

Ниже приводится результат решения подобной задачи. В цилиндрической камере фиг. 1 расположены два электрода — катод 1 и анод 2. Камера находится в радиально-симметричном магнитном поле, нарастающем по направлению к аноду (соленоид на фиг. 1 не показан). Напряженность магнитного поля рассчитана с шагом 1 см на машине Минск-1. Давление в камере $p = 0,1$ тор, $T_e = 25000^\circ \text{K}$.

На фиг. 1 показано распределение линий тока при отсутствии магнитного поля. На фиг. 2 дано отображение камеры и растекание тока в плоскости (η, ξ) при напряженности поля $H = 40 \text{ э}$ в точке $r = 0, z = 0$ и $H_r = 4 \text{ э}$, $H_z = 18 \text{ э}$ в точке $r = 3, z = 5$. На фиг. 3 приведено изображение камеры и растекание тока для $H = 200 \text{ э}$, $H_r = 20 \text{ э}$, $H_z = 90 \text{ э}$ в тех же точках.

Поступила 14 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. Атомиздат, 1964 г
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
3. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Изд. иностр. лит., 1962.
4. Power W. E., Patrick R. M. Magnetic annular arc. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No 10. (Русск. перев. Вопросы ракетной техники, 1963, № 5.)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ИНДУЦИРОВАННОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАЗРЯДЕ В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

В. А. Груздев, Р. Е. Ровинский, А. П. Соболев

(Москва)

Стационарный высокочастотный разряд, возбуждаемый в замкнутом объеме при отсутствии протока газа, имеет ряд характерных особенностей. Во-первых, в зависимости от давления рабочего газа проявляются различные механизмы формирования разряда. Так, при низких давлениях определяющим является механизм диффузии частиц к стенкам колбы, рассмотренный в работе [1]. При высоких давлениях действует механизм, связанный с теплопроводностью [2]. Во-вторых, в таком разряде передача энергии от внешнего поля к плазме происходит не во всем объеме, занимаемом разрядом, в силу чего геометрия разряда определяется не только способом введения энергии в разряд, но и характером ее распределения и вывода из разряда. В зависимости от этих факторов формируется либо кольцевой, либо цилиндрический разряд.

Высокочастотный разряд, в силу самих условий его образования, является неравновесным. Однако в случае плотной плазмы отклонение температур компонент от равновесной температуры, как правило, невелико. Будем рассматривать плотную плазму, определяющим механизмом в которой является теплопроводность. С достаточной степенью точности полагаем в такой плазме наличие локального термодинамического равновесия. Тогда все коэффициенты переноса будут функциями температуры и давления и наша задача сведется к решению уравнения баланса энергии совместно с системой уравнений Максвелла.

Во время подготовки данной работы к печати появилась статья [3], в которой рассматривается подобная система уравнений, описывающих высокочастотный индуцированный разряд высокого давления. В своей работе авторы решение поставленной краевой задачи заменяют численным решением задачи Коши, произвольно задавая дополнительные условия на оси разряда. Такой путь, на наш взгляд, имеет три существенных недостатка: во-первых, нет возможности качественного исследования зависимостей, связывающих параметры плазмы; во-вторых, произвол в выборе дополнительных условий затрудняет сравнение расчетных и экспериментальных результатов; в-третьих, нет возможности исследовать важный круг вопросов, связанных с контргированием разряда.

В настоящей статье приводится решение краевой задачи методом последовательных приближений. Первое приближение решения позволяет качественно исследовать явления, протекающие в индуцированном разряде. Соответствующие результаты, имеющие прикладное значение, будут изложены в другой статье. Второе приближение решения использовано для численных расчетов основных параметров разряда в аргоне и их сравнения с экспериментом. Теоретическая часть настоящей работы выполнена Соболевым А. П.

1. Постановка задачи и вывод исходной системы уравнений. Рассмотрим систему, состоящую из цилиндрического индуктора и помещенного в него объема с газом (фиг. 1). Будем считать, что 1) поле, возбуждающее разряд, достаточно однородно вдоль оси разряда; 2) плазма в целом неподвижна; 3) давление в системе постоянно; 4) длина волны электромагнитного поля много больше характерного размера плазмы; 5) энергией излучения можно пренебречь по сравнению с тепловыми потерями плазмы.

Используя методы неравновесной термодинамики и учитывая сделанные предположения, запишем систему уравнений для индуцированного высокочастотного разряда в виде:

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sigma E, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \sigma E^2 \quad (1.1)$$

Здесь H , E — напряженности магнитного и электрического поля, λ — коэффициент теплопроводности, σ — коэффициент электропроводности, T — температура плазмы, ρ — плотность плазмы, u — внутренняя энергия единицы объема плазмы.

Поскольку плазма нагревается высокочастотным полем, то все величины будут функциями двух характерных времен: t_0 — времени установления стационарного режима и $t_1 = 1/\omega$, где ω — частота электромагнитного поля. Усредняя последнее уравнение (1.1) по быстроменяющемуся аргументу $\tau = \omega t$, можно записать систему уравнений (1.1) для стационарного режима в виде:

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sigma E, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E = -\frac{\omega}{c} \frac{\partial H}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^2(\tau) d\tau = 0$$

Граничные условия для этой системы уравнений

$$H(R_0) = \frac{4\pi}{c} n J_0,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -\alpha_1 [T(R_0) - T_0] \quad (1.3)$$

$$\alpha_1 = \alpha \frac{1 + \delta/R_0}{1 + \alpha (R_0 + \delta) \langle \lambda \rangle^{-1} \ln(1 + \delta/R_0)} \quad (1.4)$$

Здесь nJ — число ампервитков индуктора на единицу длины, T_0 — температура окружающей среды, α — коэффициент теплопередачи, $\langle \lambda \rangle$ — средний коэффициент теплопроводности стенки в диапазоне температур от $T(R_0)$ до $T(R_0 + \delta)$.

Если ток в индукторе изменяется по закону $J = J_0 \cos \tau$, то решение системы уравнений (1.2) можно искать в виде:

$$E = E_1 \cos \tau + E_2 \sin \tau, \quad H = H_1 \cos \tau + H_2 \sin \tau \quad (1.5)$$

Вводя безразмерную координату $x = (r/R_0)^2$ (1.6) и безразмерные функции, пропорциональные квадратам амплитуд электрического и магнитного поля

$$\Phi = (E_1^2 + E_2^2) \left(\frac{c^2}{2\pi\omega R_0 n J_0} \right)^2, \quad \Psi = (H_1^2 + H_2^2) \left(\frac{c}{4\pi n J_0} \right)^2 \quad (1.7)$$

совместно с выражением (1.5) запишем систему уравнений в виде:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 2\Psi, \quad \frac{c^2}{\pi\omega R_0^2 \sigma(T)} \frac{d}{dx} \frac{c^2}{\pi\omega R_0^2 \sigma(T)} \frac{d\Psi}{dx} = 2\Phi$$

$$\frac{d}{dx} x \lambda(T) \frac{dT}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\omega R_0^2 n J_0}{c^2} \right)^2 \sigma(T) \Phi = 0 \quad (1.8)$$

Граничные условия:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Psi(1) = 1; \quad \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=0}, \quad \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=0} < M = \text{const}$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=1} = -\frac{\alpha_1 R_0}{2} [T(1) - T_0] \quad (1.9)$$

При помощи первых двух уравнений (1.8) последнее уравнение этой системы можно записать в виде

$$F(T) = \int_{T(1)}^{T(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT = \left(\frac{n J_0}{2} \right)^2 [1 - \Psi(x)] \quad (1.10)$$

а систему (1.8) с граничными условиями (1.9) перепишем в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) \Psi(\xi) d\xi \\ \Psi(x) &= 1 - 2 \int_x^{x^*} \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \Phi(\tau) \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) d\tau \\ F(T) &= \int_{T(1)}^{T(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT = \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 [1 - \Psi(x)] \\ 2[T(1) - T_0] \alpha_1 R_0 \sigma[T(1)] &= (nJ_0)^2 \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=1}\end{aligned}\quad (1.11)$$

При $\sigma[T(1)] = 0$ решение системы (1.11) тривиально, поле совпадает с полем в отсутствие плазмы. Это значит, что не существует равновесного разряда с проводимостью, равной нулю на стенке. Поэтому предположим, что существует такая граничная температура $T = T^*$, что $\sigma(T^*) > 0$ и $\sigma(T) = 0$ при $T < T^*$, $T^* > T(1)$.

В этом предположении система уравнений (1.11) примет вид:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) \Psi(\xi) d\xi \\ \Psi(x) &= 1 - 2 \int_x^{x^*} \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \Phi(\tau) \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) d\tau \\ F(T) &= \int_{T^*}^{T(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT = \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 [1 - \Psi(x)] \\ \int_{T(1)}^{T^*} \lambda(T) dT &= \frac{\alpha_1 R_0}{2} [T(1) - T_0] \ln \frac{1}{x^*} \\ \frac{4\pi \omega R_0^2}{c^2} \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \int_0^{x^*} \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) \Phi(x) dx &= \alpha_1 R_0 [T(1) - T_0]\end{aligned}\quad (1.12)$$

2. Решение одномерной задачи. Решение полученной системы уравнений будем искать методом последовательных приближений. Положим в первом приближении:

$$T^{(0)}(x) = \text{const}, \quad x^{*(0)} = 1$$

а последующие приближения определим системой уравнений:

$$\begin{aligned}\Phi^{(n)}(x) &= 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) \Psi^{(n)}(\xi) d\xi \\ \Psi^{(n)}(x) &= 1 - 2 \int_x^{x^{*(n-1)}} \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma[T^{(n-1)}] \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \Phi^{(n)}(\tau) \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma[T^{(n-1)}] d\tau \\ F(T^{(n)}) &= \int_{T^*}^{T^{(n)}(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT = \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 [1 - \Psi^{(n)}(x)] \\ \int_{T^{(n)}(1)}^{T^*} \lambda(T) dT &= \frac{\alpha_1 R_0}{2} [T^{(n)}(1) - T_0] \ln \frac{1}{x^{*(n)}} \\ \frac{4\pi \omega R_0^2}{c^2} \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \int_0^{x^{*(n-1)}} \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma[T^{(n-1)}] \Phi^{(n)}(x) dx &= \alpha_1 R_0 [T^{(n)}(1) - T_0]\end{aligned}\quad (2.1)$$

Покажем, что наилучшее первое приближение в смысле наименьшей верхней равномерной оценки для функций $T_{(x)}^{(n)}$ получается из решения уравнений

$$F(T) = \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{(\operatorname{ber} \sqrt{\beta})^2 + (\operatorname{bei} \sqrt{\beta})^2}\right), \quad \beta = \frac{4\pi\omega R_0^2 \sigma(T)}{c^2} \quad (2.2)$$

Докажем предварительно, что если $T_1(x) \geq T_2(x)$ при $0 \leq x \leq 1$ и $\psi_1(x), \psi_2(x)$ — решения системы уравнений

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) \psi(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

$$\psi(x) = 1 - 2 \int_x^1 \frac{\pi\omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \varphi(\tau) \frac{\pi\omega R_0^2}{c^2} \sigma(T) d\tau \quad (2.4)$$

при $T = T_1(x)$ и $T = T_2(x)$ соответственно, то $\psi_1(0) \leq \psi_2(0)$. Предположим, что при указанных условиях $\psi_1(x) > \psi_2(x)$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда из уравнения (2.3) следует

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) [\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)] d\xi > 0$$

но тогда из уравнения (2.4) получим при $x = 0$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) - \psi_2(0) = & -2 \int_0^1 \left(\frac{\pi\omega R_0^2}{c^2}\right)^2 \left\{ \sigma(T_1) \int_0^{\xi} \varphi_1(\tau) \sigma(T_1) d\tau - \right. \\ & \left. - \sigma(T_2) \int_0^{\xi} \varphi_2(\tau) \sigma(T_2) d\tau \right\} \frac{d\xi}{\xi} < 0 \quad (\sigma(T_1) > \sigma(T_2) \text{ при } T_1 > T_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу непрерывности функции $\psi(x)$ из (2.5) следует, что $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Значит, либо $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, либо существует по крайней мере одна точка $x = x_n$ такая, что $\psi_1(x_n) = \psi_2(x_n)$ при $0 \leq x_n < 1$; тогда если x_1 — первая такая точка и $\psi_1(x) > \psi_2(x)$ при $0 \leq x < x_1$, то $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$ и

$$\psi_1(0) - \psi_2(0) = -2 \int_0^x \left(\frac{\pi\omega R_0^2}{c^2}\right)^2 \left\{ \sigma(T_1) \int_0^{\xi} \varphi_1(\tau) \sigma(T_1) d\tau - \sigma(T_2) \int_0^{\xi} \varphi_2(\tau) \sigma(T_2) d\tau \right\} \frac{d\xi}{\xi} < 0$$

т. е. мы снова пришли к противоречию. Следовательно, $\psi_1(0) \leq \psi_2(0)$.

Зададимся теперь произвольным значением T . Этому значению будет соответствовать некоторое решение $\psi_0(x)$ системы уравнений (2.3), (2.4). Подставляя эту функцию в третье уравнение системы (2.1), получим функцию $T_1(x)$. Поскольку $\psi(x) > 0$, то

$$F(T_1) < (1/2 n J_0)^2$$

Определим теперь T уравнением $F(T) = (1/2 n J_0)^2$, тогда $T_1(0) < T$, и, следовательно, $T_1(x) < T$. Используя приведенное выше доказательство для функции $T_1(x) = T$ и $T_2(x) = T_1(0)$, получим $\psi_1(0) > \psi_2(0)$. Если определить $T_2(0)$ соотношением $F(T_2(0)) = (1/2 n J_0)^2 (1 - \psi_1(0))$, то $T_2(0) < T_1(0) < T$.

Продолжая этот процесс, получим бесконечную убывающую последовательность чисел $T_n(0)$, ограниченную сверху значением T , а снизу T^* . Следовательно, существует предел этой последовательности $T^{(0)}$. Решение системы уравнений (2.3), (2.4) при $T(x) = T_n(0) = \text{const}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{4 (\operatorname{bei}' \sqrt{\beta_n} x)^2 + (\operatorname{ber}' \sqrt{\beta_n} x)^2}{\beta_n (\operatorname{ber} \sqrt{\beta_n})^2 + (\operatorname{bei} \sqrt{\beta_n})^2} \\ \psi_n &= \frac{(\operatorname{ber} \sqrt{\beta_n} x)^2 + (\operatorname{bei} \sqrt{\beta_n} x)^2}{(\operatorname{ber} \sqrt{\beta_n})^2 + (\operatorname{bei} \sqrt{\beta_n})^2} \quad \left(\beta_n = \frac{4\pi\omega R_0^2 \sigma(T_n)}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Переходя в соотношении $F(T_{n+1}) = (1/2 n J_0)^2 (1 - \psi_n(0))$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим требуемое соотношение (2.2). Для нахождения последующих приближений необходимо решить систему интегральных уравнений, состоящую из первых двух

уравнений системы (2.1). Ее можно привести к виду:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= 1 + \int_0^x \varphi^{(n)}(v) K(x, v) dv, & \varphi^{(n)}(x) &= 2 \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) \psi^{(n)}(\xi) d\xi \\ \psi^{(n)}(x) &= \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x^{*(n-1)})}, & K(x, v) &= 2 \int_v^x \left(\int_\tau^x \frac{\pi \omega R_0^2}{c^2} \sigma[T^{(n-1)}] \frac{d\xi}{\xi}\right)^2 d\tau\end{aligned}\quad (2.7)$$

Как показали численные расчеты, с точностью не хуже 15% решение системы уравнений (27) можно заменить приближенным выражением:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(x) &= \frac{(\text{ber } \sqrt{\beta_n x})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_n x})^2}{(\text{ber } \sqrt{\beta_n x^{*(n-1)}})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_n x^{*(n-1)}})^2} \\ \varphi^{(n)}(x) &= \frac{4}{\beta_n} \frac{(\text{bei}' \sqrt{\beta_n x})^2 + (\text{ber}' \sqrt{\beta_n x})^2}{(\text{ber } \sqrt{\beta_n x^{*(n-1)}})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_n x^{*(n-1)}})^2}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Практически оказывается, что для получения решения с точностью не меньшей, чем точность исходных данных по теплопроводности и электропроводности, достаточно двух приближений.

Первое приближение решения имеет вид:

$$\begin{aligned}\int_{T^*}^{T^{(1)}(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT &= \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{(\text{ber } \sqrt{\beta_1 x})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_1 x})^2}{(\text{ber } \sqrt{\beta_1})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_1})^2}\right) \\ \int_{T^{(1)}(1)}^{T^*} \lambda(T) dT &= \frac{\alpha_1 R_0}{2} [T^{(1)}(1) - T_0] \ln \frac{1}{x^{*(1)}} \\ \beta_1 \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \int_0^1 \frac{\sigma[T^{(1)}(x)]}{\sigma^2[T^{(1)}(0)]} \frac{(\text{bei}' \sqrt{\beta_1 x})^2 + (\text{ber}' \sqrt{\beta_1 x})^2}{(\text{bei } \sqrt{\beta_1})^2 + (\text{ber } \sqrt{\beta_1})^2} dx &= \alpha_1 R_0 [T^{(1)}(1) - T_0]\end{aligned}\quad (2.9)$$

Второе приближение:

$$\begin{aligned}\int_{T^*}^{T^{(2)}(x)} \lambda(T) \sigma(T) dT &= \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{(\text{ber } \sqrt{\beta_2 x})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_2 x})^2}{(\text{ber } \sqrt{\beta_2 x^{*(1)}})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_2 x^{*(1)}})^2}\right) \\ \int_{T^{(2)}(1)}^{T^*} \lambda(T) dT &= \frac{\alpha_1 R_0}{2} [T^{(2)}(1) - T_0] \ln \frac{1}{x^{*(2)}} \\ \beta_2 \left(\frac{nJ_0}{2}\right)^2 \int_0^1 \frac{\sigma[T^{(2)}(x)]}{\sigma^2[T^{(2)}(0)]} \frac{(\text{bei}' \sqrt{\beta_2 x})^2 + (\text{ber}' \sqrt{\beta_2 x})^2}{(\text{ber } \sqrt{\beta_2 x^{*(1)}})^2 + (\text{bei } \sqrt{\beta_2 x^{*(1)}})^2} dx &= \alpha_1 R_0 [T^{(2)}(1) - T_0]\end{aligned}\quad (2.10)$$

Эта система уравнений решалась численными методами.

3. Расчет параметров разряда и его сравнение с экспериментом. Исходные данные для расчета взяты из экспериментальных работ [2,4], а именно: разряд в аргоне при давлении 1 атм, индуцируемый в замкнутой колбе (без протока газа) радиуса $R_0 = 3.75$ см и толщиной кварцевой стенки $\delta = 0.2$ см. Частота генератора 12 МГц. В указанных экспериментальных работах исследовался также разряд в ксеноне, но в настоящее время он не может быть рассчитан из-за отсутствия полных и надежных данных о температурной зависимости коэффициента теплопроводности ксенона.

Для проведения расчета следует вычислить интегралы

$$J_1 = \int_{T^*}^{T^*} \lambda_1(T) dT \quad \text{при } T \leq 1.5 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K} \quad (3.1)$$

$$J_2 = \int_{T^*}^T \lambda_1(T) \sigma(T) dT \quad \text{при } T > T^* \quad (3.2)$$

где в качестве граничной температуры выбрано значение $T^* = 4500^\circ \text{K}$.

Оценки показывают, что при небольших степенях ионизации можно пренебречь теплопроводностью, связанной с процессами диффузии, по сравнению с кондуктивной теплопроводностью. Поэтому в дальнейшем вместо суммарного коэффициента теплопроводности $\lambda_1(T)$ будем пользоваться коэффициентом кондуктивной теплопроводности $\lambda(T)$. Данные о его значениях для температур до 1500°K содержатся в работах [5, 6], а для температур от $2 \cdot 10^3$ до $30 \cdot 10^3\text{K}$ — в работе [7].

Интегралы J_1 и J_2 численно рассчитывались по формуле Симпсона с шагом $\Delta T = 100^\circ$ для J_1 и $\Delta T = 500^\circ$ для J_2 . Электропроводность рассчитывалась в соответствии с работой [8].

Для последующего сравнения расчета с экспериментом надо связать число ампервитков nJ_0 , входящее в исходные уравнения, с значением мощности, выводимой тепловым потоком из разряда. Мощность, выводимая из разряда в расчете на единицу длины, равна:

$$W = -2\pi R_0 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 2\pi R_0 \alpha_1 [T(1) - T_0] \quad (3.3)$$

Искомую связь мощности с ампервитками получаем из третьего уравнения (2.10) с учетом (3.3):

$$W = \frac{2\pi\beta}{\sigma[T^{(2)}(0)]} \left(\frac{nJ_0}{2} \right)^2 \int_0^{x^*(1)} \frac{\sigma[T^{(2)}(x)]}{\sigma[T^{(2)}(0)]} \frac{(\text{ber}' \sqrt{\beta x})^2 + (\text{bei}' \sqrt{\beta x})^2}{(\text{ber} \sqrt{\beta x^{*(1)}})^2 + (\text{bei} \sqrt{\beta x^{*(1)}})^2} dx \quad (3.4)$$

При помощи второго уравнения (2.10) определяется связь мощности, выводимой с единицы поверхности стенки, и граничной координаты x^* (или относительного граничного радиуса $r^*/R_0 = \sqrt{x^*}$) с температурой внутренней поверхности колбы $T(1)$.

Таблица 1

$T, ^\circ\text{K}$	$\lambda_0 \cdot 10^{-5}$ эрг см сек. гр	W кВт см	$\frac{r^*}{R_0}$
370	1.44	0.12	0.854
470	1.52	0.30	0.941
570	1.59	0.52	0.963
700	1.68	0.81	0.977
800	1.73	1.05	0.982
900	1.78	1.29	0.981
1000	1.82	1.54	0.988
1100	1.86	1.80	0.991
1200	1.90	2.06	0.992

Результаты соответствующего расчета в предположении существования налаженного теплообмена приведены в табл. 1. Теплообмен считается налаженным при выполнении неравенства $\alpha\delta/\lambda_0 \gg 1$, где α — коэффициент теплоотдачи от стенки к охлаждающей среде, λ_0 — среднее значение коэффициента теплопроводности материала стенки в интервале температур на наружной и внутренней поверхности.

Приведенные в табл. 1 результаты позволяют оценить предельные значения снимаемой с единицы поверхности стенки мощности при идеальном охлаждении. Критерием допустимой нагрузки будем считать такую температуру внутренней поверхности стенки, при которой возникает опасность ее размягчения. Для кварцевого стекла это примерно 1200°K , при этом $W \approx 90 \text{ вт/см}^2$.

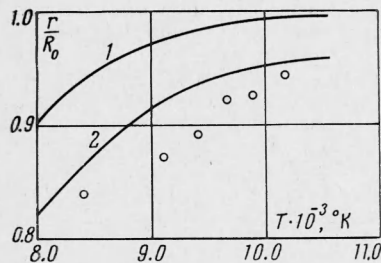
Основные результаты решения систем уравнений (2.9) и (2.10) для рассматриваемого случая даны в табл. 2. В первом столбце таблицы указаны значения максимальной температуры в разряде, во втором — число ампервитков индуктора на см длины, в третьем — мощность теплового потока, выносимого с единицы поверхности, в четвертом — относительный диаметр электропроводящей области с граничной температурой 4500°K .

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов, относящихся к границе разряда, требует четкого определения условий, при которых такое сравнение будет корректным. Действительно, при проведении теоретических расчетов предполагалось, что разряд занимает область, обладающую заметной электропроводностью. В качестве границы разряда условно принималась изотерма, соответствующая 4500°K . В работе [2] при помощи фотографической методики изучалась область свечения, а не электропроводности разряда, в качестве ее границы выбиралась окружность, радиус которой соответствовал предполагаемому спаду интенсивности излучения в 10 раз по сравнению с максимальным значением. В дальнейшем, после снятия характеристической кривой применявшейся пленки, было установлено, что спаду интенсивности в

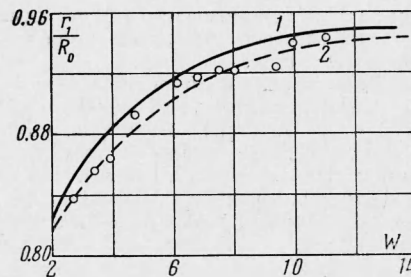
Таблица 2

$T(0) \cdot 10^{-3}, ^\circ\text{K}$	nJ_0 а. вит см	W кВт см	$\frac{r^*}{R_0}$	$\frac{r_1}{R_0}$
8.0	13.3	0.21	0.907	0.820
8.5	17.7	0.36	0.948	0.870
9.0	22.6	0.54	0.964	0.906
10.0	33.0	1.06	0.983	0.940
10.5	33.2	1.43	0.987	0.945

10 раз, определенному по кривой почернения негатива, соответствует реальный спад интенсивности излучения примерно в 2 раза. Таким образом, граница разряда в эксперименте выбиралась по условию $I = 0,5 I(0)$. Чтобы сопоставить экспериментальные и расчетные результаты для каждого возможного значения максимальной температуры был рассчитан относительный радиус границы световой области r_1 , отвечающий написанному выше условию. Результаты расчета помещены в пятом столбце табл. 2.

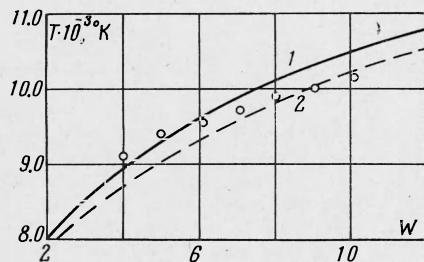


Фиг. 2

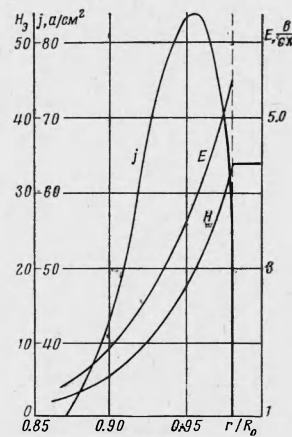


Фиг. 3

Далее следует учесть, что рассмотренный теорией одномерный случай сопоставляется с экспериментом в условиях, когда отношение диаметра разряда к высоте индуктора порядка единицы, т. е. когда процессы теплоотвода и передачи энергии от генератора к плазме носят явно двумерный характер. Поправка на двумерность реальной задачи для процесса передачи энергии от генератора в плазму производится введением в решение одномерной задачи эффективного числа витков индуктора n^* . Его величина определяется так, чтобы $H = 4\pi n^* J_0 / c$ совпало с напряженностью магнитного поля, создаваемого индуктором в отсутствие плазмы в точке $r = R_0, z = 0$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Учет двумерного характера теплоотвода производится введением эффективной длины зоны l^* , через которую выводится тепло. Теоретическое определение l^* представляет значительные вычислительные трудности, чтобы их избежать эта величина оценивалась из экспериментальных данных. По результатам работ [2,4], путем исключения параметра «мощность разряда», получаем зависимость относительного радиуса светящейся зоны от максимальной температуры разряда. Эта же зависимость рассчитывалась. Сравнение экспериментальных и расчетных данных, приведенное на фиг. 2, показывает их вполне удовлетворительное согласие. Здесь 1 — расчет по границе $T = 4500^\circ \text{K}$, 2 — расчет по границе области свечения, точками показаны экспериментальные данные. Отсюда следует, что при одинаковых температурах экспериментальные и расчетные значения мощности будут находиться в согласии друг с другом. Полагая при данной максимальной температуре равенство расчетных и экспериментальных значений полной энергии, вводимой в плазму, определяем эффективный размер зоны вывода этой энергии. При этом из экспериментального значения мощности следует вычесть излучательные потери, оцениваемые для аргона при давлении 1 атм в 15–17% от общей мощности [9]. В рассматриваемом нами случае $l^* = 9.5 \text{ см}$.

С помощью полученного значения l^* определялись зависимости относительного радиуса плазмы и максимальной температуры от мощности в разряде W . Сравнение расчетных и экспериментальных результатов проводится соответственно на фиг. 3 и 4. На обеих фигурах кривые 1 строились без учета излучения, а кривые 2 — с его учетом. Точками показаны экспериментальные данные. Количественное согласие расчета и эксперимента вполне удовлетворительное. Некоторое качественное расхождение в ходе экспериментальной и расчетной зависимости на фиг. 4 связано в области небольших мощностей с заметным уменьшением радиуса разряда, что ведет к появлению неустойчивости величины l^* . С ростом мощности сказывается то обстоятельство, что при расчете использовались приближенные уравнения вместо исходных интегральных. Как указывалось выше, занижение приближения по сравнению с точным решением не превышает 15%.

Оценка напряженностей электрического и магнитного полей и их распределение по радиусу, а также распределение плотности тока в разряде для случая, когда $T(0) = 9.5 \cdot 10^3$ K, приведены на фиг. 5. Здесь вертикальный пунктир — граница проводящей области. По кривой плотности тока оценивалась глубина скин-слоя, равная в данном случае примерно 4 мм.

Для приближенного расчета напряженности электрического поля на границе плазмы в случае, когда $\beta \gg 1$, теория дает следующее соотношение:

$$E(x^*) = \frac{nJ_0}{R_0 \sigma [T(0)]} V\beta \quad (3.6)$$

В случае, когда измеряется значение nJ_0 и $\beta \gg 1$, можно непосредственно определять максимальную температуру разряда. Приводим значения максимальной температуры разряда, рассчитанные для некоторых значений ампервитков индуктора:

$$\begin{array}{ccccccc} nJ_0 = 15. & 20. & 25. & 30. & 35. & 40 \text{ а.вит/см} \\ T(0) \cdot 10^{-3} = 8.2, & 8.8, & 9.3, & 9.8, & 10.2 & 10.5^\circ \text{ K} \end{array}$$

Если высота индуктора соизмерима с диаметром разряда следует пользоваться эффективным значением числа витков индуктора n^* .

Авторы благодарны Широковой И. П. за помощь при проведении обработки экспериментальных результатов и Сергеевой Л. С. за проведение вычислительных работ.

Поступила 10 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Eckert H. U. Diffusion Theory of the Electrodes Ring Discharge. J. Appl. Phys. 1962, vol. 33, No. 9.
2. Ровинский Р. Е., Белоусова Л. Е., Груздев В. А. Геометрия безэлектродного разряда, индуцируемого в инертных газах. Теплофиз. высоких температур, 1966, т. 4, № 3.
3. Сошников В. Н., Трехов Е. С. К теории высокочастотного вихревого разряда высокого давления, ч. 1. Теплофиз. высоких температур, 1966, т. 4, № 2.
4. Ровинский Р. Е., Груздев В. А., Гутенмахер Т. М., Соболев А. П. Определение температуры в стационарном высокочастотном индукционном разряде. Теплофиз. высоких температур, № 2.
5. Nuttall P. Z. Tables of heat properties of gases. U. S. Depart. Nat. Bur. Standards. Washington D. C., 1955.
6. Hilsenrath J., Tables of heat properties of gases. U. S. Depart. Nat. Bur. Standards. Washington D. C., 1951.
7. Кулик П. П., Паневин И. Г., Хвасюк В. И. Теоретический расчет вязкости, теплопроводности и критерия Прандтля аргона при наличии ионизации. Теплофиз. высоких температур, 1963, т. 1, № 1.
8. Sherman A. Calculation of electrical conductivity of ionized gases. ARS — Journal, 1960, vol. 30, No. 6.
9. Ровинский Р. Е., Груздев В. А., Широкова И. П. Об энергетическом балансе стационарного индуцированного разряда. Теплофиз. высоких температур, 1966, т. 4, № 1.