УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО ГИПЕРУПРУГОГО ТЕЛА

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Формулируются уравнения связи между напряжениями и деформациями для изотропного гиперупругого тела. Показано, что плотность энергии деформации, по градиенту которой определяются напряжения, может задаваться как функция не трех, а только двух аргументов — инвариантов тензора деформаций. С уменьшением деформаций уравнения переходят в соотношения закона Гука с двумя константами материала, модулем сдвига и модулем объемного сжатия.

1. Деформации. В трехмерном евклидовом пространстве введем две взаимосвязанные (декартову и криволинейную) системы координат. Декартовы и криволинейные координаты материальной точки в начальный момент времени $\tau = 0$ обозначим через y^i, x^i, а в текущий момент времени τ — через $\hat{y}^i$, $\hat{x}^i$. Радиус-векторы материальных точек изменяются от $\boldsymbol{R} = y^i\boldsymbol{k}_i$ при $\tau = 0$ до $\hat{\boldsymbol{R}} = \hat{y}^i\boldsymbol{k}_i$ в момент τ ($\boldsymbol{k}_i$ — базисные векторы декартовой системы координат). Базисные векторы и метрический тензор криволинейной системы координат в исходном положении точек есть $\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{R}_{,x^i} = y^n_{,x^i}\boldsymbol{k}_n$, $g_{ij} = \boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_j$, а в текущем — $\hat{\boldsymbol{l}}_i = \hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^i} = \hat{y}^n_{,\hat{x}^i}\boldsymbol{k}_n$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{l}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{l}}_j$. Для вектора смещения будем использовать представления $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R} = w^i\boldsymbol{k}_i = u^i\boldsymbol{l}_i = \hat{u}^i\hat{\boldsymbol{l}}_i$, где $w^n = u^i y^n_{,x^i} = \hat{u}^i\hat{y}^n_{,\hat{x}^i}$. Определим также $\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i} = \boldsymbol{l}_i + u^n_{;i}\boldsymbol{l}_n$, $\boldsymbol{R}_{,\hat{x}^i} = \hat{\boldsymbol{l}}_i - \hat{u}^n_{;i}\hat{\boldsymbol{l}}_n$. Здесь индексы i, j, m, n принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Переменные в нижнем индексе после запятой означают частное дифференцирование. Индекс i после запятой обозначает ковариантное дифференцирование по x^i, после точки с запятой — по $\hat{x}^i$. Ковариантное дифференцирование по x^i и $\hat{x}^i$ выполняется в одной и той же криволинейной системе координат, но при разложении дифференцируемых векторов и тензоров по разным базисным векторам $\boldsymbol{l}_i$ и $\hat{\boldsymbol{l}}_i$. Векторы $\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i}$ являются базисными в сопутствующей лагранжевой системе координат. В квазистатических задачах в качестве τ можно использовать любой монотонно возрастающий параметр нагружения.

Возьмем элементарные материальные волокна в исходном и текущем состояниях $d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{,x^i}\,dx^i$, $d\hat{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i}\,dx^i$. Ковариантные компоненты тензора деформаций Грина определяются как коэффициенты в выражении для разности квадратов текущих и исходных длин этих волокон $|d\hat{\boldsymbol{R}}|^2 - |d\boldsymbol{R}|^2 = 2e_{ij}\,dx^i\,dx^j$ по формулам

$$e_{ij} = (\hat{y}^m_{,x^i}\hat{y}^m_{,x^j} - y^n_{,x^i}y^n_{,x^j})/2 = (\hat{g}_{mn}\hat{x}^m_{,x^i}\hat{x}^n_{,x^j} - g_{ij})/2 = (u_{i,j} + u_{j,i} + u^n_{,i}\,u_{n,j})/2. \qquad (1.1)$$

Задавая дифференциалы текущих координат материальных точек, получаем волокна в исходном и текущем состояниях $d\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}_{,\hat{x}^i}\,d\hat{x}^i$, $d\hat{\boldsymbol{R}}' = \hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^i}\,d\hat{x}^i$. Коэффициенты в выра-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00525).

жении $|d\hat{\boldsymbol{R}}'|^2 - |d\boldsymbol{R}'|^2 = 2\hat{e}_{ij}\, d\hat{x}^i\, d\hat{x}^j$ есть ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси

$$\hat{e}_{ij} = (\hat{y}^m_{,\hat{x}^i}\hat{y}^m_{,\hat{x}^j} - y^n_{,\hat{x}^i}y^n_{,\hat{x}^j})/2 = (\hat{g}_{ij} - g_{mn}x^m_{,\hat{x}^i}x^n_{,\hat{x}^j})/2 = (\hat{u}_{i;j} + \hat{u}_{j;i} - \hat{u}^n_{;i}\,\hat{u}_{n;j})/2. \tag{1.2}$$

Тензоры $e = e_{ij}\,\boldsymbol{l}^i\,\boldsymbol{l}^j$, $\hat{e} = \hat{e}_{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}^i\,\hat{\boldsymbol{l}}^j$ описывают деформацию в текущий момент времени в одной и той же материальной точке. Из (1.1), (1.2) находятся соотношения

$$\hat{e}_{mn} = e_{ij}x^i_{,\hat{x}^m}x^j_{,\hat{x}^n}, \qquad e_{ij} = \hat{e}_{mn}\hat{x}^m_{,x^i}\,\hat{x}^n_{,x^j}, \tag{1.3}$$

связывающие значения ковариантных компонент e и $\hat{e}$.

Введем матрицы частных производных $\hat{Y} = \|\hat{y}^i_{,y^j}\|$, $\hat{\Gamma} = \|\hat{x}^i_{,x^j}\|$, $\Pi = \|y^i_{,x^j}\|$, $\hat{\Pi} = \|\hat{y}^i_{,\hat{x}^j}\|$, $Y = \hat{Y}^{-1}$, $\Gamma = \hat{\Gamma}^{-1}$ и ковариантных компонент тензоров деформаций и метрических тензоров $E = \|e_{ij}\|$, $\hat{E} = \|\hat{e}_{ij}\|$, $G = \|g_{ij}\|$, $\hat{G} = \|\hat{g}_{ij}\|$ (i, j — номера строк и столбцов). В матричной форме имеем

$$E = (\hat{\Gamma}^{\mathrm{т}}\hat{G}\hat{\Gamma} - G)/2, \qquad \hat{E} = (\hat{G} - \Gamma^{\mathrm{т}}G\Gamma)/2, \tag{1.4}$$

и, следовательно, $\hat{E} = \Gamma^{\mathrm{т}}E\,\Gamma$ (индексом т обозначается транспонирование матриц).

Для определения объемной деформации используем декартову систему координат. Выделим в недеформированном теле элементарный параллелепипед, ограниченный координатными плоскостями, с ребрами длиной dy^i объемом $dV_0 = dy^1dy^2dy^3$. В текущий момент времени он займет объем $dV = (\hat{\boldsymbol{R}}_{,y^1} \times \hat{\boldsymbol{R}}_{,y^2}) \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_{,y^3}\, dV_0 = J\, dV_0$, где $J = \det\hat{Y}$ — якобиан преобразования декартовых координат материальных точек от исходных к текущим. Объемная деформация ε_V определяется по формулам $J = dV/dV_0$, $\varepsilon_V = (dV - dV_0)/dV_0 = J - 1$. Приравнивая детерминанты матриц в вытекающих из (1.4) равенствах $\hat{Y}^{\mathrm{т}}\hat{Y} = (\Pi^{-1})^{\mathrm{т}}(G + 2E)\Pi^{-1}$, $Y^{\mathrm{т}}Y = (\hat{\Pi}^{-1})^{\mathrm{т}}(\hat{G} - 2\hat{E})\hat{\Pi}^{-1}$, находим выражения якобиана через компоненты тензоров деформаций e, $\hat{e}$:

$$J = (\det G)^{-1/2}[\det(G + 2E)]^{1/2} = (\det\hat{G})^{1/2}[\det(\hat{G} - 2\hat{E})]^{-1/2}. \tag{1.5}$$

2. Скорости деформаций. Введем скорости материальных точек $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{l}_i = \hat{v}^i\hat{\boldsymbol{l}}_i$ в момент времени τ (точка обозначает дифференцирование по τ) и положим, что радиус-векторы точек и получаемые при заданиях дифференциалов dx^i и $d\hat{x}^i$ элементарные материальные волокна изменяются за малое время $\Delta\tau$ от $\hat{\boldsymbol{R}}$, $d\hat{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i}\, dx^i$, $d\hat{\boldsymbol{R}}' = \hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^i}\, d\hat{x}^i$ в момент τ до $\hat{\boldsymbol{R}}_1 = \hat{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{v}\Delta\tau$, $d\hat{\boldsymbol{R}}_1 = \hat{\boldsymbol{R}}_{1,x^i}\, dx^i$, $d\hat{\boldsymbol{R}}'_1 = \hat{\boldsymbol{R}}_{1,\hat{x}^i}\, d\hat{x}^i$ в момент $\tau + \Delta\tau$. Определяя скорости изменения квадратов длин данных волокон

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{|d\hat{\boldsymbol{R}}_1|^2 - |d\hat{\boldsymbol{R}}|^2}{\Delta\tau} = 2\eta_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{|d\hat{\boldsymbol{R}}'_1|^2 - |d\hat{\boldsymbol{R}}'|^2}{\Delta\tau} = 2\hat{\eta}_{ij}\, d\hat{x}^i\, d\hat{x}^j,$$

находим ковариантные компоненты двух тензоров скоростей деформаций

$$\eta_{ij} = \dot{e}_{ij} = (\boldsymbol{v}_{,x^i}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^j} + \boldsymbol{v}_{,x^j}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_{,x^i})/2 = (v_{i,j} + v_{j,i} + u^n_{,i}\, v_{n,j} + u^n_{,j}\, v_{n,i})/2,$$

$$\hat{\eta}_{ij} = (\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^j} + \boldsymbol{v}_{,\hat{x}^j}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_{,\hat{x}^i})/2 = (\hat{v}_{i;j} + \hat{v}_{j;i})/2,$$

связанные равенствами

$$\hat{\eta}_{mn} = \eta_{ij}\, x^i_{,\hat{x}^m}x^j_{,\hat{x}^n}, \qquad \eta_{ij} = \hat{\eta}_{mn}\,\hat{x}^m_{,x^i}\,\hat{x}^n_{,x^j}. \tag{2.1}$$

Тензоры $\eta = \eta_{ij}\,\boldsymbol{l}^i\,\boldsymbol{l}^j$, $\hat{\eta} = \hat{\eta}_{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}^i\,\hat{\boldsymbol{l}}^j$ представляют скорости деформаций в текущий момент времени в одной и той же материальной точке, но по отношению к разным состояниям тела (исходному в η и текущему в $\hat{\eta}$). Тензор η есть скорость изменения тензора деформаций Грина $\eta = \dot{e}$.

Дифференцируя якобиан $J = \det \hat{Y}$ по τ, получим $\dot{J} = J\dot{w}^m_{,\hat{y}^m}$. Из равенств $\boldsymbol{v}_{,\hat{x}^i} = \dot{w}^m_{,\hat{x}^i}\boldsymbol{k}_m = \hat{v}^n_{;i}\hat{\boldsymbol{l}}_n$ следует $\dot{w}^m_{,\hat{x}^i} = \hat{v}^n_{;i}\,\hat{y}^m_{,\hat{x}^n}$, $\dot{w}^m_{,\hat{y}^n} = \hat{v}^j_{;i}\,\hat{y}^m_{,\hat{x}^j}\,\hat{x}^i_{,\hat{y}^n}$, $\dot{w}^m_{,\hat{y}^m} = \hat{v}^i_{;i} = \hat{\eta}^i_i$. Скорость объемной деформации определяется по формулам $\dot{\varepsilon}_V = \dot{J} = J\,\hat{\eta}^i_i$. Имеем $\hat{\eta}^i_i = \dot{J}/J$.

Разобьем $\hat{\eta}$ на девиаторную и шаровую части:

$$\hat{\eta}_{ij} = \hat{\eta}^{(1)}_{ij} + \hat{\eta}^{(2)}_{ij}, \qquad \hat{\eta}^{(1)}_{ij} = \hat{\eta}_{ij} - \hat{\eta}^n_n\,\hat{g}_{ij}/3, \qquad \hat{\eta}^{(2)}_{ij} = \hat{\eta}^n_n\,\hat{g}_{ij}/3$$

и согласно (2.1) найдем разбиение η:

$$\begin{gathered}\eta_{ij} = \eta^{(1)}_{ij} + \eta^{(2)}_{ij}, \qquad \eta^{(1)}_{ij} = \hat{\eta}^{(1)}_{mn}\,\hat{x}^m_{,x^i}\,\hat{x}^n_{,x^j} = \dot{e}_{ij} - (\dot{J}/(3J))(g_{ij} + 2e_{ij}) = J^{2/3}\dot{\theta}_{ij},\\ \eta^{(2)}_{ij} = \hat{\eta}^{(2)}_{mn}\,\hat{x}^m_{,x^i}\,\hat{x}^n_{,x^j} = \hat{\eta}^n_n\,\hat{y}^m_{,x^i}\hat{y}^m_{,x^j}/3.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Тензоры $\hat{\eta}^{(1)} = \hat{\eta}^{(1)}_{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}^i\,\hat{\boldsymbol{l}}^j$, $\hat{\eta}^{(2)} = \hat{\eta}^{(2)}_{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}^i\,\hat{\boldsymbol{l}}^j$, $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}_{ij}\,\boldsymbol{l}^i\,\boldsymbol{l}^j$, $\eta^{(2)} = \eta^{(2)}_{ij}\,\boldsymbol{l}^i\,\boldsymbol{l}^j$ симметричные. Имеем $\hat{\eta} = \hat{\eta}^{(1)} + \hat{\eta}^{(2)}$, $\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$, $\eta^{(1)} = J^{2/3}\dot{\theta}$. Тензор $\eta^{(1)}$ представим в виде произведения $J^{2/3}$ на скорость изменения тензора $\theta = \theta_{ij}\,\boldsymbol{l}^i\,\boldsymbol{l}^j$, компоненты которого с учетом (1.5) выражаются через компоненты тензора деформаций e:

$$\theta_{ij} = J^{-2/3}(g_{ij} + 2e_{ij})/2 = J^{-2/3}\hat{y}^m_{,x^i}\hat{y}^m_{,x^j}/2. \tag{2.3}$$

Тензоры e и θ соосны.

Определитель матрицы $F = \|\theta^i_j\|$ смешанных компонент θ

$$F = J^{-2/3}G^{-1}(G + 2E)/2 = J^{-2/3}G^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}\hat{Y}^{\mathrm{T}}\hat{Y}\Pi/2$$

есть константа, не зависящая от деформаций:

$$\det F = J^{-2}(\det G)^{-1}(\det \Pi)^2(\det \hat{Y})^2/8 = J^{-2}(\det \hat{Y})^2/8 = 1/8.$$

Это налагает ограничение на допустимые значения компонент θ, которые не могут быть произвольными, не зависящими друг от друга. Тензор θ, в отличие от тензора e, имеет не три, а только два базисных инварианта, принимающих переменные значения и не зависящих от направлений его главных осей. В качестве таких базисных инвариантов можно взять

$$\Theta_1 = \theta^n_n = J^{-2/3}\,I_1, \qquad \Theta_2 = \theta^{ij\,\prime}\,\theta'_{ij} = J^{-4/3}\,I_2, \tag{2.4}$$

где $I_1 = 1{,}5 + e^n_n$, $I_2 = e^{ij\,\prime}e'_{ij}$ — инварианты e. Якобиан J можно рассматривать как дополнительный параметр, задание которого вместе с θ позволяет определить тензор деформаций $e_{ij} = J^{2/3}\theta_{ij} - 0{,}5g_{ij}$. Соответствующие e, θ тензоры-девиаторы $\theta'_{ij} = \theta_{ij} - (\theta^n_n/3)g_{ij} = J^{-2/3}e'_{ij}$, $e'_{ij} = e_{ij} - (e^n_n/3)g_{ij}$ различаются лишь множителем $J^{-2/3}$.

3. Напряжения. Введем симметричные тензоры напряжений Коши $\hat{\sigma}$ и Пиола — Кирхгофа σ, сопряженные тензорам $\hat{\eta}$, η, двойные свертки которых с $\hat{\eta}$, η являются отнесенными к единице объема тела в текущем и исходном состояниях плотностями мощности работы напряжений на скоростях деформаций

$$\hat{\psi} = \hat{\sigma}^{ij}\hat{\eta}_{ij} = \hat{\sigma}^{ij}\hat{v}_{j;i}, \qquad \psi = \sigma^{ij}\eta_{ij} = \Sigma^{ij}v_{j,i}, \qquad \Sigma^{ij} = \sigma^{ij} + \sigma^{in}u^j_{,n}. \tag{3.1}$$

Тензоры $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij}\,\hat{\boldsymbol{l}}_i\,\hat{\boldsymbol{l}}_j$, $\sigma = \sigma^{ij}\,\boldsymbol{l}_i\,\boldsymbol{l}_j$ описывают напряженное состояние в текущий момент времени в одной и той же материальной точке. Величины Σ^{ij} в (3.1) есть контрвариантные компоненты первого несимметричного тензора напряжений Пиола — Кирхгофа. Используя равенства $\psi = J\hat{\psi}$ и (2.1), найдем соотношения

$$\sigma^{ij} = J\hat{\sigma}^{mn}x^i_{,\hat{x}^m}x^j_{,\hat{x}^n}, \qquad \hat{\sigma}^{mn} = J^{-1}\sigma^{ij}\hat{x}^m_{,x^i}\hat{x}^n_{,x^j}, \tag{3.2}$$

связывающие значения контрвариантных компонент тензоров σ и $\hat{\sigma}$.

Разобьем $\hat{\sigma}$ на девиаторную и шаровую части:

$$\hat{\sigma}^{ij} = \hat{\sigma}^{(1)ij} + \hat{\sigma}^{(2)ij}, \qquad \hat{\sigma}^{(1)ij} = \hat{\sigma}^{ij} - p\hat{g}^{ij}, \qquad \hat{\sigma}^{(2)ij} = p\hat{g}^{ij},$$

где $p = \hat{\sigma}^n_n/3$ — среднее напряжение, называемое в дальнейшем гидростатическим давлением, и согласно (3.2) получим разбиение σ:

$$\begin{gathered}\sigma^{ij} = \sigma^{(1)ij} + \sigma^{(2)ij}, \qquad \sigma^{(1)ij} = J\hat{\sigma}^{(1)mn} x^i_{,\hat{x}^m} x^j_{,\hat{x}^n}, \qquad \sigma^{(2)ij} = pJ\alpha^{ij}, \\ \alpha^{ij} = x^i_{,\hat{y}^m} x^j_{,\hat{y}^m} = [(G+2E)^{-1}]^{ij}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Тензоры $\hat{\sigma}^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)ij}\hat{\boldsymbol{l}}_i\hat{\boldsymbol{l}}_j$, $\hat{\sigma}^{(2)} = \hat{\sigma}^{(2)ij}\hat{\boldsymbol{l}}_i\hat{\boldsymbol{l}}_j$, $\sigma^{(1)} = \sigma^{(1)ij}\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j$, $\sigma^{(2)} = \sigma^{(2)ij}\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j$, $\alpha = \alpha^{ij}\,\boldsymbol{l}_i\,\boldsymbol{l}_j$ симметричные. Имеем $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(1)} + \hat{\sigma}^{(2)}$, $\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$, $\sigma^{(2)} = pJ\alpha$.

С использованием (2.2), (3.3) и равенств $\sigma^{(1)ij}\eta^{(2)}_{ij} = \sigma^{(2)ij}\eta^{(1)}_{ij} = 0$ выражение для плотности мощности работы напряжений на скоростях деформаций преобразуется к виду

$$\psi = s^{ij}\dot{\theta}_{ij} + p\dot{J}, \tag{3.4}$$

где

$$s^{ij} = J^{2/3}\sigma^{(1)ij}. \tag{3.5}$$

Подставляя следующие из (2.1), (2.2), (3.3), (3.5) выражения

$$\hat{\sigma}^{(1)mn} = J^{-5/3}s^{ij}\,\hat{x}^m_{,x^i}\hat{x}^n_{,x^j}, \qquad \hat{\eta}^{(1)}_{mn} = J^{2/3}\dot{\theta}_{ij}\,x^i_{,\hat{x}^m}x^j_{,\hat{x}^n}$$

в уравнения $\hat{\sigma}^{(1)mn}\hat{g}_{mn} = \hat{\eta}^{(1)}_{mn}\hat{g}^{mn} = 0$, получим равенства

$$s^{ij}\theta_{ij} = 0, \qquad \sigma^{(2)ij}\dot{\theta}_{ij} = 0, \tag{3.6}$$

которые используются ниже при построении уравнений изотропного гиперупругого тела. Заметим, что по известным значениям p, s^{ij} определяются напряжения $\sigma^{ij} = J^{-2/3}s^{ij} + pJ\alpha^{ij}$ и по ним (с использованием (3.2)) — напряжения $\hat{\sigma}^{ij}$.

4. Уравнения изотропного гиперупругого тела. В обратимых термодинамических процессах [1] для каждой элементарной материальной частицы приращение полной энергии dU за малое время $d\tau$ принимает значение

$$dU = dW + dQ + dA = (\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + T\dot{S} + \rho_0^{-1}\psi)\,dM\,d\tau,$$

где dW — приращение кинетической энергии; dQ — приток тепла; dA — приращение работы напряжений, обусловленной действием на тело внешних массовых и поверхностных сил ($\rho_0^{-1}\psi = \rho^{-1}\hat{\psi}$); T — абсолютная температура; S — плотность энтропии на единицу массы тела; $dM = \rho_0 dV_0 = \rho dV$ — масса частицы; ρ_0, ρ — плотность материала в исходном и текущем состояниях. Далее будем рассматривать процессы, являющиеся либо изоэнтропическими, когда $\dot{S} = 0$, и, следовательно, адиабатическими, либо изотермическими. Тогда вместе с dU полным дифференциалом должно быть и приращение работы напряжений dA. Удовлетворяя этому условию, в соответствии с определением изотропного гиперупругого тела [2] с учетом (3.4) примем, что величина

$$d\Psi = \psi\,d\tau = s^{ij}\,d\theta_{ij} + p\,dJ \tag{4.1}$$

является полным дифференциалом плотности энергии деформации на единицу объема недеформированного тела $\Psi = \Psi(\Theta_1, \Theta_2, J)$, зависящей от якобиана J и инвариантов тензора θ (2.4). При этом работа напряжений в каждой элементарной материальной частице на любом замкнутом пути деформирования будет равна нулю.

В соответствии с (4.1) полагаем

$$s^{ij} = \Psi_{,\theta_{ij}} = \Psi_{,\Theta_1} g^{ij} + 2\,\Psi_{,\Theta_2} \theta^{ij\,\prime}, \qquad p = \Psi_{,J}. \tag{4.2}$$

Здесь в выражения для s^{ij} не включены слагаемые с $\sigma^{(2)ij}$ как не вносящие вклад в мощность работы напряжений на $\dot{\theta}_{ij}$ (см. (3.6)). Удовлетворяя первому равенству в (3.6), получим дифференциальное уравнение относительно Ψ с частными производными первого порядка

$$\Theta_1 \Psi_{,\Theta_1} + 2\Theta_2 \Psi_{,\Theta_2} = 0.$$

Его общее решение находится как произвольная функция интегралов характеристической системы уравнений

$$2\Theta_2\, d\Theta_1 = \Theta_1\, d\Theta_2, \qquad dJ = 0,$$

согласно которой $\Upsilon = \Theta_2 \Theta_1^{-2} = I_2 I_1^{-2} = C_1$, $J = C_2$ ($C_1, C_2 = \mathrm{const}$). Следовательно, Ψ является функцией только двух аргументов: $\Psi = \Psi(\Upsilon, J)$. Формулы для s^{ij} в (4.2) приводятся к виду

$$s^{ij} = 2\beta \Theta_1^{-2} (\theta^{ij\,\prime} - \Theta_1 \Upsilon g^{ij}) \qquad (\beta = \Psi_{,\Upsilon}).$$

С учетом (2.3), (2.4), (3.5) сократим их левые и правые части на общий множитель $J^{2/3}$. Используя также выражения для $\sigma^{(2)ij}$ из (3.3), получим уравнения изотропного гиперупругого тела

$$\sigma^{ij} = \Psi_{,e_{ij}} = 2\mu (e^{ij\,\prime} - \chi g^{ij}) + \gamma \alpha^{ij}. \tag{4.3}$$

Здесь $\mu = \beta I_1^{-2}$; $\gamma = pJ$; $\chi = I_1 \Upsilon$; $\Upsilon = I_2 I_1^{-2}$. Имеем $I_1 > 0$, $I_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant \Upsilon < 2/3$, $J > 0$. Коэффициенты μ и γ должны удовлетворять уравнению

$$(\mu I_1^2)_{,J} = (\gamma J^{-1})_{,\Upsilon}. \tag{4.4}$$

Таким образом, в уравнениях (4.3) коэффициенты зависят от значений трех инвариантов тензора деформаций I_1, I_2, J, но Ψ является функцией двух аргументов J, Υ. В [2–6] плотность энергии деформации ищется как функция трех аргументов.

Используя (1.3), (3.2), (3.3), (4.3), найдем уравнения, связывающие тензор напряжений Коши $\hat{\sigma}$ и тензор деформаций Альманси $\hat{e}$:

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}^{ij} = \mu J^{-1} (\hat{\alpha}^{in} \hat{\alpha}_n^j - \hat{\chi} \hat{\alpha}^{ij}) + p \hat{g}^{ij}, \qquad \hat{\chi} = 2I_1(\Upsilon + 1/3), \\ \hat{\alpha}^{ij} = \hat{x}^i_{,y^m} \hat{x}^j_{,y^m} = [(\hat{G} - 2\hat{E})^{-1}]^{ij}, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $\hat{\alpha}^{ij}$ — контрвариантные компоненты тензора $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{ij}\, \hat{\boldsymbol{l}}_i \hat{\boldsymbol{l}}_j$.

Предположим, что гидростатическое давление p зависит только от объемной деформации ε_V. Тогда $p = p(J)$ и вид функции Ψ существенно упрощается. Она представляется в виде суммы двух функций

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \qquad \Psi_2 = \int p\, dJ,$$

каждая из которых зависит только от одного аргумента: $\Psi_1 = \Psi_1(\Upsilon)$, $\Psi_2 = \Psi_2(J)$. Коэффициенты μ, γ в (4.3) принимают значения $\mu = I_1^{-2} \Psi_{1,\Upsilon}$, $\gamma = J \Psi_{2,J}$ и тождественно удовлетворяют уравнению (4.4).

В случае малых деформаций уравнения (4.3), (4.5), линеаризуемые относительно деформаций, переходят в соотношения закона Гука $\sigma^{ij} = 2\mu_0 e^{ij\,\prime} + p g^{ij}$, $p = K e_n^n$ с двумя константами материала, модулем сдвига μ_0 и модулем объемного сжатия K, получаемыми в пределе $\mu \to \mu_0$, $p/\varepsilon_V \to K$ при стремлении деформаций к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
2. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986.
4. **Гольденблат И. И.** Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969.
5. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
6. **Иванов Г. В.** Об уравнениях упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций // ПМТФ. 1978. № 3. С. 130–135.

Поступила в редакцию 30/VI 1999 г.,
в окончательном варианте — 29/XI 1999 г.