

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

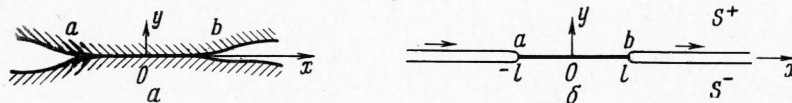
Ю. П. Емец

(Киев)

Дается решение задачи о распределении плотности тока, напряженности и потенциала электрического поля в окрестности контакта двух проводящих сред, которые обладают различными скалярными электропроводностями σ и постоянными Холла R_H . Такая задача встречается в теории магнитной гидродинамики и в физике полу-проводников, например, при исследовании полей в кусочно-неоднородных средах или на электродах в магнитогидродинамических каналах и электротехнических устройствах.

Если одна из двух сред обладает совершенными свойствами ($\sigma = \infty$, $R_H = 0$), то в рамках приближенной теории (пренебрегается индуцированным магнитным полем) задача сводится к нахождению аналитической функции в области, занимаемой второй средой, и ее решение часто можно найти при помощи конформного отображения области на многоугольник [1,2]. В иных случаях электрическое поле в каждой среде зависит от физических свойств и геометрии областей двух сред совместно и требуется найти решение, сопряженное на контакте. Удобным математическим аппаратом для решения таких задач служит теория сингулярных интегральных уравнений [3,4].

1. Приведем решение задачи, предполагая, что электрический контакт осуществляется между двумя электропроводными телами. Будем считать, что участок контакта мал по сравнению с радиусом кривизны обоих тел, тогда удобно каждое тело представить полуплоскостями с общей границей на участке ab (фиг. 1, a , b).



Фиг. 1

Положим, что внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$ $(0, 0, H_z)$ всюду однородно, но, в общем случае, не одинаковое в верхней и нижней полуплоскостях и направлено нормально к векторам тока $\mathbf{j}(x, y)$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x, y)$; собственным магнитным полем рассматриваемых токов пренебрежем. Из системы

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} - \frac{\omega \tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, & \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \omega \tau &= R_H \sigma H \end{aligned} \quad (1.1)$$

и принятых предположений вытекает, что поле тока удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0$. Поэтому можно ввести, как и в работе [5], комплексный потенциал электрического тока $F(z)$

$$\begin{aligned} F(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) & (z &= x + iy) \\ \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = j_x(x, y) - ij_y(x, y), & \frac{dF(z)}{dz} &= j(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь P и Q — потенциальная и силовая функции тока соответственно.

Обозначим полуплоскость $\text{Im } z > 0$ через S^+ , а полуплоскость $\text{Im } z < 0$ — через S^- ; за положительное направление обхода на действительной оси примем то, которое оставляет область S^+ слева.

Решается задача о распределении полевого тока, протекающего через контакт. Имеем следующие граничные условия: на участке контакта нормальная компонента тока и касательная компонента напряженности электрического поля непрерывны, на остальных участках действительной оси нормальная компонента тока равна нулю в каждой области. Эти условия приводят к следующей краевой задаче (индексы 1 и 2 относятся соответственно к S^+ и S^-):

$$\begin{aligned} \text{Im } j_1(x) &= \text{Im } j_2(x), \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0 \\ \text{Re} \left\{ \frac{1 + i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} j_1(x) \right\} &= \text{Re} \left\{ \frac{1 + i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} j_2(x) \right\}, \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0 \\ \text{Im } j_1(x) &= \text{Im } j_2(x) = 0, \quad |x| > l \quad \text{при } y = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь использована комплексная запись закона Ома (1.1)

$$j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y) = \frac{-\sigma}{1 + i\omega\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

где U — электростатический потенциал.

Необходимо указать еще расположение источников и стоков тока в S^+ и S^- . Ради упрощения полученных ниже формул положим, что в S^+ в точке $z = \infty$ расположен источник конечной интенсивности, а в S^- в точке $z = \infty$ — сток. Тогда получаем условие на бесконечности

$$j_i(z) = \frac{C_i}{z} + O(z^{-2}) \quad (i = 1, 2) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

2. Для решения задачи введем две кусочно-голоморфные функции

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= \begin{cases} \Psi_1^+(z) & \text{при } z \in S^+, \Psi_1^+(z) = j_1(z) \\ \Psi_1^-(z) & \text{при } z \in S^-, \Psi_1^-(z) = \overline{j_1(\bar{z})} \end{cases} \\ \Psi_2(z) &= \begin{cases} \Psi_2^+(z) & \text{при } z \in S^+, \Psi_2^+(z) = \overline{j_2(\bar{z})} \\ \Psi_2^-(z) & \text{при } z \in S^-, \Psi_2^-(z) = j_2(z) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нормальную компоненту тока на контакте обозначим через $h(x)$ и положим, что она удовлетворяет условию Гельдера.

На основании первого и последнего граничных условий (1.3) функции $\Psi_i(z)$ ($i = 1, 2$) можно выразить при помощи интеграла Шварца через $h(x)$

$$\Psi_1(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(x) dx}{x - z}, \quad \Psi_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(x) dx}{x - z} \quad (2.2)$$

Эти функции, очевидно, удовлетворяют на бесконечности условию (1.5). Разложение функций $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ в бесконечно удаленных точках соответственно в областях S^+ и S^- дает

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= \frac{z^{-1}}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx + \frac{z^{-2}}{\pi} \int_{-l}^l xh(x) dx + \dots \quad \text{при } z \in S^+ \\ \Psi_2(z) &= -\frac{z^{-1}}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx - \frac{z^{-2}}{\pi} \int_{-l}^l xh(x) dx - \dots \quad \text{при } z \in S^- \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда находим значения постоянных C_{11} и C_{21} в (1.5)

$$C_{11} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx, \quad C_{21} = -\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx, \quad C_{11} = -C_{21} = \pi^{-1} I \quad (2.4)$$

где I — заданная в задаче величина суммарного тока, протекающего через контакт или, что то же, интенсивность источника, помещенного в точку $z = \infty$ в области S^+ .

Второе граничное условие (1.3), учитывая (2.1) и (2.2), представим в виде

$$\frac{1 + i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} \Psi_1^+(x) + \frac{1 - i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} \Psi_1^-(x) = \frac{1 + i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} \Psi_2^+(x) + \frac{1 - i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} \Psi_2^-(x) \quad \text{при } y = 0, \quad -l < x < l \quad (2.5)$$

Отсюда, используя формулы Сохоцкого — Племеля, получаем однородное сингулярное интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция $h(x)$

$$(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1) h(x) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(t) dt}{t - x} = 0 \quad (-l < x, t < l) \quad (2.6)$$

Этому уравнению соответствует обобщенная задача линейного сопряжения (задача Римана) [3, 4]; для функции $\Psi_1(z)$ она имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1)}{\sigma_1 + \sigma_2 - i(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1)} \Psi_1^-(x) \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0 \\ \Psi_1^+(x) &= \Psi_1^-(x) \quad |x| > l \quad \text{при } y = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исходя из физического предположения о скоплении тока на концах контакта, решение краевой задачи (2.7) находим в классе функций, имеющих интегрируемые особенности в узлах a и b . Это решение, по условию (1.5), исчезает на бесконечности

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= C_{11} (z + l)^{-1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon} \\ \varepsilon &= \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ \left((z + l)^{-1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon} = \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Согласно (2.1), функция $\Psi_1(z)$ должна удовлетворять условию

$$\Psi_1(z) = \overline{\Psi_1(\bar{z})}$$

из которого следует, что постоянная C_{11} должна быть действительной величиной. Из (2.8) находим все искомые поля в S^+ .

Распределение тока в S^+ определяется непосредственно функцией $\Psi_1(z)$

$$j_1(z) = j_{1x}(x, y) - ij_{1y}(x, y) = C_{11} (z + l)^{1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon} \text{ при } z \in S^+, \quad (2.9)$$

а на контакте ab находится по формулам Сохоцкого — Племеля

$$\begin{aligned} j_{1y}(x, 0) = h(x) &= \frac{\Psi_1^-(x) - \Psi_1^+(x)}{2i} = C_{11} (l + x)^{-1/2-\varepsilon} (l - x)^{-1/2+\varepsilon} \times \\ &\times \left[1 + \left(\frac{\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (-l < x < l) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$j_{1x}(x, 0) = \frac{\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x)}{2} = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} C_{11} (\sigma_1 \omega_2 \tau_2 - \sigma_2 \omega_1 \tau_1) (l+x)^{-1/2-\varepsilon} \times \\ \times (l-x)^{-1/2+\varepsilon} \left[1 + \left(\frac{\sigma_1 \omega_2 \tau_2 - \sigma_2 \omega_1 \tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (-l < x < l)$$

Постоянная C_{11} определяется из условия

$$\int_{-l}^l j_{1y}(x, 0) dx = I \quad (2.11)$$

Используя известную формулу

$$\int_{-1}^1 (1+t)^{-1/2-\varepsilon} (1-t)^{-1/2+\varepsilon} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \varepsilon} \quad (2.12)$$

легко убедиться, что действительно

$$C_{11} = \pi^{-1} I \quad (2.13)$$

Далее находим электрическое поле в S^+ (2.14)

$$E_1(z) = -\frac{\partial U_1}{\partial x} + i \frac{\partial U_1}{\partial y} = (1 + i \omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} (z+l)^{-1/2-\varepsilon} (z-l)^{-1/2+\varepsilon} \quad \text{при } z \in S^+$$

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i \omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \int_{z_0}^z (z+l)^{-1/2-\varepsilon} (z-l)^{-1/2+\varepsilon} dz \right\} \\ \text{при } z \in S^- \quad (2.15)$$

В формуле (2.15) интеграл выражается через элементарные функции только тогда, когда показатель степени $1/2 + \varepsilon$ — рациональное число. Положим в этом случае $1/2 + \varepsilon = p/q$ (p, q — натуральные числа; $p < q$) и применим в (2.15) подстановку

$$\left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{1/q} = t \quad (2.16)$$

Эта подстановка приводит (2.15) к виду

$$U_1(t) = U_1(t_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i \omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \int_{t_0}^t \frac{t^{p-1} dt}{1-t^q} \right\} \quad (2.17)$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение [на [простые дроби, получим вместо (2.15)

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i \omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \frac{1}{q} \sum_{v=0}^{q-1} \exp \left[\frac{2\pi i v (p-q)}{q} \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\exp \left(\frac{2\pi i v}{q} \right) - \left(\frac{z-l}{z+l} \right)^{1/q} \right] \left[\exp \left(\frac{2\pi i v}{q} \right) - \left(\frac{z_0-l}{z_0+l} \right)^{1/q} \right]^{-1} \right\} \quad (2.18)$$

Формулы, аналогичные приведенным, можно получить и для области S^- , причем оказывается, что на контакте имеет место соотношение

$$j_{1x}(x, 0) = -j_{2x}(x, 0), \quad -l < x < l \quad (2.19)$$

которое является следствием полной симметрии областей S^+ и S^- в геометрическом отношении и в задании краевых условий.

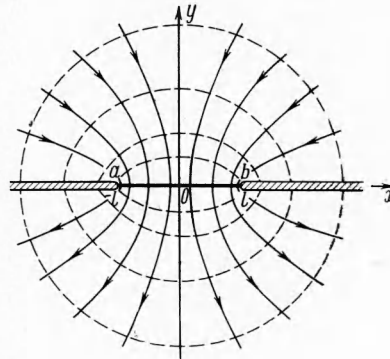
Проанализируем выражения для тока (2.9), (2.10) в следующих случаях.

(а) Пусть в двух средах эффект Холла не проявляется ($\omega_1\tau_1 = \omega_2\tau_2 = 0$), а проводимость каждой из них имеет конечное значение σ_1 и σ_2 . Тогда из (2.9) — (2.10) следует

$$j_1(z) = \frac{I}{\pi \sqrt{z^2 - l^2}} \quad \text{при } z \in S^+ \quad (2.20)$$

$$j_{1y}(x, 0) = \frac{I}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}, \quad j_{1x}(x, 0) = 0, \quad -l < x < l \quad (2.21)$$

На фиг. 2 изображена качественная картина распределения силовых (сплошные кривые) и потенциальных (пунктирные кривые) линий электрического тока, описываемая выражением (2.20). Отсутствие касательной компоненты тока на контакте объясняется симметрией распределения тока в двух средах относительно оси ординат. Зависимость (2.21) иллюстрируется кривой 1 на фиг. 3.



Фиг. 2

(б) Рассмотрим случай, когда только в среде, занимающей область S^+ , проявляется эффект Холла ($\omega_1\tau_1 \neq 0$, $\omega_2\tau_2 = 0$), и по-прежнему проводимость двух сред конечна. Величины $j_1(z)$, $j_{1y}(x, 0)$ и $j_{1x}(x, 0)$ в S^+ определяются теперь формулами

$$j_1(z) = \frac{I}{\pi} (z+l)^{-1/2-\varepsilon_1} (z-l)^{-1/2+\varepsilon_1} \quad \text{при } z \in S^+$$

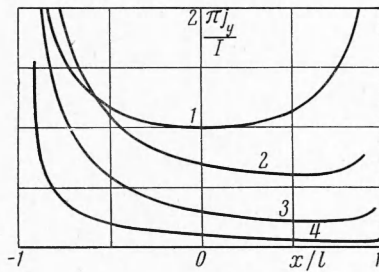
$$j_{1y}(x, 0) = \frac{1}{\pi} I (l+x)^{-1/2-\varepsilon_1} (l-x)^{-1/2+\varepsilon_1} \left(1 + \frac{\sigma_2^2 \omega_1^2 \tau_1^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \right)^{-1/2}, \quad -l < x < l$$

$$j_{1x}(x, 0) = \frac{-\sigma_2 \omega_1 \tau_1 I}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} (l+x)^{-1/2-\varepsilon_1} (l-x)^{-1/2+\varepsilon_1} \left(1 + \frac{\sigma_2^2 \omega_1^2 \tau_1^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \right)^{-1/2}, \quad -l < x < l \quad (2.22)$$

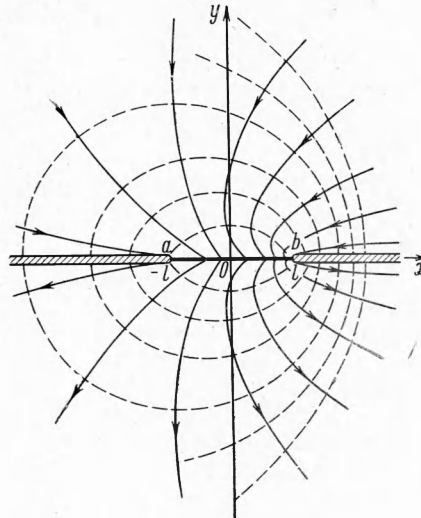
$$\left(\varepsilon_1 = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{-\sigma_2 \omega_1 \tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad 0 \leq |\varepsilon_1| < \frac{1}{2} \right)$$

Качественная картина распределения тока, получаемая из (2.22), и аналогичных формул для области S^- приведена на фиг. 4. Влияние эффекта Холла проявляется в искривлении линий тока на отрезке ab и в увеличении их плотности возле одного из концов контакта. Концентрация тока возле этого конца возрастает по мере увеличения параметра $\omega_1\tau_1$.

На фиг. 3 приведены кривые 2, 3 и 4, характеризующие распределение нормальной плотности тока на отрезке ab , соответственно для трех значений безразмерного параметра $\sigma_2 \omega_1 \tau_1 / (\sigma_1 + \sigma_2) = 1, 3$ и 10 (концентрация тока возле конца контакта a).



Фиг. 3



Фиг. 4

При фиксированном значении параметра $\omega_1\tau_1$ концентрацию тока на контакте можно ослабить путем уменьшения проводимости среды, занимающей область S^- .

(в) В общем случае, когда эффект Холла существует в двух средах, качественная картина распределения тока совпадает с той, которая приведена на фиг. 4, и спра-

ведливы все рассуждения пункта (б). Они, однако, нуждаются в следующем важном дополнении.

Если выполняется равенство

$$\frac{\omega_1 \tau_1}{\sigma_1} = \frac{\omega_2 \tau_2}{\sigma_2} \quad (2.23)$$

которое, учитывая (1.1), можно представить еще в виде

$$R_{1H} H_1 = R_{2H} H_2 \quad (2.24)$$

то от выражений (2.9), (2.10) приходим к формулам (2.20), (2.21), описывающих распределение тока при отсутствии эффекта Холла в двух средах. Это объясняется тем, что явление Холла при соблюдении условия (2.24) одинаково проявляется в двух средах, и его влияние на распределение тока в этом случае не сказывается (две среды ведут себя как один проводник, в котором проведены разрезы на лучах $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$).

Условие (2.24) можно рассматривать как предельный случай двух неравенств

$$R_{1H} H_1 > R_{2H} H_2, \quad R_{1H} H_1 < R_{2H} H_2 \quad (2.25)$$

каждое из которых указывает, возле какого из двух концов контакта возникает концентрация тока.

На контакте двух сред образуется заряженный слой, он определяется из условия

$$E_{2y} - E_{1y} = 4 \pi \rho_e, \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0 \quad (2.26)$$

или, если использовать закон Ома, из другого условия

$$\frac{1}{\sigma_1} j_{2y}(x, 0) - \frac{\omega_2 \tau_2}{\sigma_2} j_{2x}(x, 0) - \frac{1}{\sigma_1} j_{1y}(x, 0) + \frac{\omega_1 \tau_1}{\sigma_1} j_{1x}(x, 0) = 4 \pi \rho_e, \quad -l < x < l \quad (2.27)$$

Отсюда находим

$$\rho_e = \frac{1}{4 \pi^2 \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 + \sigma_2)} I [\sigma_1^2 (1 + \omega_2^2 \tau_2^2) - \sigma_2^2 (1 + \omega_1^2 \tau_1^2)] (l+x)^{-1/2-\epsilon} (l-x)^{-1/2+\epsilon} \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{\sigma_1 \omega_2 \tau_2 - \sigma_2 \omega_1 \tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0 \quad (2.28)$$

После нахождения распределения линейного заряда на участке ab все основные характеристики поля в окрестности контакта определены.

Рассмотренную задачу легко обобщить на случай, когда контакт между электропроводными телами осуществляется на нескольких участках.

Поступила 17 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Wick R. F. Solution of the field problem of the germanium generator. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 6.
2. Hurwitz H. J., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 2.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
5. Емец Ю. П. О распределении тока на проницаемых электродах при наличии эффекта Холла в потоке электропроводной среды. ПМТФ, 1966, № 3.