

УДК 532.526.2+536.33

Нестационарный пограничный слой на плоскости при течении наножидкости с переменными свойствами в присутствии теплового излучения

Митику Даба, П. Деварадж

Университет Анны, Ченнай, Индия

E-mail: mitbru2007@yahoo.com, devaraj@annauniv.edu

Численно исследуется нестационарный пограничный слой при течении наножидкости с переменными свойствами по протяженной поверхности в присутствии теплового излучения. С помощью набора соответствующих преобразований подобия определяющие дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются блочным методом Келлера. В настоящем исследовании было введено два новых параметра: переменный коэффициент термофоретической диффузии ε и переменный коэффициент Броуновской диффузии β . Влияние этих параметров на температуру, объемную долю наночастиц и скорости поверхностного теплообмена представлено графически и кратко охарактеризовано. Для проверки рассматриваемого метода проведено сравнение полученных данных с некоторыми имеющимися в литературе результатами, которое показало их удовлетворительное согласование.

Ключевые слова: нестационарный пограничный слой, наножидкость, броуновское движение, блочный метод Келлера, протяженная поверхность, термофорез, тепловое излучение.

Введение

Суспензии наноразмерных металлических или неметаллических частиц, основные размеры которых составляют менее 100 нм, называют наножидкостями. В литературе упоминалось, что по сравнению с базовыми жидкостями, такими как масло или вода, наножидкости обладают улучшенными теплофизическими свойствами, к которым относятся температуропроводность, теплопроводность и вязкость, а также коэффициенты конвективного теплообмена. Основная причина использования наночастиц заключается в улучшении тепловых свойств базовой жидкости. Оксиды алюминия (Al_2O_3), титана (TiO_2), кремния (SiO), меди (CuO) и химически устойчивых металлов, таких как медь и золото, являются обычными материалами для наночастиц. Они могут широко использоваться в технических и медицинских приложениях (см. [1]). Этот новый тип жидкостей, получивший название «наножидкости», был впервые получен в 1995 году [2].

В работе [3] изучались теплообменные характеристики стационарного пограничного слоя на линейно протяженной поверхности с учетом переменной теплопроводности. С помощью стационарного метода плоского слоя авторы [4] экспериментально исследовали эффективный коэффициент теплопроводности смесей жидкостей и наноразмерных частиц и показали, что теплопроводность смесей жидкости из наночастиц выше, чем

у базовой жидкости. Течение стационарного ламинарного пограничного слоя наножидкости по нагретой вертикальной плоской поверхности изучалось численно в работе [5]. Анализ течения стационарного конвективного пограничного слоя наножидкости по вертикальной проницаемой поверхности проводился в [6], а проблема течения ламинарного пограничного слоя наножидкости — воды с медью и окисью алюминия — по плоской пластине исследовалась в работе [7]. Авторами [8] рассматривалось влияние излучения на магнитно-гидродинамическое (МГД) течение стационарного конвективного пограничного слоя наножидкости по протяженной поверхности экспоненциального вида. В работе [9] рассматривалась естественная конвекция на изотермической вертикальной пластине в пористой среде, насыщенной наножидкостью. В работе [10] изучались характеристики потока и теплообмена вязкой наножидкости по нелинейно протяженной поверхности в присутствии теплового излучения. Авторами [11] исследовались теплообменные характеристики стационарного двумерного пограничного слоя вдоль движущейся плоской проницаемой пластины в наножидкости при всасывании или инъекции. Было обнаружено, что существует бифуркация решения, когда пластина и свободный поток движутся в противоположных направлениях. Автор работы [12] дал объяснение аномальному усилению конвективного теплообмена, наблюдаемого в наножидкостях, обнаружив, что броуновская диффузия и термофорез представляют собой самые важные механизмы скольжения наночастиц в базовой жидкости. В работе [13] было проанализировано влияние теплового излучения и конвективных граничных условий на тепло-массообмен в потоке наножидкости по плоской проницаемой пластине. Проблема ламинарного течения жидкости в результате растяжения плоской поверхности в наножидкости изучалась в работе [14]. Авторы [15] расширили рамки исследования, изучив свободный конвективный поток наножидкости по вертикальной пластине с равномерным поверхностным тепловым потоком, а авторы [16] проанализировали пограничный слой наножидкости по протяженной поверхности с конвективными граничными условиями. В работе [17] было проведено аналитическое исследование стационарного пограничного слоя наножидкости по экспоненциально протяженной поверхности с помощью гомотопического метода, а в [18] численно изучались проблемы МГД-течения пограничного слоя и теплообмена наножидкости вдоль проницаемой протяженной поверхности с учетом скорости, тепловых и концентрационных граничных условий скольжения, также было проанализировано влияние различных явлений, таких как броуновское движение, термофорез и т.д. на скорость, температуру и концентрацию. В работе [19] исследовалось течение двумерных стационарных несжимаемых наножидкостей Олдройда-Б (Oldroyd-B) по протяженной поверхности. Проблеме стационарного пограничного слоя Марангони и теплопередачи в наножидкостях с всасыванием и инъекцией была посвящена работа [20], а в работе [21] исследовалось течение в пограничном слое и теплопередача в наножидкостях на вертикальной пластине с конвективными поверхностными граничными условиями. Авторами [22] изучалось усиление конвективного теплообмена за счет наножидкостей, и было показано, что наножидкости значительно улучшают теплопередачу обычных теплоносителей, таких как масло или вода, посредством задерживания наночастиц в этих базовых жидкостях.

Неавтономные решения для задачи нестационарного смешанного конвективного течения по перемещающейся вертикальной пластине получены в работе [23] с учетом влияния вязкой диссипации. Было показано, что зависящая от времени скорость свободного потока будет влиять на поверхностное трение и коэффициенты теплообмена. Кроме того, в [24] была проанализирована задача нестационарного смешанного конвективного течения по вертикальной пластине с учетом поперечного магнитного поля. Задача решалась аналитически и численно. Течение нестационарного пограничного слоя по протяженной поверхности из-за внезапно приложенного и выключенного магнитного поля рассматривалась авторами [25] и была решена с использованием неявного метода

конечных разностей. Анализ течения нестационарного смешанного конвективного пограничного слоя по протяженной вертикальной поверхности проводился в работе [26]. В [27] рассматривалась та же задача, но с применением наножидкостей в области течения. Авторы [28] расширили рамки работы [26] путем учета переменной теплопроводности в присутствии теплового излучения, а позднее в работе [29] изучалась подобная задача с переменной вязкостью и вязкой диссипацией.

Как видно из вышеизложенного, проблемам пограничного слоя на различных поверхностях посвящено много работ. В большинстве исследований свойства жидкостей предполагаются неизменными, исключением являются работы [3] и [28], где учитывалась переменная теплопроводность, и [29], где учитывалась переменная вязкость в области течения. Но в реальности большинство свойств жидкостей могут варьироваться, особенно с изменением температуры или концентрации добавок. Целью настоящей работы является изучение пограничного слоя наножидкости на протяженной поверхности с учетом переменных свойств жидкости в области потока. В предлагаемом исследовании термофоретический коэффициент диффузии D_T и коэффициент броуновской диффузии D_B изменяются как функция температуры и объемной доли наночастиц соответственно. Уравнения пограничного слоя, определяемые дифференциальными уравнениями в частных производных, сначала преобразуются в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем решаются численно с помощью блочного метода Келлера. Насколько известно авторам, тема исследования является новой и ранее в литературе не освещалась.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим течение нестационарного двумерного пограничного слоя наножидкости по протяженной поверхности со скоростью U_w в декартовой системе координат, в которой ось x направлена вдоль поверхности, а ось y проходит в направлении, перпендикулярном протяженной поверхности. Полагается, что поток ограничен ($y > 0$) и для времени $t < 0$ потоки жидкости и тепла стационарны. Нестационарность потока начинается в момент $t = 0$. Для поддержания фиксированного положения протяженной поверхности две равные и противоположные силы спонтанно прилагаются вдоль оси x . Свойства жидкостей полагаются неизменными за исключением термофоретического коэффициента и коэффициента броуновской диффузии, которые являются линейной функцией температуры и концентрации соответственно. Уравнения пограничного слоя в приближении Буссинеска и для нестационарных условий потока определяется по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \left\{ D_B(C) \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_T(T)}{T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{1}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial q_r}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B(C) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T(T)}{T_\infty} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

с граничными условиями: $u = U_w$, $v = 0$, $T = T_w$, $C = C_w$ при $y = 0$ и $u \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_\infty$, $C \rightarrow C_\infty$ при $y \rightarrow \infty$, где u — составляющая скорости в направлении x , а v — в направлении y . Термофоретический коэффициент $D_T(T)$ и коэффициент броуновской диффузии $D_B(C)$

являются переменными, которые, как предполагается, будут изменяться линейно с увеличением температуры и объемной доли наночастиц соответственно. Определим их как $D_T(T) = D_{T_\infty} (1 + (\varepsilon/\Delta T)(T - T_\infty))$ и $D_B(C) = D_{B_\infty} (1 + (\beta/\Delta C)(C - C_\infty))$, где $\Delta T = (T_w - T_\infty)$, $\Delta C = (C_w - C_\infty)$, T_w — температура поверхности, C_w — объемная доля наночастиц поверхности, ε — переменный термофоретический коэффициент диффузии, β — коэффициент броуновской диффузии, D_{T_∞} и D_{B_∞} — термофоретический коэффициент и коэффициент броуновской диффузии наножидкости вдали от поверхности соответственно. В настоящем исследовании скорость протяженной поверхности определялась как $U_w(x, t) = ax/(1 - ct)$, температура — $T_w(x, t) = T_\infty + bx/(1 - ct)^2$, и объемная доля наночастиц наножидкости — $C_w(x, t) = C_\infty + mx/(1 - ct)^2$, где a , c и m — константы, b также является константой, имеющей безразмерную температуру/длину.

Выполнив аппроксимацию Росселанда, как показано в работе [30], получим выражение для радиационного теплового потока в следующем виде:

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \cdot \frac{\partial T^4}{\partial y}. \quad (5)$$

Предположим, что разница температур внутри области потока, а именно член T^4 , может быть выражен линейной функцией температуры. Разлагая T^4 в ряд Тейлора около T_∞ и пренебрегая членами более высокого порядка, получаем:

$$T^4 \cong 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \quad (6)$$

Поэтому с учетом уравнений (5) и (6) уравнение (4) сводится к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(1 + Nr) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \left\{ D_B(C) \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_T(T)}{T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{1}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial q_r}{\partial y}, \quad (7)$$

где $\tau = (\rho c)_p / (\rho c)_f$ и $Nr = 16\sigma^* T_\infty / (3kk^*)$ — параметры теплового излучения, σ^* и k^* — постоянная Стефана–Больцмана и средний коэффициент поглощения соответственно. Выполним следующие замены для преобразования дифференциальных уравнений в частных производных (2)–(4) в систему связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\eta = y \left(\frac{a}{v(1 - ct)} \right)^{1/2}, \quad \psi(x, y, t) = \left(\frac{va}{(1 - ct)} \right)^{1/2} x f(\eta), \quad G(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad H(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}.$$

Функция тока $\psi(x, y, t)$ определяется как $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$. Уравнение непрерывности удовлетворяется при переменной подобия η и безразмерной функции $f(\eta)$, а уравнения (2), (7) и (4) соответственно сводятся к следующим обычным дифференциальным уравнениям:

$$f''' + ff'' - f'^2 - M(f' + 1/2 \eta f'') = 0, \quad (8)$$

$$(1 + Nr)G'' + \text{Pr} Nb(1 + \beta H)H'G' + \text{Pr} Nt(1 + \varepsilon G)G'^2 + \text{Pr} \begin{vmatrix} f & G \\ f' & G' \end{vmatrix} - M \text{Pr} \left(2G + \frac{1}{2} \eta G' \right) = 0, \quad (9)$$

$$(1 + \beta H)H'' + \text{Le} \begin{vmatrix} f & H \\ f' & H' \end{vmatrix} - M \text{Le} \left(2H + \frac{1}{2} \eta H' \right) + \frac{Nt}{Nb} (1 + \varepsilon G)G'' = 0, \quad (10)$$

где штрих обозначает дифференцирование по η , $M = c/a$ — нестационарный параметр, знак $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$ обозначает детерминант, а основные параметры задаются как

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad \text{Le} = \frac{\nu}{D_{B_x}}, \quad \text{Nb} = \frac{(\rho c)_p D_{B_x} (C_w - C_\infty)}{(\rho c)_f \nu}, \quad \text{Nt} = \frac{(\rho c)_p D_{T_x} (T_w - T_\infty)}{(\rho c)_f T_\infty \nu}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad G(0) = 1, \quad H(0) = 1, \quad f'(\infty) = 0, \quad H(\infty) = 0. \quad (11)$$

Физические величины, представляющие интерес с практической точки зрения, — это локальное число Нуссельта Nu_x и локальное число Шервуда Sh_x , которые выражаются следующим образом:

$$\text{Nu}_x = xq_w / (k(T_w - T_\infty)), \quad (12)$$

$$\text{Sh}_x = xq_m / (D_B(C_w - C_\infty)), \quad (13)$$

где тепловой поток у стенки q_w и массовый поток q_m имеют вид:

$$q_w = -k(\partial T / \partial y)|_{y=0}, \quad q_m = -D_B(\partial C / \partial y)|_{y=0}.$$

Используя переменную подобия, преобразуем соответственно уравнения (12) и (13):

$$\text{Nu}_x / \sqrt{\text{Re}_x} = -G'(0), \quad \text{Sh}_x / \sqrt{\text{Re}_x} = -H'(0), \quad \text{где } \text{Re}_x = U_w x / \nu \text{ — число Рейнольдса.}$$

2. Результаты и обсуждение

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (8), (9) и (10) с граничными условиями (11) решались численно с помощью блочного метода Келлера. Вычисления проводились для различных значений числа Прандтля Pr и параметров броуновского движения Nb , термофореза Nt , излучения Nr , нестационарного параметра M , переменного термофоретического коэффициента диффузии ε и переменного коэффициента броуновской диффузии β . Влияние этих параметров на безразмерную температуру и объемную долю наночастиц представлено на рис. 1–10, а на интенсивность поверхностного теплообмена — на рис. 11а–12б. Сравнение интенсивности теплообмена на поверхности с данными предыдущих работ приведено в таблице. Настоящие вычисления для данного численного исследования были проведены для различных значений ε ($-1 \leq \varepsilon \leq 2$), β ($-1 \leq \beta \leq 2$), Pr ($0,7 \leq \text{Pr} \leq 15$), Le ($1 \leq \text{Le} \leq 15$), Nr ($0 \leq \text{Nr} \leq 2$), Nt ($-0,4 \leq \text{Nt} \leq 0,5$), Nb ($0,1 \leq \text{Nb} \leq 0,7$), и M ($0 \leq M \leq 2$).

Рисунок 1 поясняет влияние нестационарного параметра M на профили скорости и температуры наножидкости. Видно, что с увеличением нестационарного параметра M профили скорости и температуры уменьшаются. Кроме того, следует отметить, что пограничный слой скорости толще, чем тепловой пограничный слой. На рис. 2 и 3 соответственно показано влияние переменного

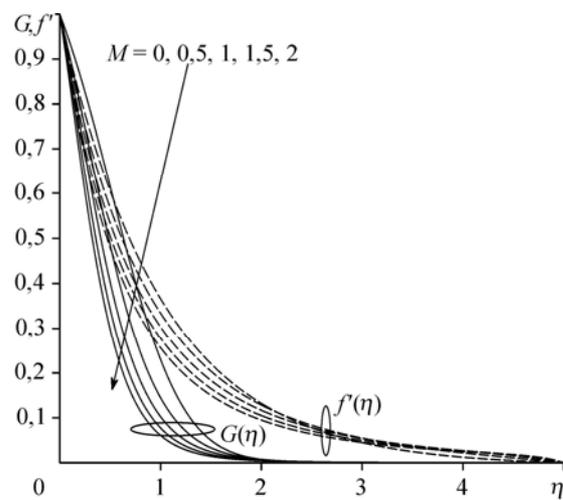


Рис. 1. Влияние параметра M на скорость и температуру для $\text{Le} = 5$, $\text{Pr} = 7$, $\text{Nr} = \text{Nt} = \text{Nb} = 0,5$ и $\varepsilon = \beta = 0,3$.

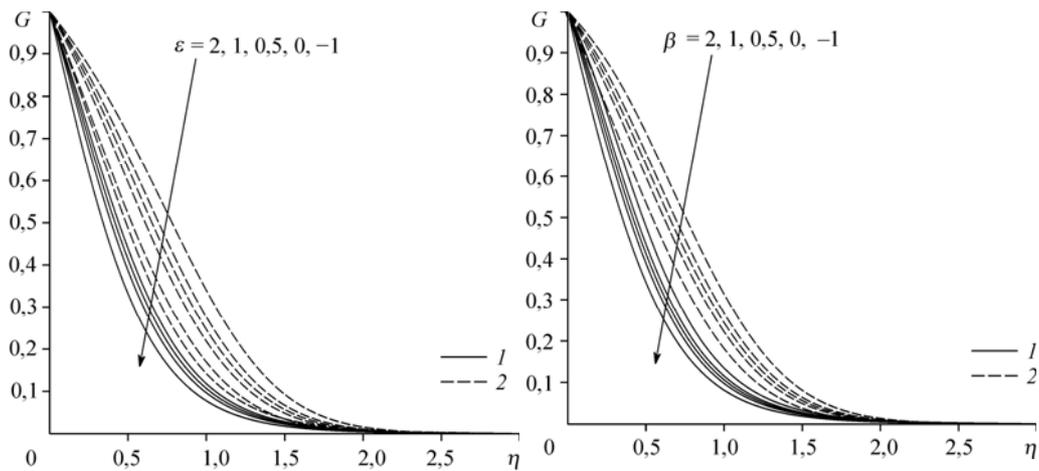


Рис. 2. Влияние параметра ε на профиль температуры для $\beta = 0,3$, $Le = 5$, $Pr = 7$, $Nr = Nt = Nb = 0,5$ при $M = 1$ (1), (2).

Рис. 3. Влияние параметра β на профиль температуры для $\varepsilon = 0,3$, $Le = 5$, $Pr = 7$, $Nr = Nt = Nb = 0,5$ при $M = 1$ (1), (2).

термофоретического коэффициента диффузии ε и переменного коэффициента броуновской диффузии β на температурный профиль наножидкости для стационарного ($M = 0$) и нестационарного ($M = 1$) случаев. Как видно из рис. 2, увеличение ε приводит к увеличению температуры в обоих состояниях. Также заметно, что температура жидкости немного выше в стационарном состоянии по сравнению с нестационарным. Такой же вывод можно сделать о влиянии переменного коэффициента броуновской диффузии на температурный профиль наножидкости (рис. 3). Влияние параметров ε и β на объемную долю наночастиц соответственно показано на рис. 4 и 5. На рис. 4 можно видеть, что в обоих случаях при увеличении параметра ε объемная доля наночастиц также увеличивается, причем объемная доля наночастиц более высока в стационарном случае, чем в нестационарном. Это может происходить из-за того, что увеличение M снижает толщину пограничного слоя скорости и, следовательно, можно сказать, что скорость наножидкости уменьшается, как описано выше.

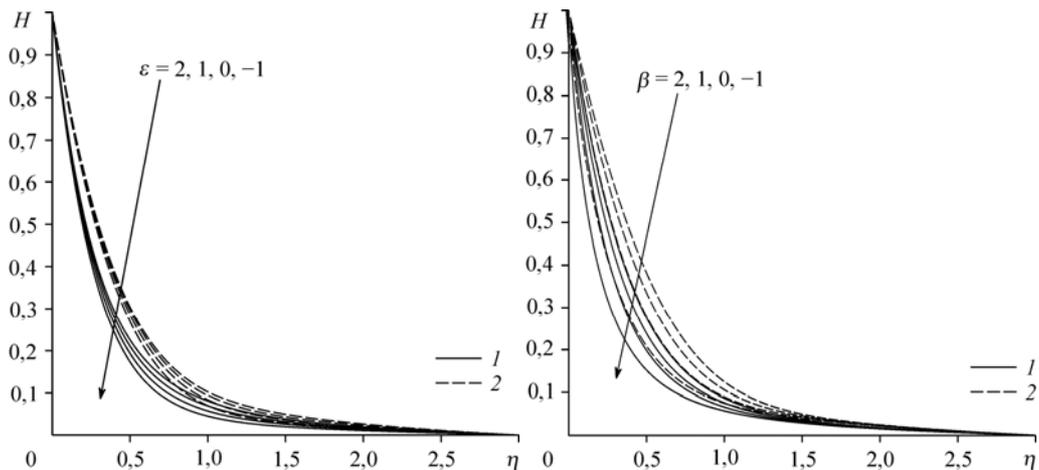


Рис. 4. Влияние параметра ε на объемную долю наночастиц для $\beta = 0,3$, $Le = 5$, $Pr = 0,7$, $Nr = Nt = Nb = 0,5$ при $M = 1$ (1), (2).

Рис. 5. Влияние параметра β на объемную долю наночастиц для $\varepsilon = 1$, $Le = 5$, $Pr = 0,7$, $Nr = Nt = Nb = 0,5$ при $M = 1$ (1), (2).

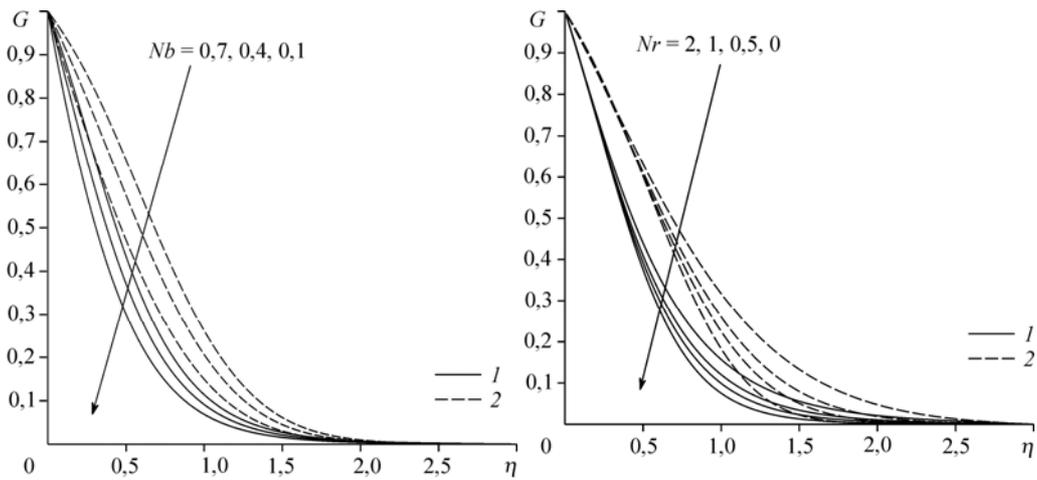


Рис. 6. Влияние параметра Nb на профиль температуры для $Le = 5$, $Pr = 7$, $Nr = Nt = 0,5$ и $\varepsilon = \beta = 0,2$ при $M = 1$ (1), 0 (2).

Рис. 7. Влияние параметра Nr на профиль температуры для $Le = 5$, $Pr = 7$, $Nr = Nb = 0,5$ и $\varepsilon = \beta = 0,2$ при $M = 1$ (1), 0 (2).

Аналогично реализуется влияние переменного коэффициента броуновской диффузии β на объемную долю наночастиц (рис. 5). Нужно отметить, что его увеличение приведет к увеличению объемной доли наночастиц.

На рис. 6 изображен температурный профиль под влиянием параметра броуновского движения Nb в стационарном и нестационарном случаях. Видно, что с увеличением параметра броуновского движения Nb в обоих случаях увеличиваются и значения безразмерных температур, но при этом более высокая температура наблюдается в стационарном случае. Влияние параметра излучения на температуру показано на рис. 7. Замечено, что температура жидкости возрастает при увеличении параметра излучения Nr в обоих случаях. Это может происходить потому, что рост параметра излучения Nr наблюдается при снижении среднего коэффициента поглощения k^* , что приводит к увеличению дивергенции теплового потока излучения. Это увеличивает скорость переноса тепла в жидкость и, следовательно, вызывает рост температуры наножидкости. В наножидкости, как и в случае базовой жидкости в аналогичной ситуации, увеличение числа Прандтля приводит к уменьшению безразмерной температуры жидкости, а увеличение числа Льюиса — к снижению объемной доли наночастиц, что изображено на рис. 8 и 9 соответственно.

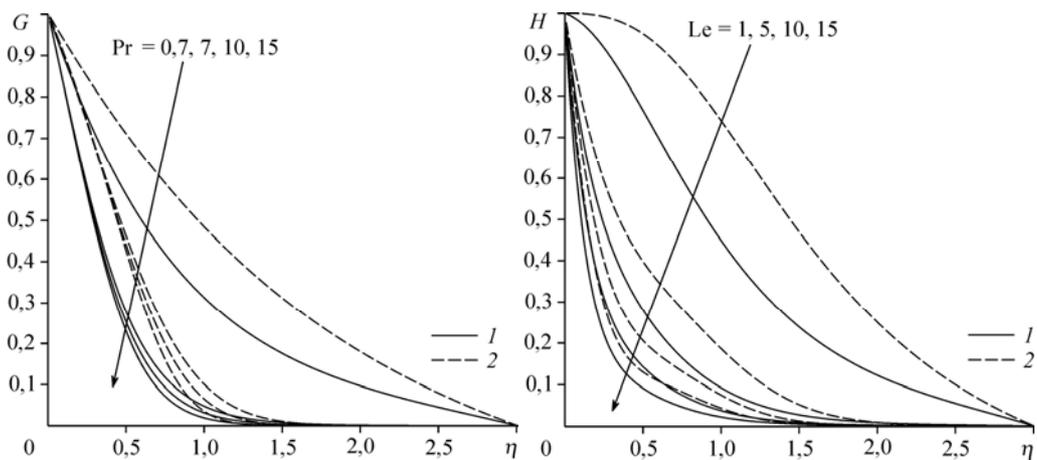


Рис. 8. Влияние числа Прандтля на профиль температуры для $Le = 5$, $Nr = 0,1$, $Nt = Nb = 0,3$ и $\varepsilon = \beta = 0,2$ при $M = 1$ (1), 0 (2).

Рис. 9. Влияние числа Льюиса на объемную долю наночастиц для $Pr = 7$, $Nr = 0,1$, $Nt = Nb = 0,3$ и $\varepsilon = \beta = 0,2$ при $M = 1$ (1), 0 (2).

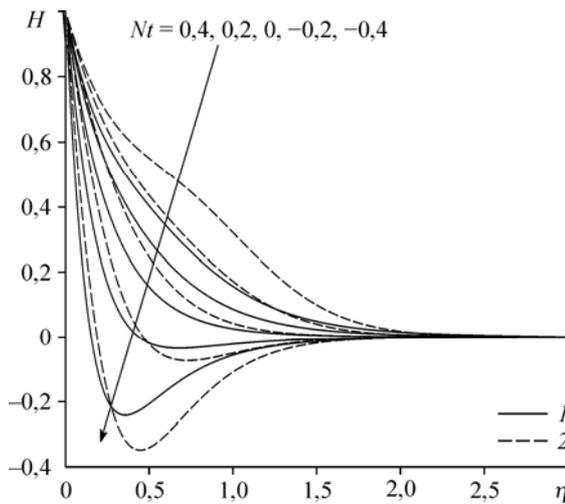


Рис. 10. Влияние параметра Nt на объемную долю наночастиц для $Pr = 7$, $Le = 5$, $Nb = \varepsilon = \beta = 0,2$, и $Nr = 0,1$ при $M = 1$ (1), 0 (2).

В связи с этим стационарное состояние приобретает большую температуру и объемную долю наночастиц, чем нестационарное. Рисунок 10 показывает влияние различных значений параметра термофореза Nt на концентрацию наночастиц. Видно, что увеличение параметра термофореза Nt повышает концентрацию наночастиц в стационарном и нестационарном случаях. Также видно, что для больших отрицательных значений параметра термофореза Nt концентрация частиц достигает минимальных значений у стенки и сразу приходит к нулю в области, удаленной от поверхности. Концентрация частиц больше в стационарном, чем в нестационарном случае для нулевого и положительных значений Nt , но для отрицательных значений Nt верно обратное.

Влияние термофоретического параметра Nt и параметра броуновского движения Nb на интенсивность поверхностного теплообмена с учетом и без учета теплового излучения показано на рис. 11a и 11b. Видно, что увеличение обоих параметров Nb и Nt приводит к уменьшению интенсивности поверхностного теплообмена. Отметим также, что интенсивность поверхностного теплообмена выше в нестационарном случае. Кроме того, на обоих фрагментах рисунка видно, что наличие теплового излучения уменьшает интенсивность поверхностного теплообмена в обоих случаях. Рисунки 12a, 12b также показывают влияние параметров на интенсивность поверхностного массообмена. На этих рисунках видно, что уменьшение параметра броуновского движения Nb и увеличение параметра термофореза Nt уменьшают интенсивность поверхностного массопереноса в стационарном и нестационарном случаях, но интенсивность поверхностного массопереноса оказывается выше в нестационарном случае. Однако в этом случае наличие теплового излучения увеличивает интенсивность поверхностного массообмена.

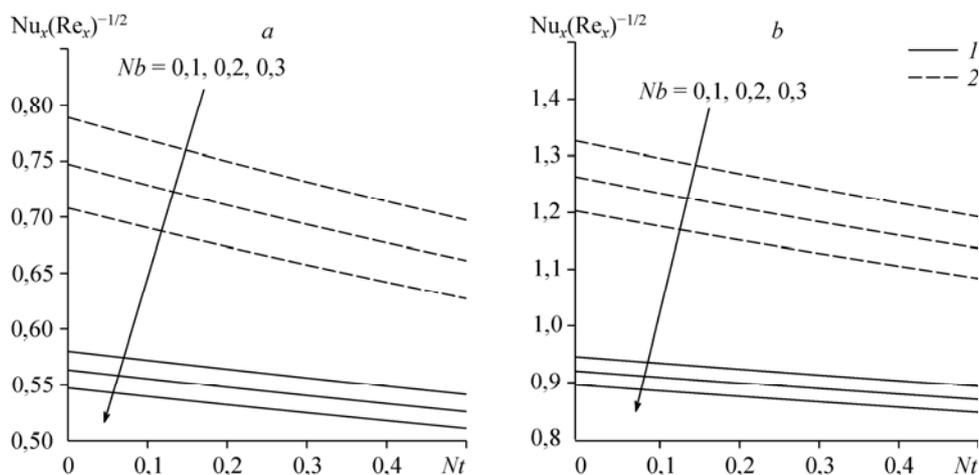


Рис. 11. Влияние Nb и Nt на скорость поверхностного теплопереноса для $Le = 10$, $Pr = 0,7$, $Nr = 1$ и $\varepsilon = \beta = 0,1$ с учетом (1) и без учета (2) теплового излучения при $M = 0$ (1), 1 (2).

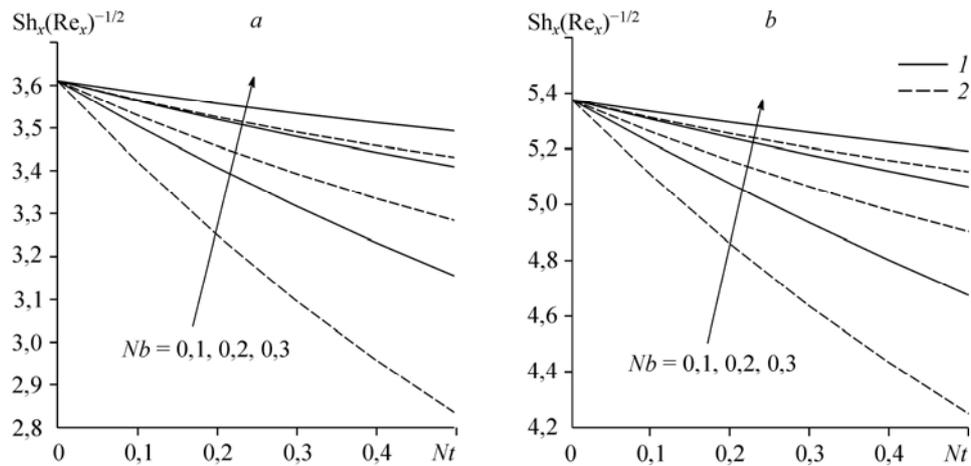


Рис. 12. Влияние Nb и Nt на скорость поверхностного теплопереноса для $Le = 10$, $Pr = 0,7$, $Nr = 1$ и $\varepsilon = \beta = 0,1$ с учетом (1) и без учета (2) теплового излучения при $M = 0$ (1), 1 (2).

Таблица

Сравнение данных настоящей работы для относительного числа Нуссельта $-G'(0)$ с результатами других публикаций для разных значений числа Прандтля Pr

Pr	Данные работы [31]	Данные работы [32]	Данные работы [26]	Данные работы [28]	Данные настоящей работы
0,72	0,8086	0,8058	0,8086	0,808636	0,808834
1,00	1,00	0,961	1,000	1,0000	1,000007
3,00	1,9237	1,9144	1,9237	1,923687	1,923685
10,00	3,7207	3,7006	3,7207	3,720788	3,720782
100,00	12,2940	—	12,2941	12,30039	12,300335
200,00	—	—	—	—	17,504892

Заключение

Исследована проблема нестационарного пограничного слоя наножидкости с переменными свойствами на протяженной поверхности в присутствии теплового излучения. Определяющие дифференциальные уравнения в частных производных превращаются с помощью преобразований подобия в обыкновенные дифференциальные уравнения, которые более подходят для численных расчетов. Преобразованные обыкновенные дифференциальные уравнения далее решаются численно с помощью блочного метода Келлера. В настоящей работе было проанализировано и обсуждалось влияние чисел Прандтля Pr и Льюиса Le , параметров броуновского движения Nb , термофореза Nt , излучения Nr и нестационарного параметра M , а также переменного термофоретического коэффициента диффузии ε и переменного коэффициента броуновской диффузии β на свойства жидкости.

Обобщим полученные результаты.

1. По мере увеличения параметра броуновского движения Nb или параметра излучения Nr повышается и температура наножидкости, при этом прочие параметры остаются неизменными.

2. Рост числа Прандтля приводит к уменьшению температуры наножидкости, а увеличение числа Льюиса — к уменьшению объемной доли наночастиц, как и в случае базовых жидкостей. Это может происходить в стационарном или нестационарном случаях.

3. Приращение нестационарного параметра M приводит к снижению скорости и температуры наночастиц.

4. Увеличение переменного термофоретического коэффициента диффузии ε и переменного параметра броуновской диффузии β приводит к увеличению температуры и объемной доли наночастиц.

5. Увеличение параметра броуновского движения Nb повышает температуру жидкости, а увеличение параметра термофореза Nt — объемную долю наночастиц.

6. Наличие теплового излучения приводит к уменьшению интенсивности поверхностного теплообмена, но повышает скорость массопереноса в стационарном и нестационарном случаях.

7. Увеличение параметра броуновского движения Nb и параметра термофореза Nt уменьшает интенсивность поверхностного теплообмена в стационарном и нестационарном случаях. При этом интенсивность поверхностного теплообмена выше в нестационарном случае.

8. Снижение параметра броуновского движения Nb и повышение параметра термофореза Nt приводит к уменьшению интенсивности поверхностного массопереноса в стационарном и нестационарном случаях. При этом интенсивность поверхностного массопереноса выше в нестационарном случае.

Список условных обозначений

a, b, m — константы,	Nu_x — локальное число Нуссельта,
C — объемная доля наночастиц,	Nr — параметр излучения,
C_w — объемная доля наночастиц на поверхности,	Pr — число Прандтля,
C_∞ — объемная доля наночастиц вдали от поверхности,	q_m — поток массы на поверхности,
D_B — коэффициент броуновской диффузии,	q_w — поверхностный тепловой поток,
D_T — термофоретический коэффициент диффузии,	Re_x — локальное число Рейнольдса,
f — безразмерная функция тока,	Sh_x — локальное число Шервуда,
G — безразмерная температура наножидкости,	T — температура жидкости,
H — безразмерная объемная доля наночастиц,	t — время,
k — теплопроводность,	T_∞ — температура жидкости вдали от стенки,
k^* — средний коэффициент поглощения,	T_w — температура на протяженной поверхности,
Le — число Льюиса,	u — скорость в направлении оси x ,
Nb — параметр броуновского движения,	U_w — скорость протяженной поверхности,
Nt — параметр термофореза,	U_∞ — скорость свободного потока,
	v — составляющая скорости по оси y .

Греческие символы

α — температуропроводность,	$(\rho c)_p$ — эффективная теплоемкость материала наночастиц,
ε — переменный термофоретический коэффициент диффузии,	ρ_p — массовая плотность наночастиц,
β — переменный коэффициент броуновской диффузии,	η — преобразованная переменная,
ν — кинематическая вязкость,	ψ — функция тока,
μ — динамическая вязкость,	τ — соотношение между эффективной теплоемкостью материала наночастиц и теплоемкостью жидкости,
ρ_f — плотность жидкости,	σ^* — постоянная Стефана–Больцмана.
$(\rho c)_f$ — теплоемкость жидкости,	

Список литературы

1. Minkowycz W.J., Sparrow E.M., Abraham J.P. Advances in numerical heat transfer // Nanoparticle Heat Transfer and Fluid Flow. Boca Raton: CRC Press, 2013.
2. Choi S.U., Eastman J.A. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // ASME Intern. Mechanical Engng Congress and Exposition, San Francisco, CA, 1995.
3. Chiam T.C. Heat transfer in a fluid with variable thermal conductivity over a linearly stretching sheet // Acta Mechanica. 1998. Vol. 129. P. 63–72.
4. Wang X., Xu X., Choi S.U.S. Thermal conductivity of nanoparticle fluid mixture // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1999. Vol. 13, No. 4. P. 474–480.
5. Uddin M.J., Pop I., Ismail A.M. Free convection boundary layer flow of a nanofluid from a convectively heated vertical plate with linear momentum slip boundary condition // Sains Malaysiana. 2012. Vol. 41, No. 11. P. 1475–1482.

6. **Yasin M.H.M., Arifin N.M., Nazar R., Ismail F., Pop I.** Mixed convection boundary layer flow on a vertical surface in a porous medium saturated by a nanofluid with suction or injection // *J. Mathematics and Statistics*. 2013. Vol. 9, No. 2. P. 119–128.
7. **Devi S.P.A., Julie A.** Laminar boundary layer flow of nanofluid over a flat plate // *Int. J. Appl. Math and Mech*. 2011. Vol. 7, No. 6. P. 52–71.
8. **Ferdows M., Khan M.S., Mahmud M.A., Shuyu S.** MHD mixed convective boundary layer flow of a nanofluid through a porous medium due to an exponentially stretching sheet // *Mathematical Problems in Engng*. 2012. Vol. 2012. P. 408528-1–408528-21.
9. **Gorla R.S.R., Ali C.** Natural convective boundary layer flow over a non isothermal vertical plate embeded in a porous medium saturated with a nanofluid // *Nanoscale and Microscale Thermo-Physical Engng*. 2011. Vol. 15. P. 81–94.
10. **Hady F.M., Ibrahim F.S., Abdel-Gaied S.M., Mohamed R.E.** Radiation effect on viscous flow of a nanofluid and heat transfer over a non-linearly stretching sheet // *Nanoscale Research Letters*. 2012. Vol. 7. P. 229–242.
11. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Boundary layer flow over a moving surface in a nanofluid with suction or injection // *Acta Mech. Sin.* 2012. Vol. 28, No. 1. P. 34–40.
12. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // *J. Heat Transfer*. 2006. Vol. 28. P. 240–250.
13. **Kameswaran P.K., Sibanda P., Murti A.S.N.** Nanofluid flow over a permeable surface with convective boundary conditions and radiative heat transfer // *Mathematical Problems in Engng*. 2013. Article ID 201219.
14. **Khan W.A., Pop I.** Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 53. P. 2477–2483.
15. **Khan W.A., Aziz A.** Natural convection flow of a nanofluid over a vertical plate with uniform surface heat flux // *Int. J. Thermal Sci.* 2011. Vol. 50. P. 1207–1214.
16. **Makinde O.D., Aziz A.** Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition // *Int. J. Thermal Sci.* 2011. Vol. 50. P. 1326–1332.
17. **Nadeem S., Lee C.** Boundary layer flow of nanofluid over an exponentially stretching surface // *Nanoscale Research Letters*. 2012. Vol. 7. P. 94–97.
18. **Ibrahim W., Shanker B.** MHD boundary layer flow and heat transfer of a nanofluid past a permeable stretching sheet with velocity, thermal and solutal slip boundary conditions // *Computers & Fluids*. 2013. Vol. 75. P. 1–10.
19. **Nadeem S., Haq R.U., Akbar N.S., Lee C., Khan Z.H.** Numerical study of boundary layer flow and heat transfer of Oldroyd-B nanofluid towards a stretching sheet // *PLoS ONE*. 2013. No. 8. P. e69811.
20. **Remeli A., Arifin N.M., Nazar R., Ismail F., Pop I.** Marangoni-driven boundary layer flow in a nanofluid with suction and injection // *World Applied Sci. J.* 2012. Vol. 17. P. 21–26.
21. **Ibrahim W., Shanker B.** Boundary layer flow and heat transfer of nanofluid over a vertical plate with convective surface boundary condition // *J. Fluids Engng*. 2012. Vol. 134. P. 1–8.
22. **Kakac S., Pramuanjaroenkij A.** Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 3187–3196.
23. **Anilkumar D.** Nonsimilar solutions for unsteady mixed convection from a moving vertical plate // *Communications in Nonlinear Sci. and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16. P. 3147–3157.
24. **Kumari M., Nath G.** Unsteady MHD mixed convection flow over an impulsively stretched permeable vertical surface in a quiescent fluid // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. P. 310–319.
25. **Kumaran V., Kumar A.V., Pop I.** Transition of MHD boundary layer flow past a stretching sheet // *Communications in Nonlinear Sci. and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. P. 300–311.
26. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Boundary layer flow and heat transfer over an unsteady stretching vertical surface // *Meccanica*. 2009. Vol. 44, No. 4. P. 369–375.
27. **Mahdy A.** Unsteady mixed convection boundary layer flow and heat transfer of nanofluids due to stretching sheet // *Nuclear Engineering and Design*. 2012. Vol. 249. P. 248–255.
28. **Vajravelu K., Prasad K.V., Chiu-On N.** Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at a vertical surface with variable fluid properties // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2013. Vol. 14. P. 455–464.
29. **Mohamed A.E.** Unsteady mixed convection heat transfer along a vertical stretching surface with variable viscosity and viscous dissipation // *J. Egyptian Mathematical Society*. 2013.
30. **Cortell R.** Radiation effects in the Blasius flow // *Applied Math. and Computation*. 2008. Vol. 198. P. 333–338.
31. **Grubka L.G., Bobba K.M.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature // *Trans. ASME. Heat Transfer*. 1985. Vol. 107. P. 248–250.
32. **Ali F.M., Nazar R., Arifin N.M., Pop I.** Mixed convection stagnation-point flow on vertical stretching sheet with external magnetic field // *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* 2014. Vol. 35. P. 155–166.

*Статья поступила 29 августа 2014 г.,
после доработки — 13 ноября 2014 г.*