $[-b, b]$. Обычно подобные задачи рассматриваются для случаев, когда в зоне отслоения $B_1 = 0, B_2 = 0$ [7, 8], однако эти равенства не всегда выполняются на практике, поскольку часто отрыв сопровождается разрушением или потерей несущих свойств покрытия.

Рассмотрим модель неоднородного покрытия в балочном приближении. Физико-геометрические свойства тонкого покрытия и нагрузка изменяются по x_1 . Введем безразмерные переменные и параметры $x_1 = b\xi, w = w_0/b, [-b, b] \rightarrow [-1, 1]$. Выразим D_0, D_1, D_2 через безразмерные функции $d_0(\xi), d_1(\xi), d_2(\xi)$. Для этого введем функции $f(\xi), q_1(\xi), q_2(\xi)$, определяющие основные свойства покрытия, подложки и нагрузку:

$$D(x) = EJf(x), \quad B_1(x) = B_1q_1(x), \quad B_2(x) = B_2q_2(x).$$

Также введем параметры k, η_1, η_2 , которые определены согласно (3). Запишем функционалы (6), (7) с учетом введенных обозначений:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [d_0(\xi)w''^2(1 + w'^2) + d_1(\xi)(w'^2 + w'^4/4) + d_2(\xi)w^2] d\xi; \quad (9)$$

$$\Lambda_* = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [d_0(\xi)w''^2 + d_1(\xi)w'^2 + d_2(\xi)w^2] d\xi. \quad (10)$$

Здесь

$$d_0(\xi) = f(\xi), \quad d_1(\xi) = \eta_2^2 q_2(\xi) - k^2, \quad d_2(\xi) = \eta_1^2 q_1(\xi),$$

$q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$ — кусочно-разрывные функции:

$$q_1 = q_2 = \begin{cases} 1, & \xi > 1 \cup \xi < -1, \\ 0, & -1 \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Выясним, каким образом неоднородности различного типа влияют на первое критическое значение задачи. Рассмотрим функции неоднородности покрытия двух видов:

$$f_1 = \begin{cases} 1, & \xi \geq \xi_0, \\ \chi, & \xi < \xi_0, \end{cases} \quad \chi = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1}; \quad (11)$$

$$f_2 = A_1 e^{-|\xi - \xi_0|} + A_2, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0. \quad (12)$$

Функция неоднородности (11) является кусочно-постоянной со скачком в точке ξ_0 и моделирует деформирование покрытия, состоящего из двух балочных покрытий с разными жесткостями. Функция неоднородности (12) имеет максимум в точке ξ_0 . Также будем считать, что на участке $[-1, 1]$ коэффициенты постели уменьшаются до нуля.

Решение задачи о потере устойчивости. Исследуем квадратичный функционал потенциальной энергии (10). Для определения критического значения k будем использовать метод Ритца. Представим решение в виде линейной комбинации координатных функций φ_k :

$$W = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k, \quad (13)$$

которые выберем следующим образом:

$$\varphi_k = \xi^{k-1} e^{-\xi^2}. \quad (14)$$

Из условия минимума функционала следует система линейных алгебраических уравнений относительно C_k , нетривиальное решение которой существует, если определитель системы равен нулю. С учетом равенства нулю определителя системы вычисляется критическое значение k . С помощью функционала (10) и координатных функций (14) выведем формулу, которую можно использовать для оценки критического значения сверху. Положим $N = 1$ в (13). Вычисляя производную функционала (10) по C_1 и приравнивая ее к нулю, получаем выражение для определения критического значения

$$k^2 = I_1/I_2, \quad (15)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [d_0(\xi) \varphi_1''^2 + d_{10}(\xi) \varphi_1'^2 + d_2(\xi) \varphi_1^2] d\xi, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1'^2 d\xi, \quad d_{10}(\xi) = d_1(\xi) + k^2.$$

С помощью формулы (15) можно получить значение, которое будет являться оценкой критического значения сверху.

Для функции неоднородности (11) при значениях параметров $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0,1$, $\xi_0 = 0,5$, $\chi = 1,5$ имеем верхнее значение $k^* = 2,969$, близкое к точному (при $N = 11$ получаем $k^* = 2,442$). Для функции неоднородности (12) при $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0,1$, $A_1 = 0,3$, $A_2 = 0,5$ имеем верхнее значение $k^* = 2,499$ (при $N = 11$ получаем $k^* = 1,651$). Проведем анализ зависимости критического значения нагрузки от параметров неоднородности

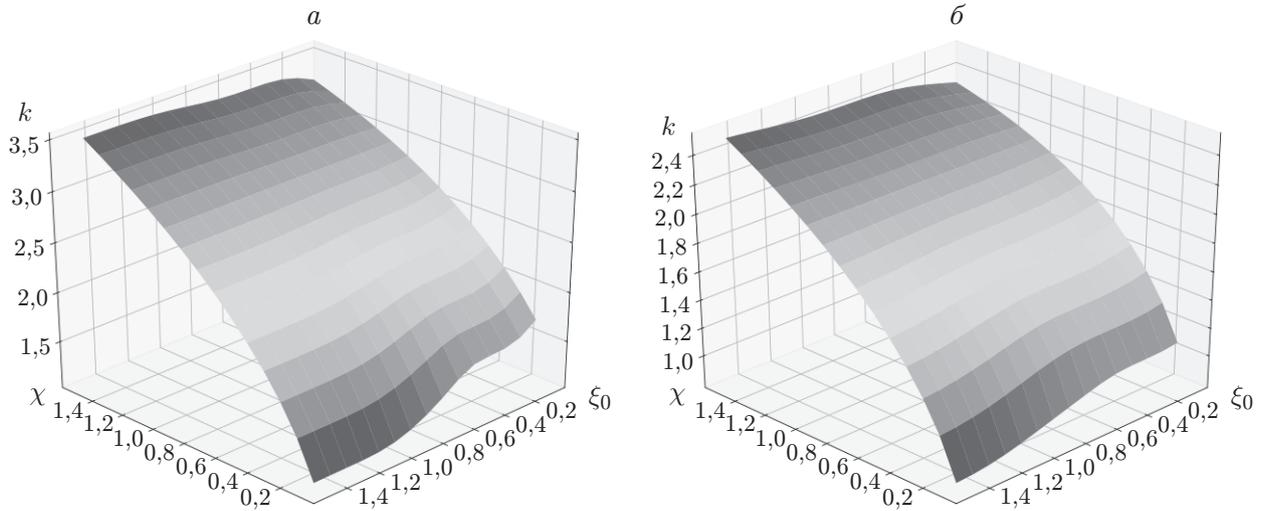


Рис. 2. Зависимость параметра k от параметра χ и координаты ξ_0 :
 а — условно мягкое основание, б — условно жесткое основание

покрытия для условно мягкого основания ($\eta_1 = 0,1, \eta_2 = 10$), которому соответствует критическое значение $k^{(1)}$ (рис. 2,а), и условно жесткого основания ($\eta_1 = 10, \eta_2 = 0,1$), которому соответствует критическое значение $k^{(2)}$ (рис. 2,б).

Для значений параметров $\eta_1 = 0,1, \eta_2 = 10$ минимальное значение $k^{(2)} = 1,0737$ достигается при $\chi = 0,1, \xi_0 = 1,5$, максимальное $k^{(2)} = 3,516$ — при $\chi = \xi_0 = 1,5$. Для значений параметров $\eta_1 = 10, \eta_2 = 0,1$ минимальное значение $k^{(2)} = 0,804$ достигается при $\chi = 0,1, \xi_0 = 1,5$, максимальное $k^{(2)} = 2,516$ — при $\chi = \xi_0 = 1,5$. Из рис. 2 следует, что критическое значение больше, если значение ξ_0 находится на участке отслоения, т. е. при малых χ . Однако с увеличением χ ситуация меняется на противоположную: критическое значение больше, если ξ_0 находится вне участка отслоения. Эта закономерность имеет место для обоих типов основания.

Рассмотрим функцию неоднородности (12). На рис. 3 приведены результаты исследования при различных значениях A_1, A_2 . Видно, что наибольшее критическое значение

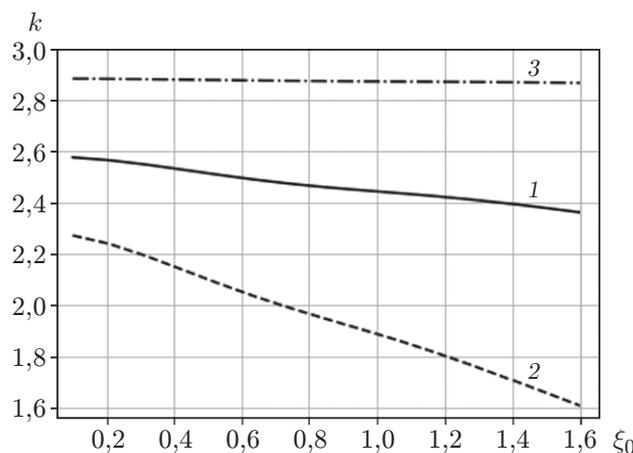


Рис. 3. Зависимость параметра k от координаты ξ_0 при различных значениях A_1, A_2 :
 1 — $A_1 = 1, A_2 = 1$, 2 — $A_1 = 0,1, A_2 = 2$, 3 — $A_1 = 2, A_2 = 0,1$

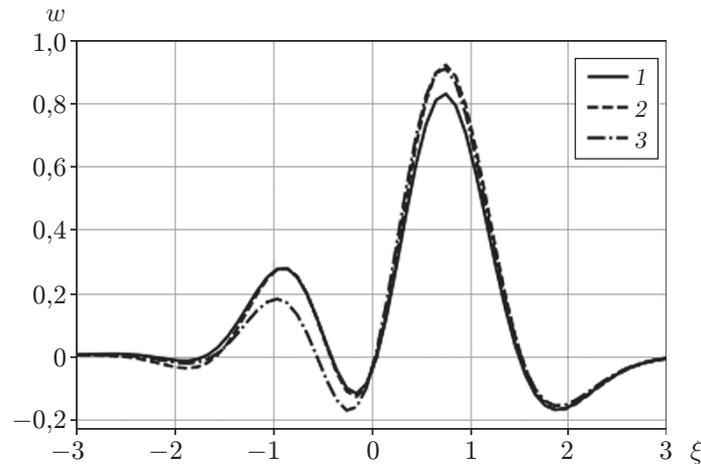


Рис. 4. Зависимость прогиба w от координаты ξ при различных значениях ξ_0 , χ :
 1 — $\xi_0 = 0,3$, $\chi = 1,3$, 2 — $\xi_0 = 0,7$, $\chi = 0,7$, 3 — $\xi_0 = 1,3$, $\chi = 0,3$

нагрузки имеет место при малых значениях ξ_0 , причем при значении параметра A_1 , на порядок превышающем A_2 , критическое значение с увеличением ξ_0 практически не изменяется. При значении параметра A_2 , на порядок превышающем A_1 , с увеличением ξ_0 критическое значение резко уменьшается.

Исследование закритического поведения отслоившегося неоднородного покрытия. При исследовании закритического поведения покрытия необходимо использовать нелинейную модель покрытия. Рассмотрим неквадратичный функционал (9). Для определения минимального значения функционала (9) будем использовать метод Ритца: представим функцию W в виде линейной комбинации координатных функций (14). Введем параметр δ , который оказывает влияние на значение силы $k_1 = \delta k$ (k определяется из (10) методом Ритца). Вычисляя минимальное значение функционала для различного числа координатных функций, получаем нелинейную систему N уравнений относительно неизвестных параметров разложения, которая решается численно методом Ньютона. В качестве начального приближения для системы N уравнений выберем решение, полученное для системы $N - 1$ уравнений, полагая коэффициент C_N равным нулю.

Приведем некоторые результаты расчетов. Сначала определим минимальное количество координатных функций, при котором различие последовательных приближений не превышает 5 %. Выберем следующие значения параметров: $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0,1$, $\xi_0 = 0,3$, $\chi = 1,3$, $\delta = 1,05$.

Из результатов численных экспериментов следует, что при $N \geq 7$ значения функционала Λ и констант C_k различаются не более чем на 5 %. На рис. 4 приведена зависимость решения от параметров ξ_0 , χ при $\delta = 1,05$, $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0,1$.

Заключение. С использованием балочной модели проведен анализ процесса отслоения неоднородного покрытия двух типов: покрытия с кусочно-непрерывной жесткостью и покрытия с непрерывно изменяющейся жесткостью, имеющей точку максимума внутри и вне зоны отслоения. Исследовано влияние положения точки максимума жесткости (внутри зоны отслоения и вне этой зоны) на критическое значение нагрузки. Предложен подход, основанный на методе Ритца и позволяющий проводить анализ критического и закритического поведения неоднородных покрытий с произвольными неоднородными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hutchinson J. W., Suo Z.** Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* 1992. V. 29. P. 64–191.
2. **Астапов Н. С., Корнев В. М.** Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 2. С. 130–142.
3. **Астапов Н. С., Демешкин А. Г., Корнев В. М.** Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 5. С. 106–112.
4. **Galybin A. N., Goldstein R. V., Ustinov K. B.** Equilibrium of mixed-mode interface cracks under cleavage of an elastic plane caused by an edge dislocation // *Proc. Materials Sci.* 2014. V. 3. P. 1742–1747.
5. **Кургузов В. Д.** Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // *Вычисл. механика сплош. сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 91–99.
6. **Ватульян А. О., Коссович Е. Л., Плотников Д. К.** О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2017. № 4. С. 94–100.
7. **Ватульян А. О., Морозов К. Л.** Об отслоении покрытия, лежащего на упругом основании // *ПМТФ.* 2020. Т. 61, № 1. С. 133–143.
8. **Ватульян А. О., Морозов К. Л.** Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2020. № 2. С. 64–76.
9. **Пастернак П. Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат, 1954.

*Поступила в редакцию 7/X 2020 г.,
после доработки — 10/XI 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.*
