ПМТФ, № 2, 1974

УДК 539.3

ГИПОУПРУГАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. И. Роменский

(Новосибирск)

Показано, что замкнутая система уравнений нелинейной теории упругости для изотропной среды допускает однозначное написание в гипоупругой форме (тензор скоростей изменения напряжений — линейная функция тензора скоростей деформации с коэффициентами, зависящими от инвариантов тензора напряжений). Для этого необходимо выполнение гипотезы об определении деформаций по известным напряжениям. Любой произвол в выборе коэффициентов гипоупругих соотношений может привести к нарушению термодинамического тождества.

Для описания процессов деформирования среды применяются обычно такие тензорные характеристики, как тензор деформаций, тензор напряжений, тензор скоростей деформаций, тензор скоростей изменения напряжений. При построении определяющей системы уравнений движения среды для ее замыкания между какими-либо указанными тензорными величинами задается связь. Перечислим наиболее часто употребляемые виды такой связи [1].

Гиперупругая среда. Предполагается существование зависящего от тензора деформаций упругого потенциала (внутренней энергии при адиабатических процессах), при помощи которого определяется тензор напряжений.

Упругая среда. Тензор напряжений задается как некоторая функция тензора деформаций.

Гипоупругая среда. Тензор скоростей изменения напряжений задается как линейная функция тензора скоростей деформаций, коэффициенты которой зависят от тензора напряжений.

Можно показать, что при такой классификации упругая среда является в то же время и гипоупругой, а гиперупругая среда является как упругой, так и гипоупругой. Более того, если исходить из термодинамического тождества, которое должно иметь место для гиперупругой среды (подобно тому, как для газовых сред имеет место термодинамическое тождество $dE = -pdv + TdS$), то такая гиперупругая среда однозначно определяет упругие и гипоупругие соотношения.

Рассмотрим адиабатическую деформацию гиперупругой изотропной среды, предполагая, что внутренняя энергия зависит от трех независимых инвариантов тензора деформаций Коши g_{ij} и от энтропии S. В качестве независимых инвариантов выберем

$$K_1 = g_{11} + g_{22} + g_{33}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11} \end{vmatrix}$$

$$K_3 = \det \| g_{ij} \|$$

Если обозначить $h_i = -{}^1/_2 \ln g_i$, где g_i — главные значения тензора g_{ij}, то термодинамическое тождество имеет вид

$$\rho dE\,(h_1, h_2, h_3, S) = \sigma_1 dh_1 + \sigma_2 dh_2 + \sigma_3 dh_3 + \rho T dS \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность среды, σ_i — главные значения тензора напряжений, T — температура (см., например, [2]). Тензор $\| h_{ij} \| = -{}^1/_2 \ln \| g_{ij} \|$ называется тензором деформаций Генки. Переходя к тензору g_{ij} в системе координат, не связанной с главными осями тензора деформаций, получаем выражение для тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = -2\rho \frac{\partial E}{\partial g_{i\alpha}} g_{\alpha j}$$

Эти формулы Мурнагана задают зависимость тензора напряжений от тензора деформаций, т. е. они являются упругими соотношениями для рассматриваемой гиперупругой среды. Плотность вычисляется по формуле $\rho = \rho_0 K_3^{1/2}$, где ρ_0 — плотность недеформированной среды. В дальнейшем будем использовать матричные выкладки, поэтому, обозначая

$$\Sigma = \| \sigma_{ij} \|, \quad G = \| g_{ij} \|, \quad \frac{\partial E}{\partial G} = \left\| \frac{\partial E}{\partial g_{ij}} \right\|$$

получим матричную запись формул Мурнагана

$$\sum = -2\rho \frac{\partial E}{\partial G} G \tag{2}$$

Использование термодинамического тождества (1), следствием которого являются формулы Мурнагана (2), позволяют сформулировать замкнутую систему дифференциальных уравнений нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах [2]

$$\rho\, dE/dt - \sigma_{ij} \partial u_i / \partial x_j = 0 \tag{3}$$

$$\rho du_i/dt - \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0 \tag{4}$$

$$dg_{ij}/dt + g_{i\alpha} \partial u_\alpha / \partial x_j + g_{j\alpha} \partial u_\alpha / \partial x_i = \varphi_{ij} \tag{5}$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha (\partial/\partial x_\alpha)$ — производная вдоль траектории движения. Уравнение (3) — закон сохранения энергии, уравнение (4) — уравнение импульса, уравнение (5) описывает изменение во времени тензора деформаций. Тензор φ_{ij} представляет собой тензор скоростей пластических деформаций. При замыкании модели его можно задать с помощью максвелловской вязкости, обеспечивающей релаксацию касательных напряжений. Если деформация среды происходит только в упругой области, следует считать $\varphi_{ij} = 0$, поэтому дальнейшие результаты справедливы, в частности, для модели упругой среды без каких-либо дополнительных предположений.

Конкретный вид φ_{ij} здесь не рассматривается, он обсуждался в [2]. Заметим только, что φ_{ij} являются «младшими» членами дифференциальных уравнений, т. е. не содержат производных.

Следует отметить одно обстоятельство: в терминах системы уравнений (3) — (5) термодинамическое тождество (1) влечет выполнение закона возрастания энтропии [2]

$$dS/dt = \varkappa \geqslant 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) может быть получено как линейная комбинация уравнений (3) — (5). Правая часть $\varkappa$ — соответствующая комбинация правых частей φ_{ij} (если $\varphi_{ij} = 0$, то $\varkappa = 0$).

Рассматриваемую систему уравнений нелинейной теории упругости (3) — (5) можно записать в гипоупругой форме, для этого нужно от уравнений (5), описывающих изменение во времени тензора деформаций, перейти к уравнениям, описывающим изменение во времени тензора напряжений. Наиболее общая форма, на основании которой строятся различные модели, гипоупругих соотношений приведена в обзоре [3]

(7)
$$
\begin{aligned}
&d\Sigma/dt + \Sigma U + U^*\Sigma = \alpha_0 I \operatorname{tr} W + \alpha_1 W + \alpha_2 \Sigma \operatorname{tr} W + \\
&+\alpha_3 I \operatorname{tr}(\Sigma W) + {}^1/_2\alpha_4(\Sigma W + W\Sigma) + \alpha_5\Sigma^2 \operatorname{tr} W + \alpha_6\Sigma \operatorname{tr}(\Sigma W) + \\
&+\alpha_7 I \operatorname{tr}(\Sigma^2 W) + {}^1/_2\,\alpha_8(\Sigma^2 W + W\Sigma^2) + \alpha_9\Sigma^2 \operatorname{tr}(\Sigma W) + \\
&+\alpha_{10}\Sigma \operatorname{tr}(\Sigma^2 W) + \alpha_{11}\Sigma^2 \operatorname{tr}(\Sigma^2 W) \\
&U = \| u_{ij} \| = \| \partial u_i/\partial x_j \|, \quad W = {}^1/_2\,(U + U^*)
\end{aligned}
$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{11}$ — какие-либо непрерывные скалярные функции от трех главных инвариантов матрицы Σ : $\operatorname{tr}\Sigma$, $\operatorname{tr}\Sigma^2$, $\operatorname{tr}\Sigma^3$. Выбор произвольных коэффициентов α_i определяет модель гипоупругой среды. Термодинамика рассматриваемых моделей остается неясной.

Покажем, что из уравнений (5), (6) с использованием формул Мурнагана (2) вытекают (если не учитывать пластические члены φ_{ij}) гипоупругие соотношения, но коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{11}$ будут вычисляться по определенным формулам, обусловленным термодинамикой уравнений.

Уравнение (5) в матричной форме перепишется в виде

(8)
$$dG/dt = -GU - U^*G + \Phi, \quad \Phi = \| \varphi_{ij} \|$$

Используя выражения инвариантов K_1, K_2, K_3 через g_{ij} можно показать, что

(9)
$$\partial K_1/\partial G = I, \quad \partial K_2/\partial G = K_1 I - G, \quad \partial K_3/\partial G = G^2 - K_1 G + K_2 I$$

Далее, из теоремы Гамильтона — Кели для матрицы G следует, что любая целая степень матрицы G представляется в виде полинома второй степени от матрицы G с коэффициентами, зависящими от инвариантов K_1, K_2, K_3.

Используя (2) и (9), приводим формулы Мурнагана к виду

(10)
$$\Sigma = l_0 I + l_1 G + l_2 G^2$$

(11)
$$
\begin{aligned}
&l_0 = -2\rho_0 K_3^{3/2}\frac{\partial E}{\partial K_3}, \quad l_1 = -2\rho_0 K_3^{1/2}\left(\frac{\partial E}{\partial K_1} + K_1\frac{\partial E}{\partial K_2}\right), \\
&l_2 = 2\rho_0 K_3^{1/2}\frac{\partial E}{\partial K_2}
\end{aligned}
$$

Наряду с инвариантами K_1, K_2, K_3 удобно рассматривать инварианты $\operatorname{tr} G$, $\operatorname{tr} G^2$, $\operatorname{tr} G^3$, между которыми имеется связь

$$
\begin{aligned}
&K_1 = \operatorname{tr} G, \quad K_2 = {}^1/_2\,[(\operatorname{tr} G)^2 - \operatorname{tr} G^2], \quad K_3 = {}^1/_6\,[(\operatorname{tr} G)^3 - \\
&- 3\operatorname{tr} G \operatorname{tr} G^2 + 2\operatorname{tr} G^3]
\end{aligned}
$$

Из уравнения (8) последовательно находим

(12)
$$
\begin{aligned}
&d \operatorname{tr} G/dt = -2\operatorname{tr}(GW) + \operatorname{tr}\Phi, \quad d \operatorname{tr} G^2/dt = -4\operatorname{tr}(G^2W) + \\
&+ 2\operatorname{tr}(G\Phi) \\
&d \operatorname{tr} G^3/dt = -6K_3 \operatorname{tr} W + 6K_2 \operatorname{tr}(GW) - \\
&- 6K_1 \operatorname{tr}(G^2W) + 3\operatorname{tr}(G^2\Phi), \quad dK_1/dt = -2\operatorname{tr}(GW) + \operatorname{tr}\Phi \\
&dK_2/dt = -2K_1 \operatorname{tr}(GW) + 2\operatorname{tr}(G^2W) + \operatorname{tr}[(K_1 I - G)\Phi], \\
&dK_3/dt = -2K_3 \operatorname{tr} W + \operatorname{tr}(G^{-1}\Phi)
\end{aligned}
$$

Заметим, что поскольку из уравнения для K_3 следует уравнение неразрывности, то должно выполняться тождество

$$\operatorname{tr}(G^{-1}\Phi) = 0$$

которое обсуждалось в [2] ограничением на способ введения релаксационных членов φ_{ij}.

Можно написать уравнение для изменения во времени матрицы напряжений. Из (10) следует:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = l_1 \frac{dG}{dt} + l_2 \frac{dG}{dt} G + l_2 G \frac{dG}{dt} + \left(\frac{\partial l_0}{\partial K_i} I + \frac{\partial l_1}{\partial K_i} G + \frac{\partial l_2}{\partial K_i} G^2\right) \times \\ \times \frac{dK_i}{dt} + \left(\frac{dl_0}{\partial S} I + \frac{\partial l_1}{\partial S} G + \frac{\partial l_2}{\partial S} G^2\right) \frac{dS}{dt}$$

Используя (6), (8), (12), получаем

(13)
$$\frac{d\Sigma}{dt} = -\Sigma U - U^*\Sigma + 4l_0 W - 2l_2 GWG + Q_0 \operatorname{tr} W + Q_1 \operatorname{tr}(GW) + \\ + Q_2 \operatorname{tr}(G^2 W) + \Psi$$

$$Q_i = q_{ij} G^j \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

(14)
$$q_{00} = -2K_3 \frac{\partial l_0}{\partial K_3}, \quad q_{01} = -2K_3 \frac{\partial l_1}{\partial K_3}, \quad q_{02} = -2K_3 \frac{\partial l_2}{\partial K_3}$$

$$q_{10} = -2\left(\frac{\partial l_0}{\partial K_1} + K_1 \frac{\partial l_0}{\partial K_2}\right), \quad q_{11} = -2\left(\frac{\partial l_1}{\partial K_1} + K_1 \frac{\partial l_1}{\partial K_2}\right),$$

$$q_{12} = -2\left(\frac{\partial l_2}{\partial K_1} + K_1 \frac{\partial l_2}{\partial K_2}\right)$$

$$q_{20} = 2\frac{\partial l_0}{\partial K_2}, \quad q_{21} = 2\frac{\partial l_1}{\partial K_2}, \quad q_{22} = 2\frac{\partial l_2}{\partial K_2}$$

$$\Psi = l_1 \Phi + l_2 (G\Phi + \Phi G) - \frac{1}{2} Q_1 \operatorname{tr}\Phi - \frac{1}{2} Q_2 \operatorname{tr}(G\Phi)$$

Преобразуем правую часть (13) при помощи обобщения формулы Гамильтона — Кэли (см., например, [3])

$$GWG = -G^2 W - WG^2 + K_1 (GW + WG) - K_2 W + \\ + (G^2 - K_1 G + K_2 I) \operatorname{tr} W + (G - K_1 I) \operatorname{tr}(GW) + I \operatorname{tr}(G^2 W)$$

После этого (13) перепишется в виде

$$d\Sigma/dt = -\Sigma U - U^*\Sigma + 2(2l_0 + K_2 l_2) W - 2K_1 l_2 (GW + \\ + WG) + 2l_2 (G^2 W + WG^2) + R_0 \operatorname{tr} W + R_1 \operatorname{tr}(GW) + \\ + R_2 \operatorname{tr}(G^2 W) + \Psi$$

(15)
$$R_i = r_{ij} G^j \ (i, j = 0, 1, 2)$$

$$r_{00} = q_{00} - 2K_2 l_2, \quad r_{01} = q_{01} + 2K_1 l_2, \quad r_{02} = q_{02} - 2l_2$$

$$r_{10} = q_{10} + 2K_1 l_2, \quad r_{11} = q_{11} - 2l_2, \quad r_{12} = q_{12}$$

$$r_{20} = q_{20} - 2l_2, \quad r_{21} = q_{21}, \quad r_{22} = q_{22}$$

Это уравнение можно переписать в виде, аналогичном (7)

(16)
$$d\Sigma/dt + \Sigma U + U^*\Sigma = \beta_0 I \operatorname{tr} W + \beta_1 W + \beta_2 G \operatorname{tr} W + \\ + \beta_3 I \operatorname{tr}(GW) + {}^1/_2 \beta_4 (GW + WG) + \beta_5 G^2 \operatorname{tr} W + \beta_6 G \operatorname{tr}(GW) + \\ + \beta_7 I \operatorname{tr}(G^2 W) + {}^1/_2 \beta_8 (G^2 W + WG^2) + \beta_9 G^2 \operatorname{tr}(GW) + \\ + \beta_{10} G \operatorname{tr}(G^2 W) + \beta_{11} G^2 \operatorname{tr}(G^2 W) + \Psi$$

(17) $\beta_0 = r_{00},\ \beta_1 = 2\,(2l_0 + K_2 l_2),\ \beta_2 = r_{01},\ \beta_3 = r_{10},\ \beta_4 = -4K_1 l_2,$
$\beta_5 = r_{02},\quad \beta_6 = r_{11},\quad \beta_7 = r_{20},\quad \beta_8 = 4l_2,\quad \beta_9 = r_{12},\quad \beta_{10} = r_{21},$
$\beta_{11} = r_{22}$

Таким образом, получено близкое к гиноупругому соотношение, отличающееся от (7) тем, что правая часть (16) зависит от G, а не от Σ. Коэффициенты β_0, β_1, . . ., β_{11} однозначно определяются через инварианты K_1, K_2, K_3 и производные энергии по этим инвариантам.

Матрица Ψ описывает затухание касательных напряжений; в случае упругих деформаций следует положить $\Psi = 0$.

Обычно при построении замкнутой системы уравнений от соотношений (7) переходят к уравнению неразрывности и уравнениям для девиатора тензора напряжений $\Sigma' = \Sigma - {}^1/_3 I \operatorname{tr} \Sigma$, которые можно получить из (7)

(18)
$$\begin{aligned} d\Sigma'/dt + {}^1/_2\Sigma'(U - U^*) - {}^1/_2(U - U^*)\Sigma' &= a_1 (W - {}^1/_3 I \operatorname{tr} W) + \\ + a_2\Sigma' \operatorname{tr} W + a_3 (\Sigma'W + W\Sigma' - {}^2/_3 I \operatorname{tr}(\Sigma'W)) &+ \\ + a_4 (\Sigma'^2 - {}^1/_3 I \operatorname{tr} \Sigma'^2) \operatorname{tr} W + a_5\Sigma' \operatorname{tr}(\Sigma'W) &+ a_6(\Sigma'^2 W + \\ + W\Sigma'^2 - {}^2/_3 I \operatorname{tr}(\Sigma'^2)) + a_7 (\Sigma'^2 - {}^1/_3 I \operatorname{tr} \Sigma'^2) &\operatorname{tr}(\Sigma'W) + \\ + a_8 \Sigma' \operatorname{tr}(\Sigma'^2 W) + a_9 (\Sigma'^2 - {}^1/_3 I \operatorname{tr} \Sigma'^2) &\operatorname{tr}(\Sigma'^2 W) \end{aligned}$$

где коэффициенты a_i определяются через коэффициенты α_i уравнения (7).

Уравнение (16) можно записать в форме (18). Для этого нужна гипотеза о том, что тензор деформаций может быть вычислен по тензору напряжений с помощью уравнения состояния (при фиксированной энтропии). Сформулируем гипотезу так:

1) при фиксированном девиаторе тензора напряжений по известному давлению можно вычислить плотность;

2) при фиксированной плотности через девиатор тензора напряжений можно вычислить девиатор тензора деформаций.

Приведем пример уравнения состояния, которое удовлетворяет этим требованиям. В главных осях тензора h_{ik} имеем

$$\sigma_i = \rho E_{h_i}(h_1, h_2, h_3, S), \quad \rho = \rho_0 \exp[-(h_1 + h_2 + h_3)]$$

Рассмотрим уравнение состояния

$$E = E^{(0)}(\rho, S) + 2f(\rho, S)\,D$$
$$D = {}^1/_2 (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2), \quad d_i = h_i - {}^1/_3 (h_1 + h_2 + h_3)$$

Находим

$$\sigma_i = -p(\rho, D, S) + 2f(\rho, S)\,d_i$$
$$p(\rho, D, S) = -{}^1/_3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \rho^2 E_\rho^{(0)} + 2\rho^2 f_\rho D$$

Отсюда

$$d_i = \frac{1}{2f(\rho, S)}\left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

что иллюстрирует второй пункт гипотезы.

Далее

$$p = \rho^2 E_\rho^{(0)}(\rho, S) + \frac{\rho^2 f_\rho(\rho, S)}{4f^2(\rho, S)} \sum_{i=1}^{3} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2$$

и чтобы первый пункт гипотезы был верен, нужно

$$\partial p/\partial\rho \neq 0$$

Обычно при использовании гипоупругих соотношений в правой части уравнения (18) отбрасывают члены, содержащие Σ' и более высокие степени Σ'. Полная система уравнений при этом имеет вид (см., например, [4])

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij} = 0, \quad \rho\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial x_j} = 0 \tag{19}$$

$$\rho\frac{dE}{dt} + p\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij} - \sigma_{ij}'\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{d\sigma_{ij}'}{dt} + {}^1\!/_2\sigma_{i\alpha}'\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right) - {}^1\!/_2\sigma_{\alpha j}'\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\right)$$

где μ совпадает с a_1 из (18). В модели (19) обычно принимается $\mu = \mu(\rho)$. Отбрасывание членов с Σ' приводит к нарушению термодинамических свойств уравнений. В то время как у системы (3) — (5) без учета вязких членов имеет место закон сохранения энтропии (6), для системы (19), задаваясь уравнением состояния $E = E(\rho, \sigma_{ij}', S)$, имеем $p = \rho^2 E_\rho$

$$E_s\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} - E_\rho\frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial E}{\partial\sigma_{ij}'}\frac{d\sigma_{ij}'}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}'\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ik}'\frac{\partial E}{\partial\sigma_{ij}'}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) -$$

$$- \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial E}{\partial\sigma_{ij}'}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2\mu}{3\rho}\left(\frac{\partial E}{\partial\sigma_{11}'} + \frac{\partial E}{\partial\sigma_{22}'} + \frac{\partial E}{\partial\sigma_{33}'}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

Из-за отбрасывания членов с Σ' правая часть этого равенства не будет равна правой части $\varkappa$ в (16). В частности, при чисто упругих процессах ($\varphi_{ij} = 0$) для решений (19) не выполнен закон сохранения энтропии.

Таким образом, система (3) — (5) может быть приведена к гипоупругой форме, для чего необходимо предположение о возможности вычисления тензора деформаций через тензор напряжений. Коэффициенты, определяющие гипоупругую форму, единственным образом вычисляются через уравнение состояния. Произвол в выборе коэффициентов может привести к нарушению термодинамики. Система (3) — (5) представляется более удобной для исследования, чем ее гипоупругая форма, так как выразить деформации через напряжения можно только для простейших уравнений состояния.

Автор благодарен В. Ф. Куропатенко, В. А. Свидинскому и С. К. Годунову за внимание к работе и критические замечания.

Поступила 24 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. ПМТФ, 1972, № 6, стр. 124—144.
3. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
4. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». М., «Мир», 1967.