

О ВЛИЯНИИ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ НА ОТРАЖЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. М. Арутюнян, В. А. Белокопъ, Л. В. Карчевский

(Москва)

Исследовано влияние показателя адиабаты на некоторые особенности отражения ударных волн. Рассмотрено, в частности, влияние показателя адиабаты на характер зависимости критического угла от интенсивности падающей волны. Показано, что с увеличением интенсивности волны это влияние возрастает.

Аналитически исследованы предельные случаи слабых ударных волн при произвольных значениях показателя адиабаты и сильных волн при значении показателя адиабаты, равном единице.

Приводятся результаты расчета критического угла при различных значениях показателя адиабаты для всего возможного диапазона изменения интенсивности падающей волны.

1. Отражение ударной волны от другой ударной волны или от контактного разрыва (в том числе от стенки) зависит от показателя адиабаты, особенно в случае достаточно сильной волны.

Для теоретического рассмотрения некоторых сторон этого вопроса далее принято упрощающее предположение об идеальности среды, уравнение состояния которой можно записать совместно с уравнением адиабаты Ренкина — Гюгонио в виде

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{pV}{E} = 1 + \frac{2}{f} = \frac{(p_1 - p_0)(V_0 + V_1)}{(p_1 + p_0)(V_0 - V_1)} \quad (1.1)$$

Здесь обозначения либо очевидны, либо пояснены ниже, индекс 0 относится к состоянию среды до скачка, а 1 — к состоянию за скачком, причем предполагается, что $\gamma_1 = \gamma_0$ или $f_1 = f_0$.

Структура скачка здесь игнорируется и толщина его предполагается нулевой, т. е. не принимаются во внимание эффекты вязкости, теплопроводности и т. п. диссипация. В такой постановке предположение об отсутствии теплообмена со стенкой является излишним.

Несмотря на такую идеализацию среды, можно надеяться, что результаты данной работы имеют силу не только в средах с различными $\gamma = \text{const}$, но и при переменном показателе адиабаты. Например, это ожидается в тех условиях, когда приемлема приближенная замена переменной γ на некоторое усредненное значение. С другой стороны, поскольку уплотнение среды сильным скачком зависит только от теплоемкости среды за скачком, то задача при этом практически сведется к случаю $\gamma = \text{const}$.

2. Простейшей интерпретацией различных значений показателя адиабаты γ является предположение, что $2 / (\gamma - 1) = f$ есть число степеней свободы молекул среды в так называемом равномерном приближении [1], согласно которому часть возможных степеней свободы полностью возбуждена, а остальные степени полностью выключены, заморожены. В этом приближении f может принимать, вообще говоря, любые значения среди членов натурального ряда. Однако к свойствам реального

газа ближе предположение о непрерывном множестве возможных значений f или γ при формальном сохранении предположения о «равнораспределении».

Иными словами, примем, что $1 \leq f < \infty$.

Для газодинамики традиционными являются случаи $f = 3$ (возбужден полный набор трансляционных степеней свободы) и $f = 5$ (плюс две вращательные).

С увеличением температур и с уменьшением плотностей становится существенным возбуждение колебательных степеней свободы, т. е. $f \rightarrow 7$ в случае двухатомных молекул (поскольку энергия колебаний складывается из кинетической и потенциальной). Пропущенное значение $f = 6$ соответствует почти любому веществу с излучением при достаточно высокой температуре и, более строго, ультрарелятивистскому газу.

В воздухе и других средах диссоциация и ионизация приводят к тому, что в некоторых диапазонах скоростей скачка достигаются максимумы значений f , т. е. минимумы γ . Например, скорость ударной волны $D = 16$ км/сек в атмосфере с плотностью, равной 10^{-6} от нормальной плотности воздуха, и температурой 210° К (это высота ≈ 97 км) соответствует значению $f = 21.3$ или $\gamma = 1.09$. Поэтому понятен интерес к асимптотическому «ньютоновскому» значению $\gamma = 1$ при $f \rightarrow \infty$.

Вопреки утверждению Зоммерфельда [2] могут быть физически обоснованы и значения $f = 2$, $f = 1$. Случай $f = 2$ или $\gamma = 2$ можно, скажем, интерпретировать как полное подавление одной трансляционной степени свободы каждой заряженной частицы в ионизированном газе, текущем поперек направления вращенного магнитного поля, в то время как другой вырожденный случай $f = 1$ или $\gamma = 3$ соответствует выключению двух трансляционных степеней свободы молекул газа при течении ее вдоль линий магнитного поля.

Подчеркнем, что эта интерпретация значений $f = 1$ ($\gamma = 3$) и $f = \gamma = 2$ имеет ясный смысл лишь для течений с одномерной геометрией (плоские, цилиндрические и сферические ударные волны).

Кроме ионизированного газа в магнитном поле желательно исследование применимости значения $f = 1$ при рассмотрении неоднородного отражения ударной волны в «газе Ландау — Станюковича» [3] (в продуктах разлета химических ВВ, одномерное движение которых удовлетворительно идеализируется предположением о $\gamma = 3$).

3. Прежде чем перейти к рассмотрению влияния показателя адиабаты на «косое» отражение ударных волн, отметим свойства «нормального» отражения по закону ¹

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{f+3-(p_0/p_1)}{1+(f+1)p_0/p_1} = \begin{cases} 1+p_0^{-1}\Delta p & (\Delta p \ll p_0) \\ f+3 & (\Delta p \gg p_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

явно показывающему, как влияет на отражение сильных скачков эффективное число степеней свободы, не сказывающееся на отражении достаточно слабых скачков. В то время как на отражение слабых скачков индивидуальные свойства газа (в данном приближении) не сказываются, регистрация отражения сильного скачка позволяет определить уравнение состояния среды без труда. В тривиальном случае идеального газа достаточно регистрировать скорости падающего D_0 и отраженного $\bar{D}_1$ скачков (в системе координат невозмущенной среды). Число Маха отраженной волны при сильной падающей составляет $\sqrt{f+2}$, откуда

$$f = \frac{2D_0}{\bar{D}_1} - 1$$

или

$$1 \leq \frac{D_0}{\bar{D}_1} = \frac{f+1}{2} < \infty \quad \text{при } 1 \leq f < \infty \quad (3.2)$$

Менее чувствителен к показателю адиабаты, т. е. к f , закон возрастания температуры за отраженным скачком

$$2 \leq \frac{T_2}{T_1} = 2 \left(1 + \frac{1}{f+2} \right) \leq \frac{8}{3} \quad (3.3)$$

¹ Установлен впервые Гюгонио в 1885 г.

Регистрация скоростей падающего и отраженного скачков дает минимум информации, необходимой для составления уравнения состояния среды. Наиболее полную информацию о тепловом состоянии движущейся среды дало бы применение методов квантовой оптики для непосредственного определения функции распределения молекул газа по скоростям в исследуемом поле гидродинамических скоростей.

4. До недавнего времени систематически исследовалась теоретическая и экспериментальная зависимость критического угла падения ударной волны (выше α_* регулярное отражение невозможно) от интенсивности волны лишь при $\gamma = 1,4$, хотя в последних работах [4,5] приводятся некоторые сведения о зависимости $\alpha_*(\gamma)$ для сильных ударных волн и общие соображения¹ о влиянии показателя адиабаты на картину маховского отражения. В частности, в сообщении [6] предлагалось использовать экспериментальные значения α_* для определения уравнения состояния среды (при $f = \text{const}$ это тривиально). Одна из тонкостей здесь заключается в том, что, хотя при $\alpha > \alpha_*$ невозможно осуществление регулярного отражения, при $\alpha < \alpha_*$ маховское отражение в некотором диапазоне [7] все-таки возможно.

Недостаточная исследованность маховского отражения, отсутствие даже поверхностного анализа многих эффектов, предсказываемых известными формулами, может отчасти объясняться сравнительной новизной вопроса, так как маховское отражение фактически было понято только после работ [8,9]. Кстати, в классических монографиях [7,10] приводятся ошибочные формулы зависимости критического угла от интенсивности волны².

Ниже проводится анализ зависимости $\alpha_*(p_0/p_1, \gamma)$ для значений γ в диапазоне $1 \leq \gamma \leq 3$. Общность результатов ограничена игнорированием (количественной) зависимости γ от $p_0/p_1 = \xi$.

Для анализа зависимости α_* от интенсивности падающей ударной волны эту интенсивность удобно обозначать через $1/\xi = p_1/p_0$. Для асимптотически сильных скачков ($\xi = 0$) зависимость $\alpha_*(\gamma)$ для некоторых значений γ проанализирована, например, в [4].

Анализ этой зависимости для произвольной интенсивности падающего скачка потребовал гораздо более тщательного качественного разбора результатов вычислений.

В основу численных расчетов было положено уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad x = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (4.1)$$

которое может быть получено из теории регулярного отражения. Здесь

$$\begin{aligned} a &= \gamma + 1 \\ b &= \frac{2\gamma[(\gamma-1)\xi + (\gamma+1)]}{(\gamma+1)\xi + (\gamma-1)} - \frac{[(\gamma-1) + (\gamma+1)\xi]^2}{8\gamma(1-\xi)} \\ c &= \frac{(\gamma-1)[(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi]^2}{[(\gamma-1) + (\gamma+1)\xi]^2} - \frac{[(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi]^2}{4\gamma(1-\xi)} \\ d &= - \frac{[(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi]^4}{8\gamma(1-\xi)[(\gamma-1) + (\gamma+1)\xi]^2} \end{aligned}$$

Подстановкой $y = x + b/3a$ исходное уравнение преобразуется к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

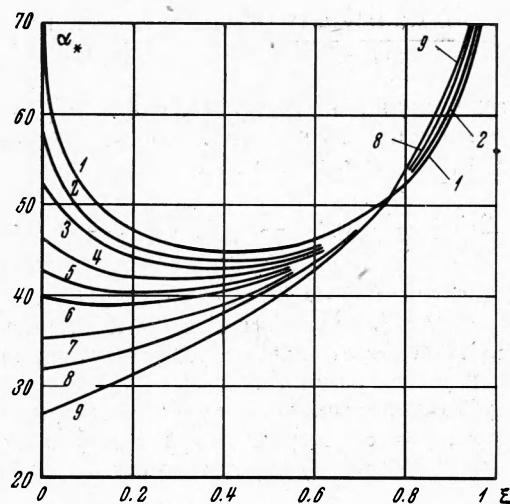
где

$$p = 3ac - b^2/9a^2, \quad q = (b/3a)^3 - bc/6a^2 + d/2a$$

¹ Белокоп В. А. Задачи феноменологической и статистической термодинамики ударных волн. Диссертация, ОИМ — ИПМ, 1964—1967 гг.

² Замечено К. Е. Губкиным.

Решение этого уравнения зависит, как известно, от знаков дискриминанта $D = q^2 + p^3$ и параметра p . Но p и q являются довольно сложными функциями ξ , поэтому вместо трудоемкого аналитического исследования, которое, по-видимому, и невозможно, были проведены соответствующие численный анализ и расчет на ЭВМ.



Результаты расчета зависимости $\alpha_* = \alpha_*(\xi)$ для различных значений γ представлены на фигуре, на которой кривые 1, ..., 9 соответствуют следующим значениям показателя адиабаты:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma = 1.00001$	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.666667	2	3

Как и следовало ожидать, численная зависимость $\alpha_*(\xi)$ при $\gamma = 1.4$ совпала с известной [10]. Из расчетов видно усиление влияния показателя адиабаты на критический угол падения с ростом амплитуды падающего скачка. Таким образом, влияние показателя адиабаты наиболее существенно именно для сильных падающих волн и в случае одномерного (нормального) отражения, и в случае «косого» (наклонного) падения скачка на плоскость. (Заметим, что при $\gamma = 1.00001$ и $\xi = 0$ $\alpha_* = 89.6^\circ$.)

Обращает на себя внимание также следующая замечательная особенность. Оказывается, что при $\xi = 0.763$ независимо от величины показателя адиабаты практически всегда $\alpha_* = 50.8^\circ$.

В предельном случае слабых ударных волн задача допускает аналитическое рассмотрение. Действительно, при $\xi \rightarrow 1$ уравнение (4.1) принимает вид

$$2(\gamma + 1)(1 - \xi)x^3 - \gamma x^2 - 2\gamma x - \gamma = 0 \quad (4.2)$$

Его решение приближенно можно записать в виде

$$x = [2(1 + 1/\gamma)(1 - \xi)]^{-1/2}$$

Отсюда

$$\alpha_* = \arctg [2(1 + 1/\gamma)(1 - \xi)]^{-1/2} \quad (4.3)$$

Разложение правой части (4.3) в ряд по $(1 - \xi)^{1/2}$ с точностью до первого члена разложения дает

$$\alpha_* = \frac{1}{2}\pi - \sqrt{2(1 + 1/\gamma)(1 - \xi)} \quad (4.4)$$

откуда следует, в частности, что α_* довольно слабо зависит от γ .

Заметим далее, что для предельно сильных скачков ($\xi \rightarrow 0$) коэффициенты уравнения (4.1) зависят только от γ , причем их вид упрощается до

$$a = \gamma + 1, \quad b = \frac{2(\gamma+1)\gamma}{\gamma-1} - \frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma}$$

$$c = \frac{(3\gamma+1)(\gamma+1)^2}{4\gamma(\gamma-1)}, \quad d = -\frac{(\gamma+1)^4}{8\gamma(\gamma-1)^2}$$

Интересным и актуальным является случай $\gamma = 1$ или $f = \infty$, когда уплотнение в сильном скачке бесконечно. При значениях γ , близких к 1, уравнение для $x = \operatorname{tg}^2 \alpha_*$ принимает вид

$$2x^3 + \frac{4}{\gamma-1}x^2 + \frac{4}{\gamma-1}x - \frac{2}{(\gamma-1)^2} = 0 \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что при $\gamma \rightarrow 1$ оно может быть удовлетворено лишь при $x = \infty$, т. е. $\alpha_* = 1/2\pi$ (при любом конечном x левая часть уравнения стремилась бы к $-\infty$). Следовательно, регулярное отражение такого скачка возможно при любых углах падения.

В этом можно убедиться также при рассмотрении ударной поляры, которая при $M = \infty$, $f = \infty$ вырождается в круг, проходящий через начало координат, обеспечивая поворот течения на любой угол.

Поступила 30 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Tolman R. C., The principles of statistical mechanics. Oxford, Clarendon Press, 1938.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
4. Белоконов В. А., Проскуряков В. А., Петрухин А. И. Вхождение сильной ударной волны в клиновидную полость. ЖЭТФ, 1965, т. 48, вып. 1.
5. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Лобастов Ю. С., Набоко И. М., Немков Г. Г., Предводителева О. А. Ударные волны в реальных газах. М., «Наука», 1968.
6. Белоконов В. А., Петрухин А. И., Проскуряков В. А. О вхождении сильной ударной волны в клиновидную полость. Аннотации докладов на II Всес. съезде по теор. и прикл. механ., М., «Наука», 1964.
7. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
8. Neumann J. Oblique reflection of shocks. Navy Department, Bureau, Ordnance, Explos. Res., 1943, Rep. 12.
9. Neumann J. Collected works. Oxford, Pergamon Press vol. 1—6, 1961—1963.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеоретиздат, 1954.