ряет, из (5.3), (5.4) находим

$$\sigma \to 0 \text{ при } \gamma \to 3/2. \tag{5.5}$$

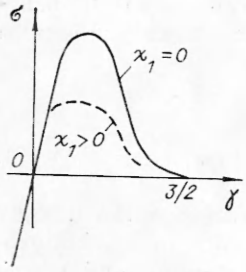

Рис. 3

При малых значениях γ зависимость σ от γ близка к линейной

$$\sigma = A\gamma \tag{5.6}$$

(A — положительная постоянная). Из (5.5), (5.6) следует, что в случае всестороннего расширения при $\chi_1 = 0$, $T = T_0$ график зависимости σ от γ имеет вид, указанный на рис. 3 сплошной кривой. Очевидно, таким же он будет и в общем случае деформирования элемента среды при $\chi_1 = 0$, $T = T_0$. Характерная его особенность — ограниченность среднего напряжения. Наличие функции χ_1 в (5.3) создает возможность изменения при помощи функции χ_1 зависимости σ от γ так, например, как указано на рис. 3 штриховой линией. В частности, это создает возможность описания при помощи функции χ_1 изменения по тем или иным причинам сопротивления элемента среды разрушению из-за ограниченности среднего напряжения.

Наличие функции χ_2 в (5.3) создает возможность описания при ее помощи влияния сдвиговых деформаций на изменение объема и среднего напряжения. Пусть деформирование происходит при $\sigma = \gamma = 0$. В этом случае, согласно (5.2), сдвиговые деформации приведут к изменению объема по формуле $e = \frac{2(1+\chi_2)}{1-\chi_1}\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}$. Пусть деформирование происходит без изменения объема. Тогда сдвиговые деформации приведут к изменению γ по формуле $\frac{d\gamma}{dt} = -2(1+\chi_2)\gamma'_{\alpha\beta}e'^{\alpha\beta}$ и, следовательно, к соответствующему изменению среднего напряжения. Наличие функции χ_3 в (5.3) создает возможность при ее помощи описывать изменения по тем или иным причинам модуля $\tilde{\mu}$ упругого сдвига.

Приведенные примеры показывают, что имеются весьма широкие возможности описания разнообразных явлений путем введения в уравнения деформирования элемента среды недиссипативных неупругих деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.** Теория ползучести строительных материалов и ее приложения.— М.: Госстройиздат, 1960.
2. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 1—2.
3. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.

Поступила 19/V 1986 г.

УДК 534.1

ПРЯМОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ И ЖЕСТКОСТЯМИ

А. В. Агафонов

(Ленинград)

При расчете элементов конструкций (стержней, пластин и т. п.) на сосредоточенные воздействия во многих случаях важно знать лишь напряженное и деформированное состояние рассматриваемого элемента непосредственно в месте приложения нагрузки, а элемент в целом (или вся конструкция) представляет интерес лишь в смысле его интегральной реакции на воздействие.

Если сосредоточенное воздействие задано, то нахождение такой интегральной реакции, как правило, затруднений не вызывает. В тех же случаях, когда воздействие зависит от движения самого элемента конструкции, отыскание интегральной реакции связано с необходимостью сопрягать изменение нагрузки и движение конструкции.

Для решения таких задач основным является метод динамических податливостей [1, 2]. В соответствии с ним построение решения производится в два этапа [1]:

— находятся по отдельности динамические податливости элемента и действующей на него массы (жесткости) под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы;

— отыскивается реакция взаимодействия элемента с массой (жесткостью) из интегродифференциального уравнения, выражающего условие равенства перемещений элемента и массы в точке взаимодействия.

В то же время имеется возможность разработки метода, который позволяет определять интересующие параметры в месте взаимодействия, минуя предварительное нахождение динамических податливостей, и тем самым сократить путь решения задачи. Такой метод можно предположить на основе интегральных преобразований и аппарата δ-функции.

Рассмотрим общую схему предлагаемого метода на примере одномерной задачи. Пусть поведение некоторой системы при наличии сосредоточенных масс или жесткостей описывается уравнением

$$L_{xt}^{0}(w) + L_{t}^{1}(w)\,\delta(x) = P(x, t), \tag{1}$$

где w — искомая функция (перемещение); $L_{xt}^{0}(\ldots)$ — линейный оператор, описывающий поведение системы; $L_{t}^{1}(\ldots)$ — линейный оператор, описывающий взаимодействие системы с сосредоточенной массой (жесткостью); $P(x, t)$ — внешняя нагрузка; x — пространственная координата; t — время.

Пусть, далее, внешняя нагрузка и граничные условия таковы, что возможно применение преобразования Лапласа по времени и какого-то интегрального преобразования (Фурье, Ханкеля и т. д.) по координате. Тогда, применяя интегральные преобразования, на плоскости изображений имеем

$$L_0(p, \nu)w_{p\nu} + L_1(\nu)w_{\nu}|_{x=0} = P_1(p, \nu). \tag{2}$$

Здесь $w_{p\nu}$ — изображение w; $L_0(p, \nu)$ — полином, определяемый оператором L_{xt}^{0}; $L_1(\nu)$ — полином, определяемый оператором L_{t}^{1}; $P_1(p, \nu)$ — функция, определяемая нагрузкой, граничными и начальными условиями; ν — параметр преобразования Лапласа; p — параметр преобразования по координате.

Из равенства (2) для $w_{p\nu}$ получим

$$w_{p\nu} = \frac{P_1(p,\nu)}{L_0(p,\nu)} - L_1(\nu)\,w_{\nu}\Big|_{x=0}\frac{1}{L_0(p,\nu)}. \tag{3}$$

Так как нас интересует только $w|_{x=0}$, то необходимо знать обращения выражений $P_1(p, \nu)/L_0(p, \nu)$ и $1/L_0(p, \nu)$ не для всех значений x, а лишь для $x = 0$, что упрощает решение. Пусть $\varphi(\nu)$ есть обращение выражения $P_1(p, \nu)/L_0(p, \nu)$, а $\psi(\nu)$ — выражения $1/L_0(p, \nu)$ при $x = 0$. Тогда из (2)

$$w_{\nu}|_{x=0} = \varphi(\nu)/[1 + L_1(\nu)\psi(\nu)]. \tag{4}$$

Обращение изображения (4) может быть выполнено либо с помощью таблиц соответствия оригиналов и изображений, либо с помощью численных методов обращения преобразования Лапласа.

Отметим, что предлагаемый метод содержит элементы метода динамических податливостей, однако переход к окончательному выражению на плоскости изображений позволяет сократить процесс получения решения.

Рассмотрим примеры применения указанного метода к решению конкретных задач.

1. *Удар массы по полубесконечной струне*. Пусть по полубесконечной струне, один конец которой оперт, на расстоянии l от опертого конца ударяет масса M_0 со скоростью v_0. В безразмерных координатах

$$\xi = x/l, \quad \tau = \sqrt{T/m}\cdot(t/l) \tag{5}$$

движение системы струна — масса описывается (вплоть до отскока массы) следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - M\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\delta(\xi - 1) = 0; \tag{6}$$

$$\text{при } \tau = 0\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial \tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \neq 1, \\ vl & \text{при } \xi = 1; \end{cases} \tag{7}$$

$$\text{при } \xi = 0\ w = 0,\ \text{при } \xi = \infty\ w = 0. \tag{8}$$

Здесь $M = M_0/ml$; $v = v_0/\sqrt{T/m}$; $\delta(\ldots)\delta$ — функция; m — погонная масса струны; T — натяжение струны; w — прогиб.

Применяя к (6) преобразование Лапласа по τ и синус-преобразование Фурье по ξ, на плоскости изображений получим уравнение

$$(p^2 + \nu^2) w_{p\nu} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} M\nu^2 w_\nu \Big|_{\xi=1} \sin p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Mvl \sin p, \tag{9}$$

где $w_{p\nu}$ — изображение прогиба по Лапласу и Фурье (w_ν только по Лапласу); p — параметр преобразования Фурье; ν — параметр преобразования Лапласа.

Разрешая (9) относительно $w_{p\nu}$ и обращая по Фурье, имеем

$$w_\nu = M\left[vl - \nu^2 w_\nu|_{\xi=1}\right]\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p \cdot \sin p\xi}{p^2 + \nu^2}\,dp. \tag{10}$$

При $\xi = 1$ (точка соударения) входящий в (10) интеграл равен [3]

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 p}{p^2 + \nu^2} = \frac{\pi}{4\nu}\left(1 - e^{-2\nu}\right).$$

С учетом последнего равенства из (10) запишем

$$w_\nu|_{\xi=1} = \frac{M}{2} vl \frac{1}{\nu} \frac{1 - e^{-2\nu}}{1 + \frac{M}{2}\nu(1 - e^{-2\nu})}. \tag{11}$$

Раскладывая дробь в правой части (11) в ряд по степеням $e^{-2\nu}$, находим

$$w_\nu|_{\xi=1} = \frac{M}{2} vl \frac{1}{\nu\left[1 + \frac{M}{2}\nu\right]}\left\{1 - \frac{e^{-2\nu}}{1 + \frac{M}{2}\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\frac{M}{2}\nu e^{-2\nu}}{1 + \frac{M}{2}\nu}\right]^n\right\}.$$

Множители $e^{-2n\nu}$, как обычно, учитывают последовательные отражения волн от опоры и массы.

Обращая последнее выражение с помощью табличных соответствий между изображением и оригиналом (см., например, [4]), для прогиба струны в точке удара (при $\tau < 6$) получим

$$w|_{\xi=1} = \frac{M}{2} vl\left\{\left[1 - e^{-\frac{2\tau}{M}}\right]\sigma_0(\tau) - \left[1 - \left(1 + \frac{2[\tau - 2]}{M}\right)e^{-\frac{2(\tau-2)}{M}}\right]\sigma_0(\tau - 2) - \left[\frac{2(\tau - 4)}{M}\right]^2 e^{-\frac{2(\tau-4)}{M}}\sigma_0(\tau - 4)\ldots\right\}. \tag{12}$$

Найденное решение справедливо вплоть до момента отскока массы от струны. Так как отскок происходит тогда, когда при обратном движении скорость струны в точке $\xi = 1$ достигает максимального значения, то момент отскока может быть определен из равенства $d^2w/d\tau^2|_{\xi=1} = 0$.

Кривые изменения во времени безразмерного прогиба $w' = 2w/(Mvl)$ для различных значений M представлены на рис. 1, где *1—3* для $M = 4$; 8; 16, *1'—3'* для бесконечной струны.

2. *Удар массы по балке конечной длины.* Пусть по середине свободно опертой балки длиной $2l$ со скоростью v_0 ударяет масса M_0. Тогда в безразмерных координатах

(13) $$\xi = x/l, \quad \tau = \sqrt{\frac{D}{m}} \Big/ l^2$$

движение балки с массой после соударения описывается следующей краевой задачей:

(14) $$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \delta(\xi - 1) = 0,$$

при $\xi = 0;\ 2\ w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0,$

при $\tau = 0\ w = 0,\ \dfrac{\partial w}{\partial \tau} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \xi \neq 1, \\ vl & \text{при} \quad \xi = 1. \end{cases}$

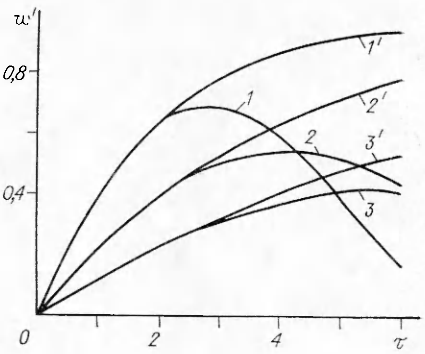

Рис. 1

В (13), (14) $M = M_0/ml$; $v = v_0/\sqrt{D/ml^2}$; m — погонная масса балки; D — изгибная жесткость.

Для построения решения используем преобразование Лапласа по τ и конечное синус-преобразование Фурье по ξ. Так как решение должно быть симметрично относительно $\xi = 1$, то в решении синусы только с нечетным номером аргумента. Поступая таким образом, для изображения $w_{\nu(2k-1)} = \int\limits_0^2 w_\nu \sin \frac{(2k-1)\pi\xi}{2} d\xi$ получим равенство $w_{\nu(2k-1)} \left[\left(\frac{2k-1}{2} \right)^4 \pi^4 + \nu^2 \right] + (-1)^{k-1} \times M\nu^2 w_\nu |_{\xi=1} = (-1)^{k-1} Mvl$, откуда $w_{\nu(2k-1)} = \dfrac{(-1)^{k-1} M \left(vl - \nu^2 w_\nu |_{\xi=1} \right)}{\left(\frac{2k-1}{2} \right)^4 \pi^4 + \nu^2}.$

Обращая последнее выражение по Фурье и разрешая полученное равенство относительно $w_\nu |_{\xi=1}$, имеем

(15) $$w_\nu |_{\xi=1} = \frac{Mvl \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4 + (2\sqrt{\nu}/\pi)^4}}{1 + Mv^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4 + (2\sqrt{\nu}/\pi)^4}}.$$

Значение входящей в (15) суммы равно [3]

$$S = \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4 + (2\sqrt{\nu}/\pi)^4} = \frac{1}{2\nu\sqrt{\nu}} \left[\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{2\nu}) + \sin(2\sqrt{2\nu})}{\operatorname{ch}(2\sqrt{2\nu}) - \cos(2\sqrt{2\nu})} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{2\nu}) + \sin(\sqrt{2\nu})}{\operatorname{ch}(\sqrt{2\nu}) - \cos(\sqrt{2\nu})} \right].$$

Ввиду сложности выражения для S изображение (15) можно обращать только численно. В то же время структура выражения для S допускает построение асимптотического аналитического решения, справедливого для ограниченных моментов времени. Разлагая (по аналогии со струной) S в ряд по степеням $e^{-k\sqrt{2\nu}}$ и удерживая слагаемые с множителем $e^{-2\sqrt{2\nu}}$ включительно, находим

$$S \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\nu\sqrt{\nu}} \left[1 - e^{-\sqrt{2\nu}} \left(\sin\sqrt{2\nu} + \cos\sqrt{2\nu} \right) \right]$$

(слагаемые с множителем $e^{-2\sqrt{2\nu}}$ взаимно уничтожаются).

Подставляя последнее выражение в (15) и снова разлагая правую часть в ряд по степеням $e^{-k\sqrt{2\nu}}$ (с точностью до $e^{-2\sqrt{2\nu}}$), получим

$$(16)\quad w_\nu|_{\xi=1} = \frac{\frac{Mvl}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\nu\sqrt{\nu}}}{1+\frac{M}{2\sqrt{2}}\sqrt{\nu}}\left\{1 - \frac{1}{1-\frac{M}{2\sqrt{2}}\sqrt{\nu}}\, e^{-\sqrt{2\nu}}\,[\sin\sqrt{2\nu} + \cos\sqrt{2\nu}] - \frac{\frac{M}{2\sqrt{2}}\sqrt{\nu}}{1+\frac{M}{2\sqrt{2}}\sqrt{\nu}}\, e^{-2\sqrt{2\nu}}\,[1 + \sin(2\sqrt{2\nu})]\right\}.$$

Для обращения (16) воспользуемся операцией свертки и табличными соответствиями [4]

$$\frac{e^{-\sqrt{\alpha\nu}}}{\sqrt{\nu}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\alpha}{4\tau}\right)$$

$$\frac{e^{-\sqrt{\alpha\nu}}\cos\sqrt{\alpha\nu}}{\sqrt{\nu}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\cos\left(\frac{\alpha}{2\tau}\right),$$

$$\frac{e^{-\sqrt{\alpha\nu}}\sin\sqrt{\alpha\nu}}{\sqrt{\nu}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\sin\left(\frac{\alpha}{2\tau}\right)$$

а также соотношением, следующим из теоремы Эфроса [2, 5]:

$$\frac{F(\sqrt{\nu})}{\sqrt{\nu}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) f(\tau)\,d\tau,$$

где $F(\nu) \doteqdot f(\tau)$.

Обращая в (16) дробно-рациональные сомножители с помощью последнего соотношения, а сомножители с $e^{-\sqrt{2\nu}}$ и т. п. с помощью приведенных выше табличных соответствий и применяя операцию свертки, для $w|_{\xi=1}$ запишем

$$(17)\qquad w|_{\xi=1} = \frac{Mvl}{2\sqrt{2}}[w_1 + w_2 + w_3 + w_4].$$

Здесь $w_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tau} - \frac{M}{2\sqrt{2}}[1 - \varphi_1(\tau)]$;

$$w_2 = -\int_0^\tau \left[1 - \varphi_1(\tau - z) - \frac{2\sqrt{2}}{M}\varphi_2(\tau - z)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\left(\sin\frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}\right)dz;$$

$$w_3 = -\frac{2\sqrt{2}}{M}\int_0^\tau \varphi_2(\tau - z)\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\exp\left(-\frac{2}{z}\right)dz;$$

$$w_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{M}\int_0^\tau \varphi_2(\tau - z)\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\sin\left(\frac{4}{z}\right)dz;$$

$$\varphi_1(\tau) = \exp\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{M}\right)^2\tau\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{2}}{M}\sqrt{\tau}\right)\right];$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tau} - 2\frac{2\sqrt{2}}{M}\tau\varphi_1(\tau);$$

$\Phi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-z^2}dz$ — интеграл вероятности.

Первое слагаемое в (17) представляет собой прогиб бесконечной балки при ударе массы, а остальные учитывают влияние опор на прогиб бал-

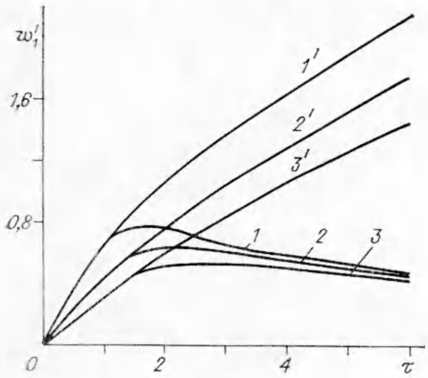

Рис. 2

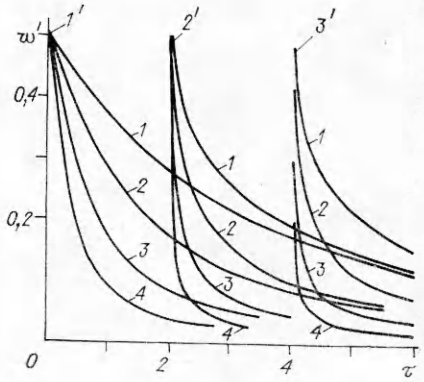

Рис. 3

ки. Как показали численные расчеты, основной вклад в суммарный прогиб наряду с w_1 вносит составляющая w_2, а составляющая w_4, содержащая под интегралом быстро осциллирующую при $z \to 0$ функцию $\sin(4/z)$, и составляющая w_3, содержащая под интегралом быстро затухающую при $z \to 0$ функцию $e^{-2/z}$, в сумме не превосходят 10% составляющей w_2. В отброшенные составляющие (соответствующие $k > 2$ в разложении по $e^{-k\sqrt{2\nu}}$) будут входить интегралы от более быстро осциллирующих функций типа $\sin(6/z)$ и более быстро затухающих типа $e^{-4/z}$ и т. д. Поэтому можно утверждать, что вклад отброшенных составляющих будет еще меньше, чем вклад w_3 и w_4, и предложенное асимптотическое решение может быть использовано, по крайней мере, при $\tau \leqslant 6$.

Кривые изменения безразмерного прогиба $w_1' = 2\sqrt{2}w/Mvl$ для различных значений M приведены на рис. 2, где *1—3* — прогиб для $M = 2; 4; 6$, *1'—3'* — то же для бесконечной балки.

3. *Действие сосредоточенной силы на бесконечную струну, заделанную в мембрану*. Пусть на струну с площадью поперечного сечения F, находящуюся под натяжением T и заделанную в мембрану толщиной h под натяжением T_1, действует сосредоточенная сила $P_0 f(t)$. Материал струны и мембраны для простоты считаем одинаковыми, а силы натяжения такими, что напряжения в струне и мембране равны, т. е. $T_1/h = T/F$. В безразмерных координатах $\xi = \frac{x}{h}$, $\eta = \frac{y}{h}$, $\tau = \frac{\sqrt{T_1/\rho h}}{h} t$ движение такой системы описывается уравнением (ось ξ направлена вдоль струны)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right] \delta(\eta) + \frac{P_0}{T_1} f(\tau)\, \delta(\xi)\, \delta(\eta) = 0, \quad a^2 = \frac{T}{T_1 h} = \frac{F}{h^2}. \tag{18}$$

Начальные и граничные условия (при $\xi = \pm\infty$, $\eta = \pm\infty$) нулевые.

Применяя к (18) двусторонние преобразования Фурье по ξ и η и преобразование Лапласа по τ, для изображения $w_{pq\nu}$ получим равенство $(p^2 + q^2 + \nu^2)\, w_{pq\nu} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^2 (p^2 + \nu^2)\, w_{p\nu}|_{\eta=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{P_0}{T_1} f_\nu$ (f_ν — изображение $f(\tau)$), откуда $w_{pq\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{P_0}{T_1} f_\nu - a^2 (p^2 + \nu^2)\, w_{p\nu}|_{\eta=0} \right] \frac{1}{p^2 + q^2 + \nu^2}$. Обращая последнее выражение по q с использованием известного значения интеграла [3]

$$I = \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a}$$

и разрешая полученное равенство относительно $w_{p\nu}|_{\eta=0}$, имеем

$$w_{p\nu}|_{\eta=0} = \frac{P_0}{2T_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{f_\nu}{\sqrt{p^2+\nu^2}\left[1+\frac{a^2}{2}\sqrt{p^2+\nu^2}\right]}. \tag{19}$$

Для обращения изображения (19) воспользуемся соответствием, следующим из теоремы Эфроса:

$$\frac{F\left(\sqrt{\nu^2+p^2}\right)}{\sqrt{\nu^2+p^2}} \doteqdot \int_0^\tau J_0\left(p\sqrt{\tau^2-z^2}\right) f(z)\,dz,$$

где $F(\nu) \doteqdot f(\tau)$; $J_0(\ldots)$ — функция Бесселя первого рода индекса 0. Обращая (19) по Фурье и Лапласу с использованием последнего соответствия, для $f_\nu = 1$ ($f(\tau) = \delta(\tau)$) находим

$$w(\xi, \tau)|_{\eta=0} = \frac{P_0 h}{T} \frac{1}{\pi} \int_0^\tau e^{-\frac{2}{a^2}z} \int_0^\infty J_0\left(p\sqrt{\tau^2-z^2}\right) \cos p\xi\,dp.$$

Так как [3, 6]

$$\int_0^\infty J_0\left(p\sqrt{\tau^2-z^2}\right)\cos p\xi\,dp = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\tau^2-\xi^2-z^2}}, & z^2 < \tau^2-\xi^2, \\ 0, & z^2 > \tau^2-\xi^2, \end{cases}$$

то

$$w(\xi, \tau)|_{\eta=0} = \frac{P_0 h}{T}\frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}} \frac{e^{-\frac{2}{a^2}z}}{\sqrt{\tau^2-\xi^2-z^2}}\,dz = \frac{P_0 h}{T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{a^2}\sqrt{\tau^2-\xi^2}\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$(z = \sqrt{\tau^2-\xi^2}\,y,\ y = \sin\varphi).$$

Кривые изменения во времени безразмерного прогиба $w' = \frac{T}{P_0 h} w(\xi, \tau)|_{\eta=0}$ для различных ξ и a^2 представлены на рис. 3, где *1′—3′* для $\xi = 0; 2; 4$, *1—4* для $a^2 = 4; 2; 1; 0{,}5$. Видно, что при фиксированном значении отношения T/h с уменьшением параметра a^2 спад по времени прогиба становится более крутым, при $a^2 \to \infty$ характер изменения во времени прогиба приближается к изменению прогиба для изолированной струны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кудрина Т. Д., Мамай В. И.** Исследование взаимодействия конструкций с преградами на основе модельного подхода // Статика и динамика тонкостенных конструкций.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
2. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.
3. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции.— М.: Наука, 1981.
4. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.— М.: ГИФМЛ, 1960.
5. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Справочник по операционному исчислению.— М.: Высш. шк., 1965.
6. **Рыжик И. М., Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила 26/VI 1986 г.