

ются, однако, до возникновения растягивающих напряжений. Расчеты при $\tau \geq 20$ приведены для иллюстрации изменения параметров, если грунт выдерживает растягивающие напряжения $\sigma^0 = -0,2$. Разрыв сплошности не предусмотрен в постановке задачи.

Полученное решение показывает, что закономерности взаимодействия волны с препятствием существенно зависят как от пластических, так и от вязких свойств среды. Вязкость приводит к размыванию и изменению профиля отраженной и проходящей волн и нагрузки на препятствие, а также к снижению максимальных значений нагрузки и ускорения препятствия.

Поступила 30 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М. Определения вязких свойств грунта.— ПМТФ, 1968, № 4.
2. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
3. Ляхов Г. М., Пачепский Я. А. Об учете вязких и пластических свойств при решении волновых задач.— ПМТФ, 1973, № 2.
4. Васильев Ю. И., Иванова Л. А., Шербо М. Н. Измерение напряжений и деформаций в грунте при распространении взрывных волн.— «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1969, № 1.
5. Вовк А. А. Основы прикладной геодинамики взрыва. Киев, «Наукова думка», 1976.
6. Григорян С. С., Ляхов Г. М., Паршуков П. А. Сферические взрывные волны в грунтах по измерениям напряжений и деформаций.— ПМТФ, 1977, № 1.
7. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.

УДК 532.68

О НАПРЯЖЕНИЯХ В ЗОНЕ ЛИНИИ СМАЧИВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ МЕНИСКА

Б. В. Железный, А. Г. Никифоров

(Ленинград)

Использование обычного «условия прилипания» жидкости к твердой поверхности при анализе течения в зоне линии трехфазного контакта твердое тело/жидкость/газ (ЛТК) приводит к решению с математическими особенностями на ЛТК [1]. Устранить эти особенности (оставаясь в рамках континуальной механики жидкости) можно, либо отказавшись от условия прилипания для зоны ЛТК, либо приняв, что твердая поверхность вблизи мениска покрыта полимолекулярной (жидкой) пленкой, так что ЛТК, как таковая, отсутствует (имеется не «линия» смачивания, а конечной протяженности переходная область между мениском и пленкой однородной толщины). В последнем случае использование условия прилипания возможно.

Задача о движении мениска при наличии жидкой пленки на стенке сформулирована в работах [2, 3]. Различие между «отступающим» и «наступающим» мениском связано с тем, что в первом случае средняя толщина h_* пленки (оставляемой на стенке) определяется скоростью v мениска, тогда как во втором случае толщина h_* пленки впереди мениска может быть задана произвольной. В силу наличия дополнительной независимой переменной (h_*) случай наступающего мениска математически более сложен.

Основной практической задачей, решаемой для отступающего мениска, является нахождение зависимости $h_*(v)$, тогда как для наступающего мениска — нахождение эффективного гидродинамического сопротивления мениска. Пер-

вая задача решалась в [2] при учете специфических термодинамических и реологических свойств «тонких» пленок, вторая — в [3] для случая достаточно «толстых» пленок, обладающих свойствами объемной жидкости. В последнем случае находилась зависимость $\xi(v)$, где ξ — относительный радиус кривизны мениска.

В данной работе приводятся результаты анализа течения в переходной зоне от отступающего мениска к «тонкой» пленке, выполненного в рамках подхода, использованного в [2]. Рассмотрены два вопроса: распределение напряжений в переходной зоне и эффективное динамическое сопротивление мениска. Обозначения и термины, введенные в [2], используются и здесь.

1. В рассматриваемом приближении пологих пленок существенны два рода напряжений, возникающих в потоке: градиент давления G в направлении течения (ось x) и касательное напряжение τ_0 на стенке. Распределение обоих напряжений вдоль оси x можно найти, зная профиль переходной зоны от мениска к пленке. Для моделей пленок, рассмотренных в [2], величину G можно представить в виде

$$(1.1) \quad G = \left[\frac{0,8\sigma}{R^{3/2} \sqrt{h_0}} \right] \left\{ \frac{1}{C(\alpha, \beta)} \sqrt{\frac{W}{W}} \frac{y-1}{y^3} \left(1 + \frac{\beta}{y} \right)^v \right\},$$

где $v = 1$ для модели устойчивой пленки и $v = -1$ для модели неустойчивой пленки.

В [1] задача решалась для капилляра радиуса R , однако формулировка и решение задачи сохраняют силу и для систем более сложной геометрии, если мениск движется в направлении x , перпендикулярном линии смачивания, и выполнено условие $R_s \gg R_m$. Здесь R_s и R_m — соответственно радиусы кривизны твердой поверхности и мениска в плоскости меридионального сечения (перпендикулярного линии смачивания). Под R в общем случае надо понимать расстояние от твердой поверхности до центра окружности (радиуса R_m), вписанной в центральную часть меридионального сечения мениска. Между мениском и пленкой имеется переходная зона, где радиус кривизны плавно меняется от $\sim R_s$ до R_m .

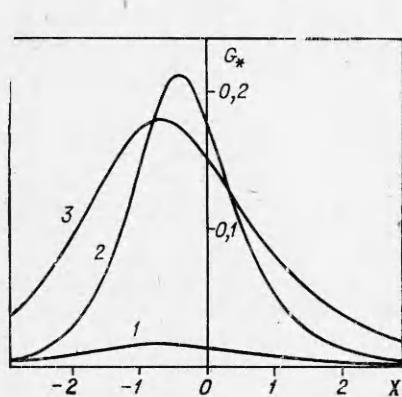
В квадратных скобках в (1.1) выделена размерная часть, определяемая лишь величиной R и равновесными термодинамическими параметрами системы. Зависимость G от скорости заключена в безразмерной части (в фигурных скобках), определяемой величиной параметров α и β и конкретной моделью пленки (последняя определяет величину W и значение коэффициента $C(\alpha, \beta)$ при заданных α и β , способ нахождения W указан в [2]).

Величина G постоянна в данном сечении пологой пленки (перпендикулярном оси x), величина тангенциального напряжения τ на расстоянии z от «свободной» поверхности пленки (на которой предполагается отсутствие касательного напряжения) равна $\tau = Gz$. Максимальное значение $\tau = \tau_0$ в данном сечении достигается на стенке и равно Gh , где h — толщина пленки в данном сечении. Аналогично (1.1) имеем

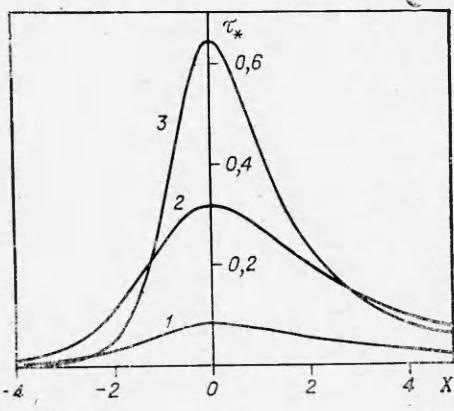
$$(1.2) \quad \tau_0 = \left[\frac{1,25\sigma}{R^{3/2}} \right] \left\{ \frac{\sqrt{W}}{C(\alpha, \beta)} \frac{y-1}{y^2} \left(1 + \frac{\beta}{y} \right)^v \right\},$$

где в квадратных и фигурных скобках заключены соответственно размерная и безразмерная части выражения.

Выражения (1.1), (1.2) не содержат явно x , однако фактически они выражают распределение напряжений вдоль оси x , поскольку y есть функция x . Из (1.1), (1.2) следует, что при некоторых значениях y достигаются максимальные значения (G_m и τ_m) напряжений G и τ_0 в переходной зоне. В частности, при $\beta = 0$ (стандартная пленка) G_m достигается при $y = 1,5$,



Фиг. 1

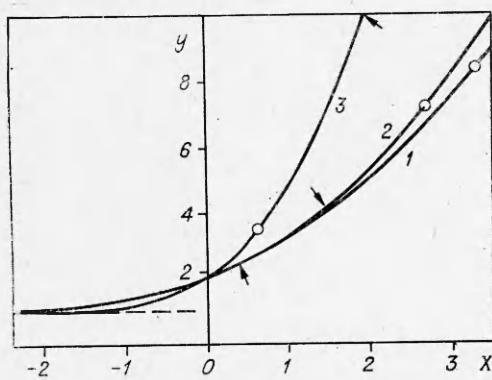


Фиг. 2

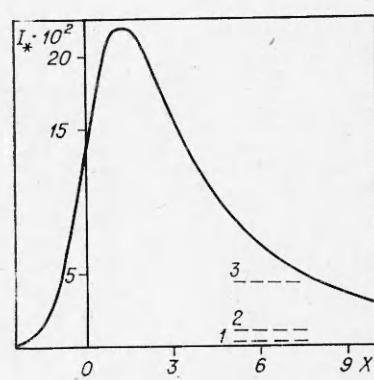
а τ_m — при $y = 2$. Примеры распределений G и τ_0 вдоль оси x для стандартной устойчивой пленки при $n = 3$ приведены на фиг. 1, 2, где представлены безразмерные части (обозначенные G_* и τ_*) выражений (1.1), (1.2) для трех значений безразмерной скорости $V = 0,1; 1; 10$ (кривые 1—3 соответственно). Эти распределения получены в результате анализа интегральных кривых $y(x)$ для соответствующих частных решений.

Для удобства сопоставления распределений масштаб по оси абсцисс на фиг. 1—4 выбран отличным от масштаба переменной x , использованной в [2], безразмерная координата $X = (0,643R/h_0)^{1/2}l/h_*$, начало отсчета по оси X выбрано соответствующим уровню $y = 2$.

На фиг. 3 приведен профиль переходной зоны от мениска к пленке для рассматриваемой модели при трех указанных значениях скорости. Действительную «пологость» пленки (dh/dl) можно оценить по графику на фиг. 3 с помощью соотношения $dh/dl = \sqrt{h_0/0,643R} \cdot dy/dX$. Точки, соответствующие значению $dy/dX = 3$ отмечены на фиг. 3 кружком. Это значение dy/dX соответствует значению dh/dl порядка 0,1 в капилляре радиусом ~ 10 мкм и соответственно меньшим значениям dh/dl в более широких капиллярах. Стрелками на фиг. 3 отмечен уровень, на котором вторая производная y'' достигает 99% своего предельного значения. Из сопоставления фиг. 3 с фиг. 1, 2 следует, что максимальные напряжения



Фиг. 3



Фиг. 4

развиваются именно в области пологости, причем приближение пологой пленки оправдывается тем лучше, чем меньше V и чем больше R .

Обозначим через G_p и τ_p градиент давления и напряжение на стенке для невозмущенного пуазейлевского течения в цилиндрическом капилляре на удалении от мениска. Отношение к этим напряжениям соответствующих напряжений в переходной зоне составит

$$(1.3) \quad G/G_p = 0,155(R/h_0)^2 G_* / V;$$

$$(1.4) \quad \tau_0/\tau_p = 0,484 R \tau_* / h_0 V,$$

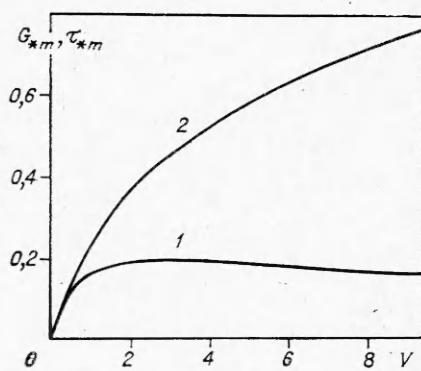
где G_* и τ_* — безразмерные части выражений (1.1), (1.2). Из (1.3), (1.4) следует, что напряжения, развивающиеся в переходной зоне, могут на много порядков превосходить напряжения, возникающие в потоке жидкости вдали от мениска.

На фиг. 5 приведены зависимости от V безразмерных частей ($G_{*m} - 1$ и $\tau_{*m} - 2$) максимальных напряжений (G_m и τ_m) в переходной зоне для той же модели устойчивой пленки, откуда видно, что с ростом скорости мениска величина τ_m монотонно возрастает, тогда как величина G_m проходит через пологий максимум. При $V \rightarrow 0$ в случае устойчивой пленки достигается профиль термодинамически равновесного мениска (он практически совпадает с профилем при $V = 0,1$ на фиг. 3), при этом $G \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$, что видно из фиг. 1, 2.

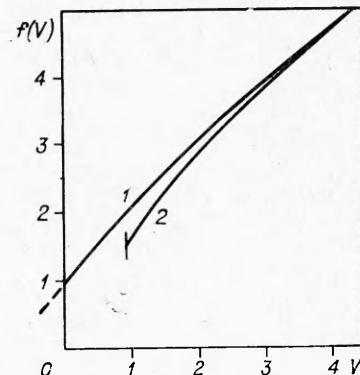
Качественно отличен случай неустойчивой пленки. Термодинамически равновесный мениск здесь также достигается при $V \rightarrow 0$ и соответствует нулевым напряжениям. Однако это происходит при скоростях меньше критической скорости смачивания (V_0), когда достигается конечный отступающий краевой угол и поверхность позади мениска остается «сухой». В этом случае приближение пологой пленки становится некорректным. При приближении к V_0 со стороны больших скоростей напряжения в пологой части неустойчивой пленки неограниченно возрастают, что следует из (1.1), (1.2): $G \rightarrow \infty$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$ при $V \rightarrow V_0$, так как $C(\alpha, \beta) \rightarrow 0$.

Неограниченное возрастание напряжений в зоне ЛТК вообще характерно для движения по «сухой» поверхности [1], однако в рамках рассматриваемой задачи этот эффект неразрывно связан с термодинамическими особенностями тонкой неустойчивой пленки. Заметим, что допущение возможности скольжения жидкости по лиофобной твердой поверхности в этом случае не устраняет эффект катастрофического роста напряжений. В свою очередь большие тангенциальные напряжения на стенке в зоне ЛТК должны приводить к выраженному эффекту скольжения жидкости при движении отступающего мениска по лиофобной поверхности; анализ имеющихся экспериментальных данных по критической скорости смачивания подтверждает эту точку зрения. Отметим, что при обычных условиях течения, например при пуазейлевском течении с той же средней скоростью, что и скорость мениска, скольжение может быть совершенно незаметным. Это связано прежде всего с малостью тангенциальных напряжений на стенке при пуазейлевском течении вдали от мениска.

2. Эффективное или дополнительное динамическое сопротивление мениска (p) можно определить различными способами. Обычный для практики способ выражения p через краевой угол θ удобен при $\theta > 0$ и практически достаточно точен, так как заметные отклонения кривизны мениска от значения, соответствующего его центральной части (в пренебрежении силой тяжести) при обычных скоростях происходят лишь в области протяженностью порядка 10^{-5} см вблизи ЛТК [4]. Более существенные искажения формы мениска на лиофобной поверхности возможны



Фиг. 5



Фиг. 6

при больших скоростях, когда $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$. Для цилиндрического капилляра этот способ определения p дает

$$(2.1) \quad p = 2\sigma(\cos \theta - \cos \theta_0)/R,$$

где θ и θ_0 — соответственно динамический и равновесный краевой угол; p отнесено к единице площади сечения капилляра.

Рассматриваемый способ можно обобщить на случай лиофильной поверхности ($\theta_0 \approx 0$), если заменить в (2.1) $\cos \theta$ на величину $\xi \equiv R/R_m$:

$$(2.2) \quad p = 2\sigma(\xi - \xi_0)/R,$$

где ξ_0 соответствует термодинамически равновесному мениску. Для лиофильной поверхности $\xi_0 \geq 1$, для лиофобной поверхности $\xi_0 = \cos \theta_0 < 1$. Для отступающего мениска возможно $\xi > 1$ как на лиофильной, так и на лиофобной поверхности. Как и (2.1), выражение (2.2) является достаточно точным при условии, что линейные размеры переходной зоны, где происходит основное изменение кривизны мениска, малы по сравнению с R_m . В этом случае давление в жидкости непосредственно у (движущегося) мениска практически можно считать гидростатическим, соответствующим R_m , а формулы (2.1), (2.2) описывают отклонение этого давления от термодинамически равновесного значения.

Для модели устойчивой пленки, рассмотренной в [2], справедливо соотношение

$$(2.3) \quad \xi_0 = 1 + \frac{h_0}{R_m} \frac{n}{n-1} \approx 1 + \frac{h_0}{R} \frac{n}{n-1}.$$

Что касается зависимости $\xi(v)$, то на основании [2, 3] ее можно представить в виде

$$(2.4) \quad \xi = 1 + \frac{h_0}{0.643R} f(V, \gamma),$$

где $f(V, \gamma)$ — некоторая функция безразмерной скорости V и параметра γ , определяемая конкретной моделью пленки. Эта функция связана с коэффициентами $C_{1\infty}$ и $C_{2\infty}$, определяемыми по [3], соотношением $f(V, \gamma) = C_\infty(\alpha, \beta) \tilde{W}$, где $C_\infty(\alpha, \beta) = C_{1\infty}(\alpha, \beta)C_{2\infty}(\alpha, \beta)$. Запись $C(\alpha, \beta)$ означает, что каждый из перечисленных коэффициентов есть функция параметров α и β . Таблицы коэффициентов $C_{1\infty}(\alpha, \beta)$ для отступающего ме-

ниска, рассчитанные для различных моделей пленок, приведены в [2] (там использовано обозначение $C(\alpha, \beta) = C_{1\infty}(\alpha, \beta)$). Коэффициенты $C_{2\infty}(\alpha, \beta)$ и $C_\infty(\alpha, \beta)$ в [2] не рассчитывались, в [3] они рассчитаны для наступающего мениска в рамках модели «идеальной» пленки.

На фиг. 6 приведены графики функции $f(V)$ для отступающего мениска, рассчитанные для использованных в [2] моделей устойчивой и неустойчивой «стандартной» ($\gamma = 0$) пленки при $n = 3$. Для устойчивой пленки (кривая 1) значение $f(V)$ при $V = 0$ соответствует ξ_0 . При малых V зависимость $f(V)$ почти линейна, для устойчивой пленки ее можно аппроксимировать формулой $f(V) \approx 0,965 + 1,1 V$. Вместе с (2.2)–(2.4) это дает

$$p \approx 3,4h_0\sigma V/R^2.$$

В случае неустойчивой пленки (кривая 2) зависимость $f(V)$ обрывается при критической скорости смачивания (V_0), при $V > V_0$, как и для устойчивой пленки, $\xi > 1$.

Введем понятие «относительного сопротивления мениска» (L_*), определяемое следующим образом. Пусть L — длина участка цилиндрического капилляра, на котором при пуазейлевском течении (вдали от мениска) перепад давлений численно равен p . Если средняя скорость течения равна v , то $L = pR^2/8\eta_0v$. Обозначим $L_* \equiv L/R$. Тогда для отступающего мениска в рамках модели устойчивой пленки имеет место

$$L_* = 0,75\sqrt{0,643R/h_0}[f(V, \gamma) - 0,965]/V.$$

Используя приведенную выше аппроксимацию для модели стандартной устойчивой пленки при $n = 3$, получаем для малых скоростей

$$(2.5) \quad L_* \approx 0,66(R/h_0)^{1/2} = 1,08R^{1/3}(\sigma/A)^{1/6}.$$

Замечательно, что, согласно (2.5), L_* не зависит от сил вязкости, а определяется только термодинамическими особенностями тонкой пленки. Это является следствием линейной аппроксимации функции $f(V)$ для рассматриваемой модели. Безразмерный комплекс $M_0 \equiv h_0/R$, входящий в (2.5), играет важную роль в задачах рассматриваемого типа. Оценка L_* по (2.5) дает $L_* \approx 20$ для $R \sim 10$ мкм. Таким образом, даже в случае полного смачивания относительное сопротивление мениска весьма значительно. Этот случай может служить простейшей иллюстрацией так называемого «статического гистерезиса» краевого угла.

Штриховая линия на фиг. 6 соответствует линейной экстраполяции зависимости $f(V)$ на случай наступающего мениска ($V < 0$), движущегося на пленке толщины h_0 (для той же модели). В этом случае формула (2.5) в ограниченном интервале скоростей сохраняет силу и для наступающего мениска. Для нахождения сопротивления наступающего мениска, движущегося по лиофильной поверхности при произвольном значении h_* , необходимо решение задачи типа [3] для моделей устойчивых пленок [2].

Описанный выше способ расчета p можно назвать «силовым». Другой способ определения p («энергетический») основан на расчете диссипации энергии в зоне ЛТК. Величина диссипации энергии (D_f), приходящаяся в единицу времени на единицу площади твердой поверхности в пологой части пленки, равна $G^2h^3/3\eta_0$, что вместе с (1.1) дает для рассматриваемых моделей

$$(2.6) \quad D_f = (0,643)^{1/5}\sigma^2H^4M_0^{2/5}(3\eta_0)^{-1}I_{*0}$$

где $I_{*0} = G_*^2y^3$. На единицу длины цилиндрического капилляра в области

пологости пленки приходится диссипация $D_m = 2\pi RD_f$. Диссипация D_p при невозмущенном пуазейлевском течении вдали от мениска, приходящаяся в единицу времени на единицу длины цилиндрического капилляра, равна $8\pi\eta_0 v^2$, где v — средняя по сечению скорость течения. Отношение D_m/D_p составляет

$$(2.7) \quad D_m/D_p = I_* H^3(7, 8 M_0 V^2)^{-1}.$$

Отношение D_m/D_p может быть весьма велико, что иллюстрирует фиг. 4, на которой приведено распределение вдоль оси X величины I_* , входящей в (2.6), (2.7), рассчитанной для модели стандартной ($\gamma = 0$) устойчивой пленки при $n = 3$ и при $V = 1$. Там же приведены соответствующие уровни пуазейлевской диссипации в капиллярах радиусом 10; 1 и 0,1 мкм (штриховые линии 1—3 соответственно). При сопоставлении с пуазейлевской диссипацией D_p приняты термодинамические параметры тонких пленок воды на кварце по [5]. Из фиг. 4 видно, что в широких капиллярах максимум диссипации приходится на пологую часть пленки, причем в районе максимума $D_m \gg D_p$. Этот эффект объясняет высокое относительное сопротивление мениска при больших R , следующее из (2.5).

Зависимость $I_*(X)$, изображенная на фиг. 4, рассчитана в приближении пологой пленки. При достаточно больших y (соответственно X) это приближение становится неверным, чем объясняется кажущееся пересечение кривой $I_*(X)$ с уровнем, соответствующим D_p для $R = 0,1$ мкм (линия 3). В действительности с ростом X величина I_* асимптотически приближается к уровню, соответствующему D_p для капилляра данного радиуса. Как отмечалось выше, приближение пологой пленки оправдано тем лучше, чем больше R , это видно и из фиг. 4. В достаточно узких капиллярах ($R \sim 0,01$ мкм) уровень пуазейлевской диссипации становится столь высоким, что максимум на действительной зависимости $I_*(X)$ вообще исчезает. В этом случае относительное сопротивление мениска сравнительно невелико.

Чтобы рассчитать эффективное сопротивление мениска по диссипации энергии, необходимо найти полную величину диссипации D_1 в зоне мениска и вычесть из нее величину D_2 , соответствующую вкладу пуазейлевской диссипации. Последнюю можно формально определить различным образом, и здесь возникает определенная трудность. Предположим, что пуазейлевский режим вдали от мениска вполне сформировался и можно определить среднюю скорость v «сплошного» течения в некотором сечении x_∞ цилиндрического капилляра на достаточном удалении от мениска. Одно из возможных формальных определений D_2 следующее. Пусть мениск находится слева от сечения x_∞ и пусть q — величина потока в произвольном сечении x левее x_∞ ($-\infty < x \leq x_\infty$). Ввиду наличия

мениска $q \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, поэтому интеграл $Q = \int_{-\infty}^{x_\infty} q dx$ конечен;

он соответствует полному объему жидкости, перемещаемому в данный момент времени относительно стенок капилляра левее сечения x_∞ . При невозмущенном пуазейлевском течении со средней скоростью v такой же объем жидкости перемещается на участке конечной длины $L = Q/\pi R^2 v$. Определим теперь D_2 так: $D_2 \equiv D_p L$, где $D_p = 8\pi\eta_0 v^2$. Практически v равна экспериментально наблюдаемой скорости мениска. Детали формального определения D_2 могут оказаться существенными в тех случаях, когда уровень пуазейлевской диссипации относительно высок, например в узких капиллярах и при больших скоростях.

Величины q и D_1 находятся непосредственно путем решения уравнений движения на участке $-\infty < x \leq x_\infty$. В приближении пологой плен-

ки $q = 4\pi Rh^3G/3\eta_0$ и для рассмотренных моделей $D_1 = 2\pi R \int_{-\infty}^{x_\infty} D_f dX$, где D_f определяется по (2.6). Найдя разность $D = D_1 - D_2$, можно формально определить динамическое сопротивление мениска как силу F , развивающую мощность $D = Fv$. На единицу площади сечения капилляра приходится дополнительное давление мениска

$$(2.8) \quad p = D/\pi R^2 v.$$

Расчет p по формулам (2.2), (2.8) для капилляра $R \sim 1$ мкм в рамках модели устойчивой пленки дает близкие результаты. Это показывает, что оба рассмотренных способа определения p для достаточно широких капилляров по существу адекватны. В этом случае следует предпочесть первый способ как более простой. Однако второй способ является более строгим, и его следует предпочесть для более узких капилляров ($R \leq 0,1$ мкм), когда размеры зоны переходной кривизны становятся сравнимыми с размером мениска и использование R_m как характерного параметра мениска теряет смысл.

Поступила 9 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Chun Hun, Scriven L. E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line.— «J. Colloid Interface Sci.», 1971, vol. 35, N 1.
2. Железный Б. В. Динамика отступающего мениска жидкости в капилляре с учетом специфических свойств тонких пленок.— ПМТФ, 1976, № 3.
3. Железный Б. В. К гидродинамике наступающего мениска смачивающей жидкости.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 1.
4. Hansen B. I., Toong T. Y. Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin.— «J. Colloid Interface Sci.», 1971, vol. 37, N 1.
5. Железный Б. В. Исследование смачивающих пленок капиллярным методом.— В кн.: Поверхностные явления в жидкостях. Вып. 3. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1975.

УДК 532.591

О ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

С. И. Плаксин
(Новосибирск)

Задаче об установленныхся волнах на границе раздела двух тяжелых жидкостей посвящен ряд работ (см., например, [1, 2]). В данной работе предложен метод, основанный на сведении этой задачи к решению нелинейной задачи сопряжения.

Рассмотрим течение двух несжимаемых жидкостей различных плотностей в поле силы тяжести с заданными скоростями на бесконечном удалении от линии раздела. Будем считать движение безвихревым, а линию раздела l , перемещающуюся без изменения формы с некоторой горизонтальной скоростью U , кривой Ляпунова с периодом λ . Выберем систему коор-