

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЙ СО МНОГИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В ЗАДАЧАХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

СибНИА им. С. А. Чаплыгина, 630051 Новосибирск

Рассматривается алгоритм получения численных решений геометрически нелинейных задач пространственного деформирования упругих стержней при наличии многих особых точек. Обсуждаются вопросы построения ответвляющихся решений и анализа устойчивости найденных состояний равновесия. Приводятся результаты исследования нелинейного деформирования и устойчивости кольца в пространственной постановке, которые подтверждаются экспериментом.

1. Теория кинематических групп [1] предназначена для построения и изучения дискретных аналогов нелинейных моделей деформируемых тел, на перемещения и повороты которых не накладываются ограничения.

С точки зрения изучения геометрически нелинейного поведения упругих тел значительный интерес представляют тонкие стержни, в которых для широкого класса условий опирания легко реализуются большие по сравнению с оболочками и пластинами изменения исходной конфигурации при упругом деформировании. В большинстве работ, посвященных гибким стержням, рассматривается частный случай деформирования — плоский изгиб [2–7]. Для решения задач нелинейной статики стержней в пространственной постановке в [8–10] предложены численные алгоритмы. Однако исследования пространственного изгиба ограничивались начальным участком деформирования и одним ответвляющимся решением, соответствующим первой точке бифуркации. Возможность существования решений со многими особыми точками в области произвольных перемещений стержней не изучалась.

В данной работе рассматривается алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости пространственных стержней на основе конечно-элементной модели [1], отвечающей нелинейной теории Кирхгофа. При расчете стержней для каждого узла расчетной схемы требуется задание в качестве исходной информации значений координат и направляющих косинусов двух присоединенных векторов, лежащих в плоскости поперечного сечения.

Приводится решение нелинейной задачи о пространственной эластике кругового кольца, нагруженного четырьмя силами в своей плоскости. Аналогичная задача для тонкой цилиндрической оболочки исследовалась в [11]. В настоящей работе показано, что при уменьшении длины оболочки, когда ее можно рассматривать как тонкое кольцо, многообразие форм равновесия значительно возрастает, что связано с появлением новых точек бифуркации. Результаты расчетов сравниваются с данными проведенного эксперимента.

2. Задача определения деформированного состояния стержня решается методом дискретного продолжения, представляющим собой пошаговый процесс с итерационным уточнением решения на каждом шаге.

Состояние дискретной модели стержня характеризуется N обобщенными координатами.

ми и параметром внешней нагрузки, который считается равноправной неизвестной. Рассмотрение условий равновесия приводит к системе уравнений метода Ньютона — Рафсона

$$\mathbf{H}^{k-1}\delta\mathbf{q}^k + \mathbf{w}^{k-1}\delta q_{N+1}^k + \mathbf{g}^{k-1} = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{g}$, $\mathbf{H}$ — градиент и матрица Гесса ансамбля конечных элементов; компоненты вектора $\mathbf{w}$ определяются формулой $w_i = \partial^2 W / \partial q_i \partial q_{N+1}$ ($i = 1, \dots, N$); вектор $\delta\mathbf{q}$ включает в себя вариации координат узлов и компонент узловых векторов поворота [1]; δq_{N+1} — приращение параметра нагрузки; W — потенциал внешних сил; индексом k обозначен номер итерации.

Решение системы (2.1) ищем в виде

$$\delta\mathbf{q}^k = \delta q_{N+1}^k \mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k,$$

где $\mathbf{x}^k$, $\mathbf{y}^k$ удовлетворяют системам уравнений

$$\mathbf{H}^{k-1}\mathbf{x}^k + \mathbf{w}^{k-1} = 0, \quad \mathbf{H}^{k-1}\mathbf{y}^k + \mathbf{g}^{k-1} = 0.$$

Приращение параметра нагрузки вычисляется по формулам

$$\delta q_{N+1}^1 = \pm \delta s / (1 + (\mathbf{x}^1)^T \mathbf{x}^1)^{1/2} \quad \text{при } k = 1; \quad (2.2)$$

$$\delta q_{N+1}^k = -(\mathbf{x}^1)^T \mathbf{y}^k / (1 + (\mathbf{x}^1)^T \mathbf{x}^1) \quad \text{при } k > 1 \quad (2.3)$$

(δs — шаг продолжения). Знак в (2.2) определяет направление движения по кривой равновесных состояний. Формулы для определения деформированной конфигурации дискретной системы по найденным компонентам вектора $\delta\mathbf{q}^k$ приведены в [1].

При движении вдоль кривой равновесных состояний на каждом шаге анализируется знакоопределенность всех угловых миноров матрицы $\mathbf{H}^0$. Состояние равновесия устойчиво согласно критерию Сильвестра, если все угловые миноры определены положительно. В противном случае состояние равновесия неустойчиво. Равенство нулю одного или более миноров свидетельствует о существовании критической точки. Кратность критической точки определяется числом угловых миноров $\mathbf{H}^0$, одновременно обратившихся в нуль. Поскольку процесс решения дискретный, то факт прохождения через критическую точку можно установить по смене знака угловых миноров. Однако возможно, что какой-либо минор касается нуля. Такую ситуацию можно выявить, анализируя поведение определителя матрицы $\mathbf{H}^0$ при достаточно малом шаге продолжения.

В случае особых точек матрица $\mathbf{H}^0$ вырождена. Тип особой точки определяется исходя из того, совместна или несовместна система (2.1). Если система несовместна, общее решение при $k = 1$ имеет вид

$$\delta\mathbf{q}^1 = \mu_i \mathbf{f}_i, \quad \delta q_{N+1}^1 = 0 \quad (i = 1, \dots, l < N), \quad (2.4)$$

где μ_i — произвольные множители; $\mathbf{f}_i$ — линейно независимые нетривиальные решения однородной системы уравнений $\mathbf{H}^0 \mathbf{f}_i = 0$ ($i = 1, \dots, l$). Векторы $\mathbf{f}_i$ определяют направления продолжения решения в окрестности особой точки. Дальнейшее уточнение решения проводится с использованием формулы (2.3).

Если система уравнений (2.1) совместна при $\det \mathbf{H}^0 = 0$, то общее решение записывается в виде

$$\delta\mathbf{q}^1 = \delta q_{N+1}^1 \mathbf{x}^1 + \mu_i \mathbf{f}_i \quad (i = 1, \dots, l < N).$$

Решение может быть продолжено по одному из $(l + 1)$ направлений по формулам (2.2), (2.3) при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l = 0$ либо (2.4), (2.3) при $\delta q_{N+1}^1 = 0$.

3. Исследуем спектр нелинейных решений в задаче об изгибе кругового кольца узкого прямоугольного сечения, сжатого четырьмя равноотстоящими радиальными силами P .

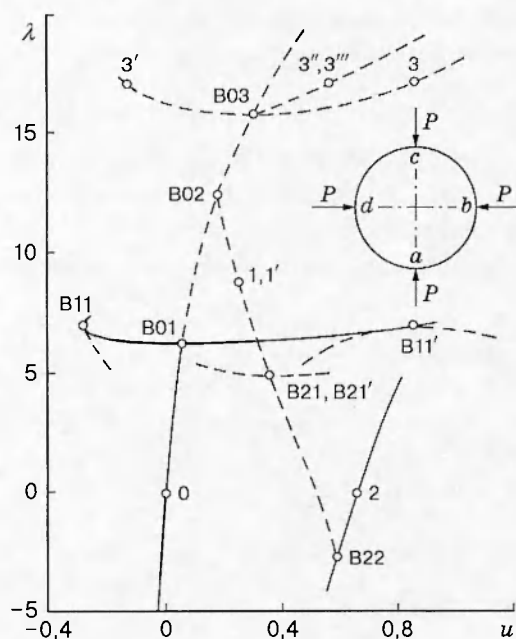


Рис. 1. Диаграмма равновесных состояний кольца:

сплошные линии — устойчивые состояния равновесия, штриховые — неустойчивые состояния равновесия

Приняты следующие параметры задачи: $L/h = 10$, $R/L = 10$, $\nu = 0,3$ (L , h — размеры поперечного сечения, R — радиус кольца, ν — коэффициент Пуассона). Кольцо можно рассматривать как очень короткую цилиндрическую оболочку длиной L . Конструкция разбита на 40 конечных стержневых элементов равной длины. В каждой из точек приложения сил введено по два ограничения, одно из которых наложено на перемещение из плоскости кольца, другое — на перемещение по направлению касательной к осевой линии. Таким образом, для точек приложения сил допускались смещения лишь в радиальном направлении, при этом свобода поворота поперечных сечений сохранялась. Исследовалось чисто математическое решение задачи, когда не накладывались ограничения на возможность самопересечения кольца.

На рис. 1 представлена диаграмма равновесных состояний, где по оси абсцисс отложено перемещение u точки a , отнесенное к радиусу кольца, а по оси ординат отложен параметр нагрузки $\lambda = PR^2/EI$, где E — модуль Юнга; $I = Lh^3/12$ — меньший момент инерции поперечного сечения. По существу, приводится проекция кривых деформирования в $(N + 1)$ -мерном пространстве на плоскость параметров λ , u .

Основной ветви деформирования, проходящей через точку недеформированного состояния 0, соответствуют плоские четырехлепестковые конфигурации кольца. В исследуемом диапазоне изменений прогиба ($0 < u < 1$) на основной ветви найдены три точки бифуркации B01, B02 и B03. Остановимся на каждой из этих точек и исследуем соответствующие им ветви нелинейных решений.

Точка B01 рассматривалась в [12, 13]. Вычисленное в настоящей работе критическое значение $\lambda_* = 6,155$ близко к результату $\lambda_* = 6,1104$ [13], найденному аналитическим методом для нерастяжимого кольца. В этой точке происходит переход к новым устойчивым состояниям равновесия (ветвь B11'–B01–B11). На этой ветви кольцо принимает характерную гантелеобразную форму с сохранением двойной симметрии деформирования. На рис. 2 показана форма кольца в состоянии B11 (в состоянии B11' она повернута на 90°). При $\lambda_* = 6,902$ (состояния B11, B11') происходит повторная потеря устойчивости, связанная с боковым выпучиванием вытянутой гантелеобразной конфигурации, характер которой аналогичен потере устойчивости эйлера стержня. Эта точка бифуркации и соответ-

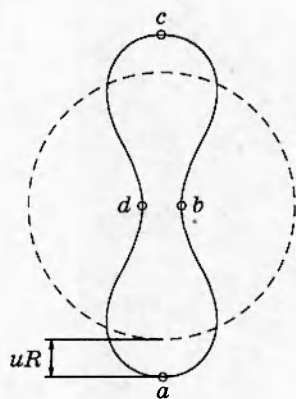


Рис. 2

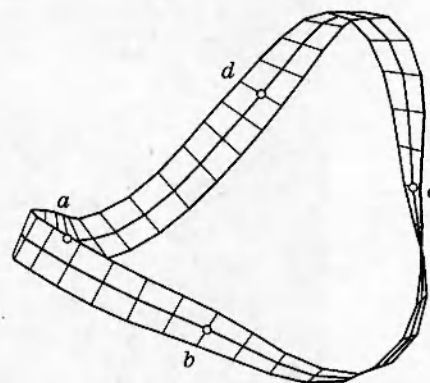


Рис. 3

Рис. 2. Гантелеобразная форма равновесия кольца при $\lambda_* = 6,902$

Рис. 3. Пространственная изгибно-крутильная форма равновесия кольца при $\lambda = 8,75$

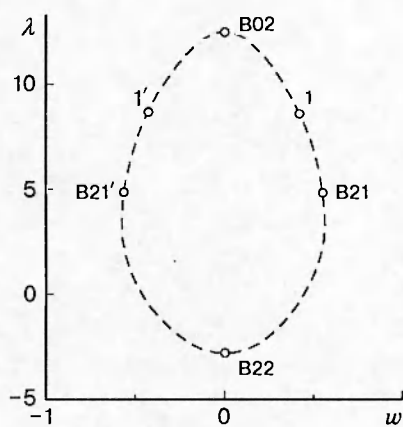


Рис. 4

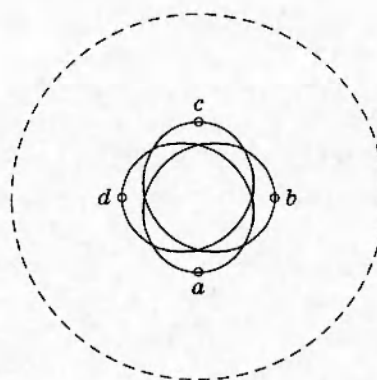


Рис. 5

Рис. 4. Диаграмма пространственных равновесных состояний кольца

Рис. 5. Плоская форма равновесия кольца при $\lambda_* = -2,81$

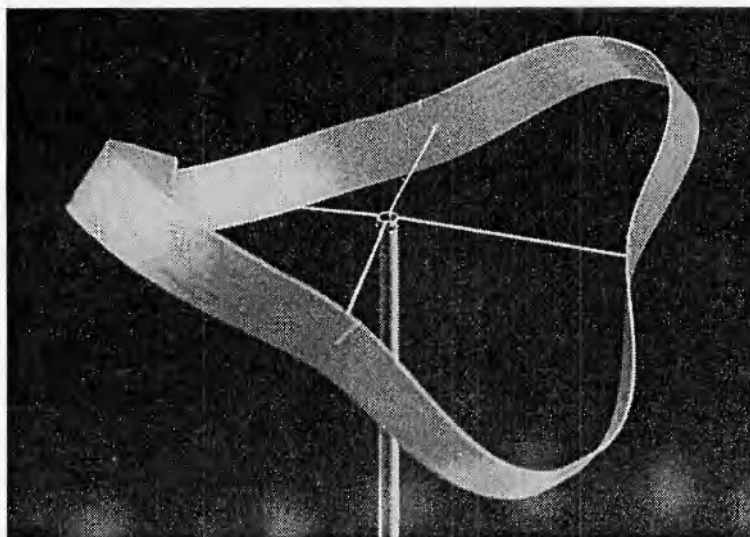


Рис. 6. Пространственная конфигурация кольца, полученная в эксперименте

ствующее ей закритическое поведение кольца исследовались в [3], где вычислено значение критического параметра нагрузки с погрешностью 5,7 %.

В точке B02 ($\lambda_* = 12,318$) на основной ветви деформирования возможен переход к пространственным изгибно-крутильным формам равновесия. На рис. 3 представлена форма кольца, вычисленная при $\lambda = 8,75$ (состояние 1, рис. 1). Подобная форма закритического деформирования впервые обнаружена в [11] при анализе изгиба короткой цилиндрической оболочки ($R/L = 1$), нагруженной четырьмя радиальными силами. Расчеты показывают, что ветвь решения, описывающего пространственное деформирование кольца, представляет собой замкнутую кривую, содержащую четыре точки бифуркации B02, B21, B21' и B22, из которых три последние обнаружены впервые. На рис. 4 представлена диаграмма равновесных состояний в плоскости параметров λ, w (w — перемещение из плоскости начальной кривизны кольца, отнесенное к радиусу R , для узла, равноотстоящего от точек приложения сил a и b). При движении по данной ветви равновесных состояний $\det \mathbf{H}^0$ меняет знак в точках бифуркации B21 и B21' и касается нуля в точках B02 и B22. В точках B21 и B21' происходит переход к новым пространственным формам равновесия, которые в настоящей работе не рассматриваются. Через точку B22 проходит еще одна ветвь устойчивых плоских форм равновесия. Так, в состоянии B22 ($\lambda_* = -2,810$) кольцо принимает форму, показанную на рис. 5. В состоянии 2 на этой ветви (см. рис. 1), которое соответствует нулевой нагрузке, кольцо принимает форму спирали, вложенной в окружность радиуса $R/3$.

В отличие от рассмотренных выше особых точек точка бифуркации B03 ($\lambda_* = 16,670$) имеет кратность 2, т. е. от нее отходят два решения (ветви 3-B03-3' и 3''-B03-3''' на рис. 1), которым соответствуют плоские формы равновесия.

Обсуждаемое явление потери устойчивости плоской формы изгиба и последующее деформирование кольца могут быть фрагментарно воспроизведены в эксперименте на тонкой целлулоидной модели, нагруженной с помощью четырех натянутых радиальных нитей. При постепенном увеличении натяжения нитей можно наблюдать переход от плоских четырехлепестковых форм равновесия к пространственным конфигурациям кольца. На рис. 6 показано деформирование состояния кольца, аналогичное представленному на рис. 3. Дальнейшее нагружение приводит к хлопку, в результате чего кольцо стремится к состоянию 2 (см. рис. 1), при котором натяжение нитей исчезает. Эта форма не мо-

жет быть строго воспроизведена в эксперименте из-за конечности размеров поперечного сечения модели.

Исследование задачи в пространственной постановке с помощью разработанного алгоритма позволило выявить неизвестные ранее особые точки нелинейного решения, изучить деформирование кольца и определить устойчивость найденных состояний равновесия. Приведенные результаты не охватывают всех возможных форм равновесия, которые могут быть получены путем продолжения решения по рассмотренным ветвям при возможном обнаружении новых особых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. В., Левяков С. В. Кинематические группы и конечные элементы в механике деформируемого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 67–82.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
3. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. О численном решении задач нелинейного изгиба плоских стержней // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 10. С. 91–98.
4. Srpac S., Saje M. Large deformations of thin curved plane beam of constant initial curvature // Intern. J. Mech. Sci. 1986. V. 28, N 5. P. 275–287.
5. Miller R. E. Numerical analysis of generalized plane elastica // Intern. J. Num. Meth. Eng. 1980. V. 15, N 3. P. 325–332.
6. Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление плоских равновесных форм тонких стержней методом самоуравновешенных невязок // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 142–151.
7. Григолюк Э. И. Нелинейное поведение пологих стержней // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 759–763.
8. Bathe K. J., Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures // Intern. J. Num. Meth. Eng. 1979. V. 14, N 7. P. 961–986.
9. Surana K. S., Soreem R. M. Geometrically non-linear formulation for three-dimensional curved beam elements with large rotations // Intern. J. Num. Meth. Eng. 1989. V. 28, N 1. P. 43–73.
10. Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление пространственных равновесных форм тонких упругих стержней методом самоуравновешенных невязок // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 130–136.
11. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 1. С. 131–138.
12. Алфутов Н. А., Ключев Ю. И., Трофимов В. В. Устойчивость кругового кольца при существенно неосесимметричном нагружении // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, Ростов-на-Дону. М.: Наука, 1971. С. 209–213.
13. Seide P., Albano E. D. Bifurcation of circular rings under normal concentrated loads // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40, N 1. P. 233–238.

Поступила в редакцию 31/III 1997 г.