Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА

УДК 539.214; 539.374

А. Л. Свистков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614061 Пермь

В данной работе строится модель упругопластического деформирования материала, учитывающая следующие особенности его поведения: 1) упругие деформации достигают больших величин; 2) выражение свободной энергии материала не формулируется в явном виде от первого, второго, третьего инвариантов меры деформации Фингера или Коши — Грина; 3) независимо от того, какое неоднородное поле напряжений существует в среде, после снятия внешних нагрузок и завершения релаксационных процессов материал должен переходить в ненагруженное состояние.

Такое поведение характерно для незашитых полимеров в высокоэластичном состоянии. Выражение их свободной энергии часто формулируется в виде функции от главных удлинений, которую трудно представить аналитической зависимостью от инвариантов деформации [1–3].

Для описания релаксационных процессов в материалах предложены модели дифференциального типа (например, [4–6]) и интегрального [7–9]. В данной работе за основу взято описание релаксационных процессов с помощью внутренних параметров. Показано, что простой учет их в выражении свободной энергии с помощью квадратичной формы позволяет построить разумную математическую модель. Степень упругого и пластического деформирования среды количественно определяется соответствующими тензорами. Известны различные варианты разложения меры полной деформации на упругую и пластическую [10–17]. В настоящей работе использовано разложение Ли [16]. Оно определяется с точностью до пластического поворота [18]. Предложено тензорную характеристику скорости пластического деформирования находить на основе анализа скоростей изменения главных упругих удлинений. Уравнение пластического течения сформулировано без применения объективной производной. Все выражения и равенства выписаны в координатах, удобных для решения задач с помощью модифицированного метода Лагранжа [19].

1. Обозначения. Используем в приводимых ниже выкладках строчные буквы для обозначения скалярных величин, полужирные строчные для векторных характеристик, полужирные прописные для тензорных величин второго ранга.

Обозначим буквами t_0, t, t_* начальный, текущий и отсчетный (произвольно выбранный между ними) моменты времени: $t_0 \leqslant t_* < t$. Термин отсчетный применительно к моменту t_* используется в связи с тем, что все определяющие уравнения сформулированы в координатах $\mathbf{r}_*$, которые имели точки среды в момент t_*. Буквами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ обозначим радиусы-векторы точек среды в начальный t_0 и текущий t моменты времени, вектором $\mathbf{r}_\alpha$ — положение точек среды в равновесном ненагруженном состоянии. Другими словами, считаем, что положение точек континуума будет описываться радиусом-вектором $\mathbf{r}_\alpha$, если материал из текущего состояния мгновенно разгрузить и выждать время до завершения всех переходных процессов.

В проводимых ниже выкладках применяются тензоры

$$\mathbf{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_\alpha)}{\partial \mathbf{r}_\alpha}, \quad \mathbf{Q}_A = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha(t, \mathbf{r}_*)}{\partial \mathbf{r}_*}, \quad \mathbf{Q}_R = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_*)}{\partial \mathbf{r}_*}.$$

Нам потребуются в дальнейшем единичный тензор $\mathbf{E}$ и операторы градиента места, имеющие вид

$$\nabla \ldots = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \ldots, \quad \nabla_* \ldots = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_*^i} \ldots,$$

где $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$; $\mathbf{r}_* = x_*^i \mathbf{e}_i$; $\mathbf{e}_i$ — базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат. Далее в математических выражениях нижний индекс в угловых скобках около закрывающейся круглой скобки $(\ldots)_{\langle i \rangle}$ означает отсутствие суммирования по нему в выделенных скобках, символ I_3^* — третий инвариант тензора $\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R$:

$$I_3^* = I_3(\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R).$$

2. Вывод связи скорости изменения главных упругих удлинений с геометрическими тензорными характеристиками среды. Рассмотрим меру упругой деформации Коши — Грина

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right) = \mathbf{Q}_\alpha^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_\alpha. \tag{2.1}$$

Пусть нормированные векторы $\mathbf{g}_i$ являются его собственными векторами, а квадраты величин λ_i — собственными значениями. Тензор поворота $\mathbf{O}$ связывает ортонормированную тройку базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат $\mathbf{e}_i$ с ортонормированной тройкой $\mathbf{g}_i$:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{2.2}$$

Меру упругой деформации Коши — Грина можно представить в виде

$$\mathbf{G} = \lambda_i^2 \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i = \lambda_i^2 \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \tag{2.3}$$

а квадраты упругих удлинений вдоль главных осей λ_i^2 определить с помощью формул

$$\lambda_i^2 = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим, как меняются во времени характеристики λ_i. Продифференцируем равенство (2.4) по времени t. С помощью кососимметричного тензора

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{O}^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$$

оно запишется в виде

$$\left(2\lambda_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}\right)_{\langle i \rangle} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{W}^{\mathrm{T}}) =$$

$$= (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot (\mathbf{W} \cdot \lambda_j^2 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \cdot \mathbf{O} + \lambda_j^2 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{W}^{\mathrm{T}}).$$

Правила свертки тензоров и кососимметричность тензора $\mathbf{W}$ позволяют упростить полученное выражение:

$$\left(2\lambda_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}\right)_{\langle i \rangle} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \cdot \mathbf{O}.$$

Таким образом, задача расшифровки закона изменения λ_i во времени свелась к анализу поведения производной от тензора $\mathbf{G}$.

Еще раз отметим, что наша цель — формулировка всех уравнений в координатах t, $\mathbf{r}_*$. Это касается и особенностей записи тензора $\mathbf{G}$. Перейти к ней позволяет связь

$$\mathbf{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_*} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_*}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_*} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial \mathbf{r}_*}\right)^{-1} = \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}. \quad (2.5)$$

В результате мера упругой деформации Коши — Грина представляется выражением

$$\mathbf{G} = (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}. \quad (2.6)$$

От него нетрудно взять производную по времени t. С помощью формулы дифференцирования обратного тензора

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_A^{-1}}{\partial t} = -\mathbf{Q}_A^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}$$

она записывается как

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -(\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} + (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} +$$
$$+ (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} - (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}. \quad (2.7)$$

Изменим вид правой части равенства (2.7), включив во второе и третье слагаемые свертку с единичным тензором:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -(\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} +$$
$$+ (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}) \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} +$$
$$+ (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot (\mathbf{Q}_R^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R) \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} - (\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_R \cdot \mathbf{Q}_A^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}.$$

Связи (2.5), (2.6) позволяют записать более коротко полученное выражение:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -(\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{Q}_\alpha^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_\alpha +$$
$$+ \mathbf{Q}_\alpha^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R^{-1} \cdot \mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}. \quad (2.8)$$

Для дальнейшего анализа потребуется конкретная расшифровка смысла тензора $\mathbf{Q}_\alpha$. Рассмотрим ее. В соответствии с теоремой о полярном разложении тензоров справедливо равенство $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{V}$ с положительным симметричным тензором $\mathbf{V}$ и ортогональным тензором $\mathbf{O}_\alpha$. На основании представлений (2.1), (2.3) легко установить непосредственный вид тензора $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \lambda_i \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому тензор $\mathbf{Q}_\alpha$ может быть представлен с помощью записи

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{O}_f \cdot \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \quad (2.9)$$

где тензор поворота

$$\mathbf{O}_f = \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{O}. \quad (2.10)$$

Легко проверить, что это тот самый ортогональный тензор, который получается при представлении собственных векторов $\mathbf{h}_i$ меры упругой деформации Фингера $\mathbf{F}$ через базисные векторы $\mathbf{e}_i$ прямоугольной декартовой системы координат. Отметим также, что собственными значениями тензора $\mathbf{F}$ будут величины λ_i^2, которые являются одновременно и собственными значениями тензора $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right)^{\mathrm{T}} = \lambda_i^2 \mathbf{O}_f \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}};$$
$$\mathbf{h}_i = \mathbf{O}_f \cdot \mathbf{e}_i. \tag{2.11}$$

Подставим значение тензоров $\mathbf{Q}_\alpha$ и $\mathbf{G}$ (2.3), (2.9) в равенство (2.8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -(\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \lambda_i^2 \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \\ + \mathbf{O} \cdot \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{O}_f \cdot \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \\ + \mathbf{O} \cdot \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R^{-1} \cdot \mathbf{O}_f \cdot \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} - \lambda_i^2 \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}.\end{aligned}$$

Оно позволит нам переписать производную по времени от параметра λ_i (2.5) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2\lambda_i}\,\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \left((\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \lambda_j^2 \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j\right) + \\ + \left(\frac{1}{2\lambda_i}\,\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \left(\lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} \cdot \mathbf{O}_f \cdot \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k\right) + \\ + \left(\frac{1}{2\lambda_i}\,\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \left(\lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R^{-1} \cdot \mathbf{O}_f \cdot \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k\right) - \\ - \left(\frac{1}{2\lambda_i}\,\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \left(\lambda_j^2 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}\right) \cdot \mathbf{O} = \\ = -\left(\frac{1}{2}\,\lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \left((\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}\right) \cdot \mathbf{O} + \\ + \left(\frac{1}{2}\,\lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot \left((\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R^{-1}\right) \cdot \mathbf{O}_f.\end{aligned}$$

Используя связи (2.2), (2.10), (2.11), получим окончательное искомое выражение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = (\lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot (\mathbf{O}_f^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}_R \cdot \mathbf{O}_f - \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}) = (\lambda_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot (\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}) = \\ = (\lambda_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot (\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}_R \cdot \mathbf{O}_\alpha - \mathbf{D}_A) = (\lambda_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{D}_R - (\lambda_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i)_{\langle i \rangle} \cdot\cdot \mathbf{D}_A.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь

$$\mathbf{D}_R = \frac{1}{2}\left((\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_R^{-1}\right); \qquad \mathbf{D}_A = \frac{1}{2}\left((\mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_A^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_A}{\partial t} \cdot \mathbf{Q}_A^{-1}\right).$$

Нетрудно проверить, что тензоры $\mathbf{D}_R$ и $\mathbf{D}_A$ являются индифферентными к движениям среды как абсолютно твердого тела.

3. Основные термодинамические соотношения. Уравнения, описывающие происходящие в материале процессы, должны удовлетворять первому и второму законам термодинамики. При этом их формулировка должна быть инвариантной по отношению к записи в любой инерциальной системе отсчета. Это условие приводит к важным выводам [20, 21]. Требование инвариантности к выбору инерциальной системы отсчета выполняется только при удовлетворении уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{I_3^*}\rho) = 0; \tag{3.1}$$

закона движения среды

$$\rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - (\mathbf{Q}_R^{\text{т}})^{-1}\cdot\cdot\overset{*}{\nabla}\,\mathbf{T} = 0; \tag{3.2}$$

закона сохранения энергии

$$\rho\,\frac{\partial e}{\partial t} - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D + (\mathbf{Q}_R^{\text{т}})^{-1}\cdot\cdot\overset{*}{\nabla}\mathbf{q} = 0 \tag{3.3}$$

и термодинамического неравенства

$$\rho\,\frac{\partial f}{\partial t} + \rho s\,\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D + \frac{1}{\theta}\,\overset{*}{\nabla}\,\theta\cdot\mathbf{Q}_R^{-1}\cdot\mathbf{q} \leqslant 0, \tag{3.4}$$

где ρ — масса материала в малом элементе среды, отнесенная к объему этого элемента в момент t; θ — температура; e, f и s — массовые плотности внутренней, свободной энергии и энтропии континуума; $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений, действующих в материале (тензор напряжений Коши); $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока;

$$\mathbf{W}_D = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathbf{Q}_R}{\partial t}\cdot\mathbf{Q}_R^{-1} - (\mathbf{Q}_R^{\text{т}})^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}_R^{\text{т}}}{\partial t}\Big).$$

Законы (3.1)–(3.4) сформулированы в координатах $\mathbf{r}_*$ (в отсчетной конфигурации, в лагранжевых координатах). Свободная энергия связана с внутренней энергией и энтропией равенством

$$f = e - \theta s. \tag{3.5}$$

В данной работе рассматриваются материалы, плотность свободной энергии которых f является функцией температуры среды θ, характеристик ее обратимых деформаций λ_i и параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3, фиксирующих особенности протекания релаксационных процессов. Полагаем, что

$$f = f_e(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + 0{,}5c(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2), \quad c = c(\theta) \geqslant 0.$$

Здесь $c = c(\theta)$ — неотрицательная функция температуры θ; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — безразмерные величины.

В нашем случае поведение среды определяют: 1) координаты точек деформируемого компонента в текущий момент времени x^1, x^2, x^3; 2) координаты точек деформируемого компонента, относительно которых осуществляется отсчет упругих деформаций x_α^1, x_a^2, x_a^3 (они изменяются по мере развития пластического течения); 3) релаксационные характеристики ξ_1, ξ_2, ξ_3 текущего состояния; 4) температура. Первые шесть величин и температура имеют ясный физический смысл. Параметры ξ_1, ξ_2, ξ_3 введены так, чтобы максимально просто (с математической точки зрения) и физически правдоподобно построить модель.

4. Уравнения, описывающие проходящие в материале процессы. Рассмотрим термодинамическое неравенство (3.4). Производная от свободной энергии по времени выражается формулой

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + c\xi_i\frac{\partial \xi_i}{\partial t}.$$

Используя обозначения

$$\sigma_e^i = \rho\lambda_i \frac{\partial f_e}{\partial \lambda_i}; \tag{4.1}$$

$$\sigma_d^i = \frac{\rho c \xi_i}{\eta}, \quad \eta > 0 \tag{4.2}$$

и уравнение (2.12), перепишем термодинамическое неравенство (3.4) в виде

$$\rho\Big(\frac{\partial f}{\partial \theta} + s\Big)\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sigma_e^i \mathbf{h}_i\mathbf{h}_i \cdot\cdot (\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}) + \eta\sigma_d^i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} -$$
$$- \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D + \frac{1}{\theta}\overset{*}{\nabla}\theta \cdot \mathbf{Q}_R^{-1}\cdot \mathbf{q} \leqslant 0. \tag{4.3}$$

Любую ортонормированную тройку векторов $\mathbf{j}_i$ можно с помощью тензора поворота $\mathbf{O}_t$ выразить через базисные векторы $\mathbf{e}_i$ прямоугольной декартовой системы координат: $\mathbf{j}_i = \mathbf{O}_t \cdot \mathbf{e}_i$, причем производная по времени от тензора поворота $\mathbf{O}_t$ представляет собой свертку этого тензора с кососимметричным $\mathbf{W}_t$:

$$\frac{\partial \mathbf{O}_t}{\partial t} = \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{O}_t.$$

Это означает справедливость тождества

$$(\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i)_{\langle i\rangle}\cdot\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k)_{\langle k\rangle} = (\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i)_{\langle i\rangle}\cdot\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{O}_t\cdot\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{O}_t^{\mathrm{T}})_{\langle k\rangle} =$$
$$= (\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i)_{\langle i\rangle}\cdot\cdot(\mathbf{W}_t\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k + \mathbf{j}_k\mathbf{j}_k\cdot\mathbf{W}_t^{\mathrm{T}})_{\langle k\rangle} = 0$$

и выполнение связи

$$\sigma_d^i\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i\cdot\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\xi_k\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k) = \sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i\cdot\cdot\frac{D}{Dt}(\xi_k\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k), \tag{4.4}$$

где $D/Dt\ldots$ — объективная производная тензора второго ранга, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{A}\cdot\cdot\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \mathbf{A}\cdot\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{E}\cdot\cdot\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{A}) \tag{4.5}$$

для любого симметричного тензора $\mathbf{A}$. С помощью (4.4) преобразуем выражение (4.3):

$$\rho\Big(\frac{\partial f}{\partial \theta} + s\Big)\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\sigma_e^i\mathbf{h}_i\mathbf{h}_i + \sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i)\cdot\cdot(\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha\cdot\mathbf{D}_A\cdot\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}) +$$
$$+ \sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i\cdot\cdot\Big(\eta\frac{D}{Dt}(\xi_k\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k) - (\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha\cdot\mathbf{D}_A\cdot\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}})\Big) -$$
$$- \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D + \frac{1}{\theta}\overset{*}{\nabla}\theta\cdot\mathbf{Q}_R^{-1}\cdot\mathbf{q} \leqslant 0. \tag{4.6}$$

Таким образом, требование непротиворечивости математической модели первому и второму законам термодинамики свелось к удовлетворению неравенства (4.6). Существует множество способов построения определяющих уравнений поведения материала, удовлетворяющих этому неравенству. Рассмотрим одну из возможных физически разумных систем уравнений.

Пусть поведение континуума определяется уравнениями

$$s = -\frac{\partial f}{\partial \theta}; \tag{4.7}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_d; \tag{4.8}$$

$$\mathbf{T}_e = \sigma_e^i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i; \tag{4.9}$$

$$\mathbf{T}_d = \sigma_d^i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i; \tag{4.10}$$

$$\mathbf{q} = -\eta_q (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \overset{*}{\nabla} \theta; \tag{4.11}$$

$$\eta \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\eta_\xi \mathbf{U} + \Big(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big), \quad \mathbf{U} = \xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i; \tag{4.12}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}; \tag{4.13}$$

$$\mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}} = \nu \eta_A \Big(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big), \tag{4.14}$$

$$\eta_A \geqslant 0, \quad \eta_\xi \geqslant 0, \quad \eta_q \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1.$$

Равенство (4.7) фиксирует известное в термодинамике утверждение. Массовая плотность энтропии среды s равна производной от массовой плотности равновесной свободной энергии f_e по температуре θ, взятой с противоположным знаком.

Выражения (4.8)–(4.10) вместе с зависимостями (4.1), (4.2) известны в механике. Напряжения, действующие в континууме, представляют собой сумму равновесных $\mathbf{T}_e$ и диссипативных $\mathbf{T}_d$ составляющих, причем главные значения равновесных компонент напряжений σ_e^i однозначно определяются производной от массовой равновесной плотности свободной энергии среды f_e по упругим удлинениям λ_i, а релаксационными характеристиками состояния материала ξ_i могут служить параметры, пропорциональные главным значениям σ_d^i диссипативных напряжений $\mathbf{T}_d$. При этом пространственная ориентация равновесных напряжений $\mathbf{T}_e$ определяется собственными векторами $\mathbf{h}_i$ меры деформации Фингера $\mathbf{F}$. Пространственная ориентация диссипативных напряжений $\mathbf{T}_d$ определяется собственными векторами $\mathbf{j}_i$ тензора релаксации $\mathbf{U}$, в котором параметры ξ_i выступают в качестве собственных значений.

Равенство (4.11), переписанное с учетом связи между операторами градиента места в актуальной $\mathbf{r}$ и рассматриваемой $\mathbf{r}_*$ конфигурациях, имеет вид $\mathbf{q} = -\eta_q \nabla\theta$ и представляет собой закон теплопроводности Фурье.

Соотношение (4.12) описывает процессы релаксации, ползучести и вязкоупругие свойства материала. Важно подчеркнуть при этом, что параметр η_ξ представляет собой неотрицательную функцию параметров состояния среды и их производных по времени. Поэтому закон релаксации (4.12) в общем случае существенно нелинеен.

Отметим еще одно важное свойство. Закон (4.12) гарантирует равенство нулю средних диссипативных напряжений:

$$\frac{1}{3}\mathbf{T}_d\cdot\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{3}(\sigma_d^1 + \sigma_d^2 + \sigma_d^3) = 0. \tag{4.15}$$

Покажем это. Двойная свертка соотношения (4.10) с единичным тензором $\mathbf{E}$

$$\mathbf{T}_d \cdot\cdot \mathbf{E} = \frac{\rho c \xi_i}{\eta} \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E}$$

приводит к выводу, что равенство нулю выражения $\xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E}$ будет достаточным для достижения требуемого результата. Чтобы выяснить, какие значения принимает выражение $\xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E}$, осуществим двойную свертку закона поведения материала (4.12) с единичным тензором. Рассматриваемый закон (с учетом (4.5)) принимает вид связи

$$\eta \frac{\partial}{\partial t} (\xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E}) = -\eta_\xi (\xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E}).$$

Полученное уравнение имеет тривиальное решение, удовлетворяющее нулевым начальным данным (характеризующим ненагруженное начальное состояние среды)

$$\xi_i \mathbf{j}_i \mathbf{j}_i \cdot\cdot \mathbf{E} = 0. \tag{4.16}$$

Следовательно, справедливо условие (4.15).

Соотношение (4.14) представляет собой закон развития пластических деформаций и может быть переписано в виде

$$\mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}} = \frac{3 d_{\mathrm{int}}}{2 \sigma_{\mathrm{int}}} \left(\mathbf{T} - \frac{1}{3} (\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right), \tag{4.17}$$

где

$$\sigma_{\mathrm{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

(σ_i — собственные значения тензора $\mathbf{T}$);

$$d_{\mathrm{int}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_1 - d_3)^2}$$

(d_i — собственные значения тензора $\mathbf{D}_A$).

Следует подчеркнуть, что закон (4.14) можно использовать в том случае, когда известно поле значений параметра ν в точках пространства. По своему физическому смыслу величина ν характеризует степень развития пластического течения. Она показывает, насколько условия совместности пластических деформаций позволяют развиться пластическому течению. Другими словами, какую часть от максимально возможных при данной нагрузке (наблюдаемой в аналогичных условиях на однородных образцах) составляют действительно развиваемые в этой точке среды скорости пластического деформирования материала.

Параметр ν можно вычислить из равенства $\nu = (3/2)(1/\eta_A)(d_{\mathrm{int}}/\sigma_{\mathrm{int}})$. Однако для этого необходимо найти поле распределения интенсивности скоростей пластического течения d_{int} и поле интенсивности напряжений σ_{int}, используя для решения задачи равенство (4.17). Но равенство (4.17) позволяет определить поле интенсивности скоростей пластического течения d_{int} только с точностью до постоянного сомножителя. Его следует однозначно доопределить, исходя из требования равенства единице максимального значения параметра ν.

Теперь необходимо убедиться в справедливости неравенства (4.6). Отметим, что симметричность полного тензора напряжений $\mathbf{T}$ и кососимметричность тензора $\mathbf{W}_D$ обращают в нуль результат их двойной свертки

$$\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D = 0. \tag{4.18}$$

Используя выражения (4.1), (4.2), (4.7)–(4.14), (4.16), (4.18), преобразуем неравенство (4.6):

$$\mathbf{T}\cdot\cdot(\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha\cdot\mathbf{D}_A\cdot\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}) - \sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i\cdot\cdot\Big(\eta_\xi\xi_i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i + \frac{1}{3}(\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big) -$$

$$-\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \frac{1}{\theta}\eta_q\overset{*}{\nabla}\theta\cdot\mathbf{Q}_R^{-1}\cdot(\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\overset{*}{\nabla}\theta =$$

$$= -\mathbf{T}\cdot\cdot\nu\eta_A\Big(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big) - \frac{\eta_\xi c\rho}{\eta}\xi_i\xi_i - \frac{1}{\theta}\eta_q\overset{*}{\nabla}\theta\cdot\mathbf{Q}_R^{-1}\cdot(\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\overset{*}{\nabla}\theta \leqslant 0.$$

Запишем данное неравенство в окончательном виде

$$\nu\eta_A\Big(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})^2\Big) + \frac{\eta_\xi c\rho}{\eta}\xi_i\xi_i + \frac{1}{\theta}\eta_q\overset{*}{\nabla}\theta\cdot\mathbf{Q}_R^{-1}\cdot(\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\overset{*}{\nabla}\theta \geqslant 0.$$

Очевидно, что второе и третье слагаемые в полученном выражении не могут принимать отрицательных значений. То же самое относится и к первому слагаемому. Доказывается это с помощью преобразования

$$\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})^2 = \sigma_i\sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\big((\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2\big) \geqslant 0. \tag{4.19}$$

Для моделирования проходящих в среде процессов необходимо сформулировать уравнение теплопроводности. Для его получения надо подставить в закон сохранения энергии (3.3) с помощью связи (3.5) выражение массовой плотности e через характеристики f, θ, s:

$$\rho\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + s\,\frac{\partial\theta}{\partial t} + \theta\,\frac{\partial s}{\partial t}\Big) - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{W}_D + (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\cdot\overset{*}{\nabla}\mathbf{q} = 0. \tag{4.20}$$

В равенстве (4.20) следует раскрыть значение производной по времени от величины f. Это осуществляется с помощью приведенных ниже формул. Первая из них получается на основе зависимостей (2.12), (4.1), (4.9), (4.14):

$$\rho\,\frac{\partial f}{\partial\lambda_j}\,\frac{\partial\lambda_j}{\partial t} = (\sigma_e^i\mathbf{h}_i\mathbf{h}_i)\cdot\cdot(\mathbf{D}_R - \mathbf{O}_\alpha\cdot\mathbf{D}_A\cdot\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}}) = \mathbf{T}_e\cdot\cdot\mathbf{D}_R - \mathbf{T}_e\cdot\cdot\nu\eta_A\Big(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big).$$

Вторая формула выводится с помощью равенств (4.2), (4.4), (4.10), (4.12)–(4.15):

$$\rho\,\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\xi_k}{\partial t} = (\sigma_d^i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i)\cdot\cdot\eta\,\frac{\partial}{\partial t}(\xi_k\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k) =$$

$$= -\mathbf{T}_d\cdot\cdot\Big(\eta_\xi(\xi_i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i) - \mathbf{D}_R + \mathbf{O}_\alpha\cdot\mathbf{D}_A\cdot\mathbf{O}_\alpha^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}(\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big) =$$

$$= -\mathbf{T}_d\cdot\cdot\Big(\eta_\xi(\xi_i\mathbf{j}_i\mathbf{j}_i) - \mathbf{D}_R + \nu\eta_A\Big(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big)\Big).$$

В итоге рассматриваемое выражение (4.20) при подстановке выписанных формул и зависимостей (4.7), (4.18) принимает вид

$$\rho\theta\,\frac{\partial s}{\partial t} - \mathbf{T}\cdot\cdot\nu\eta_A\Big(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big) - \mathbf{T}_d\cdot\cdot\eta_\xi\xi_k\mathbf{j}_k\mathbf{j}_k + (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\cdot\overset{*}{\nabla}\mathbf{q} = 0.$$

С учетом равенств (4.2), (4.10), (4.19) оно окончательно формулируется законом

$$\rho\theta\,\frac{\partial s}{\partial t} = \pi_\xi + \pi_A - (\mathbf{Q}_R^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\cdot\,\overset{*}{\nabla}\,\mathbf{q},\quad \pi_\xi = \frac{\eta_\xi c\rho}{\eta}\,\xi_i\xi_i,$$
$$\pi_A = \frac{1}{3}\,\nu\eta_A\left((\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2\right), \tag{4.21}$$

где π_ξ — тепло, выделяемое вследствие диссипативных потерь при протекании релаксационных процессов, а π_A — вследствие пластического деформирования материала. Эта связь и представляет собой уравнение теплопроводности. Изменение энтропии системы происходит в результате теплообмена среды с соседними областями, выделения тепла при совершении релаксационных переходов из одного состояния среды в другое и при развитии пластических деформаций.

5. Выводы. Процессы в материале в рамках предложенной модели описываются уравнениями: неразрывности (3.1), движения (3.2), релаксации механических свойств среды (4.12), развития пластических деформаций (4.14), теплопроводности (4.21).

Свойства материала задаются скалярными функциями f, η_A, η_ξ, η_q, η. Их необходимо определять экспериментально. При этом величины η_A, η_ξ, η_q, η могут быть функциями параметров состояния материала θ, λ_1, λ_2, λ_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 и их производных по времени. Важно только, чтобы удовлетворялись неравенства $\eta_A \geqslant 0$, $\eta_\xi \geqslant 0$, $\eta_q \geqslant 0$, $\eta > 0$. Параметр ν должен удовлетворять ограничению $0 \leqslant \nu \leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blats P. J., Tschoegl N. W., Sharda S. C.** Strain energy function for rubber-like materials based on generalized measure of strain // Trans. Soc. Rheology. 1974. V. 18, N 1. P. 145–161.
2. **Ogden R. W.** Large deformation of isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solid // Proc. Roy. Soc. London. 1972. Ser. A. V. 326. P. 565–584.
3. **Valanis K. C., Landel R. F.** The strain-energy function of a hyperelastic materials in terms of extension ratios // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 2997–3002.
4. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
5. **Кондауров В. И.** Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ. 1985. Т. 49, № 5. С. 791–800.
6. **Пальмов В. А.** Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики. 1980. Т. 3, № 3. С. 75–115.
7. **Bernstein B., Shokooh A.** The stress clock function in viscoelasticity // J. Reol. 1980. V. 24, N 2. P. 189–211.
8. **Drozdov A.** On constitutive laws for ageing viscoelastic materials at finite strains // Eur. J. Mech. 1993. Ser. A. Solids. V. 12, N 3. P. 305–324.
9. **Wagner M. H., Demarmels A.** A constitutive analysis of extensional flow of polyisobutylene // J. Reol. 1990. V. 34, N 6. P. 943–958.
10. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. С. 39–84.

11. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987.
12. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
14. **Green A. E., Naghdi P. M.** A general theory at an elastic-plastic continuum // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1965. V. 18, N 4. P. 251–281.
15. **Green A. E., Naghdi P. M.** Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain // Int. J. Eng. Sci. 1971. V. 9, N 12. P. 1219–1229.
16. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
17. **Nemat-Nasser S.** Decomposition of strain measures and their rates in finite decomposition elasto-plasticity // Int. J. Solids and Struct. 1979. V. 15, N 2. P. 155–166.
18. **Lubarda V. A., Shih C. F.** Plastic spin and related issues in phenological plasticity // J. Appl. Mech. 1994. V. 61, N 3. P. 524–529.
19. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
20. **Green A. E., Naghdi P. M.** A dinamical theory of interactiong continua // Int. J. Eng. Sci. 1965. V. 3, N 2. P. 231–241.
21. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 11/X 1994 г.,
в окончательном варианте — 7/VI 1995 г.