

УДК 539.3

МЕТОД БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко*,
А. Г. Федоренко

Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону, Россия

* Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар, Россия

E-mails: babeshko41@mail.ru, evdokimova.olga@mail.ru, babeshko49@mail.ru,
afedorenko@mail.ru

Излагается метод блочного элемента решения для пространственных интегральных уравнений с разностным ядром в граничных задачах механики сплошной среды и математической физики. В основе предложенного метода лежит метод Винера — Хопфа, обобщение которого на пространственный случай называется интегральным методом факторизации. Метод блочного элемента применен для решения задач в областях с кусочно-гладкой границей, содержащей угловые точки. С использованием разработанного метода решена контактная задача для клиновидного штампа, занимающего первый квадрант. Детально описаны способы получения различных характеристик решения, которое строится путем обращения системы одномерных линейных интегральных уравнений, характерных для динамических и статических контактных задач для штампа в виде полосы.

Ключевые слова: контактные задачи, интегральные уравнения, клиновидная область, блочный элемент, факторизация, приближенные решения, сингулярные особенности.

DOI: 10.15372/PMTF20170214

Введение. Интегральный метод факторизации Винера [1] позволяет численно-аналитически исследовать различные смешанные граничные задачи механики сплошных сред, математической и теоретической физики [2–7]. С помощью данного метода, связанного с факторизацией функций и матриц-функций одной комплексной переменной, удалось решить задачи в двумерных областях с гладкой границей. В частности, в работе [2] изложены варианты метода факторизации для одномерных интегральных уравнений и уравнений, сводящихся к одномерным. Обобщение метода на пространственные задачи для областей с гладкой границей содержится в работах [3, 8–10]. В настоящей работе, по-видимому, впервые этот метод применяется для решения статических и динамических граничных задач в областях с негладкой границей типа клина. Простейшим вариантом таких областей является клиновидная область с прямым углом, т. е. квадрант декартовой

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377), а также в рамках Программы Президиума РАН № 33П и проекта Министерства образования и науки РФ (код проекта 9.8753.2017/БЧ).

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г., 2017

системы координат. В основе метода блочного элемента решения граничных задач для уравнений в частных производных лежит метод факторизации [11]. Имеющий топологическую основу, метод позволяет решать такие граничные задачи, покрывая блоками всю область граничной задачи. Метод блочного элемента, применяемый при решении интегральных уравнений пространственных смешанных граничных задач, имеет следующие преимущества. Как правило, на границе области задания интегрального уравнения контактных задач происходит смена граничных условий: в контактных задачах для жесткого штампа — переход из области, в которой заданы перемещения под штампом и формулируется интегральное уравнение, в область, в которой заданы напряжения, в задачах о распространении трещин — обратный переход. Метод блочного элемента, в отличие от других методов, в том числе численных, позволяет наряду с решением интегрального уравнения получать информацию о физических параметрах смешанной задачи также и вне зоны задания интегрального уравнения, в частности, в контактных задачах — о характере перемещений вне области штампа. Ниже рассматривается интегральное уравнение смешанной граничной задачи для области клина, занимающего в плане первый квадрант декартовой системы координат. Такие интегральные уравнения возникают в задачах о действии клиновидного штампа на многослойную среду; о поведении трещины, имеющей клиновидную в плане форму, в многослойной области; о покрытии клиновидной формы на многослойном основании; о поведении плавающей льдины, имеющей клиновидную в плане форму; в смешанных граничных задачах, описывающих поведение холодной плазмы в указанной области, а также в других смешанных задачах.

1. Постановка задачи. Ниже блочный метод применяется для решения ранее не исследовавшегося интегрального уравнения вида

$$Kq = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty, \quad (1)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad Q(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta,$$

которое также можно представить в форме

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y),$$

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta.$$

Функция $K(\alpha, \beta)$ полагается мероморфной по обоим комплексным переменным. Нулевые и полярные множества этой функции являются аналитическими кривыми двух комплексных переменных. Функция $K(\alpha, \beta)$ изменяется на бесконечности следующим образом:

$$K(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const}, \quad K(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Предполагается, что полярные множества разрешимы относительно параметров и представимы в виде $\alpha_n = \alpha_n(\beta)$, $\beta_n = \beta_n(\alpha)$. В динамических смешанных граничных задачах конечное число полюсов могут быть вещественными [3]. Контур Γ_1 , Γ_2 принадлежат вещественной оси комплексных плоскостей α , β всюду, кроме окрестностей вещественных полюсов функции $K(\alpha, \beta)$. В этом случае в достаточно малых областях в окрестности

вещественных осей они отклоняются в комплексную плоскость, обходя полюсы. Контур выбирается таким образом, чтобы в случаях гармонических по времени смешанных граничных задач их постановка имела физический смысл: на бесконечности должен выполняться принцип излучения, согласно которому фазовые скорости направлены в бесконечность в случае нормальных материалов (материалов с одинаковыми направлениями распространения фазовых и групповых волн) и из бесконечности — в случае мезоматериалов, используемых в электронике [3]. В первом случае в первом квадранте вещественные полюсы символа $K(\alpha, \beta)$ обходятся контурами снизу, если при переходе к комплексным амплитудам используется функция $\exp(-i\omega t)$ (ω — частота колебаний; t — время). Во втором случае обход в первом и втором квадрантах осуществляется сверху. Следует отметить, что в ряде работ при исследовании интегрального уравнения указанного типа выделяются особенности решения в угловой точке [9, 12]. В работе [13] указанное интегральное уравнение решалось численным методом для изотропной статической смешанной граничной задачи в ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Исследования интегрального уравнения (1) в анизотропном случае авторам данной работы не известны. Решения указанного интегрального уравнения и подобных ему применяются в фундаментостроении, сейсмологии, устройствах элементной базы электроники, при изучении смешанных граничных задач о поведении плазмы в различных состояниях и т. д.

2. Свойства интегрального уравнения. Для исследования интегрального уравнения методом блочного элемента введем систему блочных элементов Ω_{mn} , $m = 1, 2$, $n = 1, 2$. Второй и четвертый квадранты обозначим Ω_{12} и Ω_{21} соответственно, третий — Ω_{22} . Теми же индексами будем обозначать функции, для которых заданные области являются носителями. Первый квадрант обозначим Ω . Ниже используются следующие обозначения. В дальнейшем для преобразований фурье-функций, обозначенных строчными буквами, будем применять прописные буквы. Например, для функций $k(x, y)$, $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ преобразования Фурье обозначаются $K(\alpha, \beta)$, $F(\alpha, \beta)$, $\Phi(\alpha, \beta)$ соответственно. В дальнейшем будем выполнять операции факторизации функций, зависящих от двух комплексных переменных α и β , в виде суммы и произведения. При выполнении операции факторизации в виде суммы используются принятые в [3] обозначения с фигурными скобками. Так, если факторизуется в виде суммы некоторая функция $G(\alpha, \beta)$ по параметру α относительно контура Γ_1 , то функции, получаемые в результате этой операции, обозначаются следующим образом:

$$G(\alpha, \beta) = \{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^+ + \{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^- \quad (2)$$

Вторая функция в правой части (2) регулярна в комплексной плоскости выше контура Γ_1 , а первая — ниже этого контура. В том случае, если выполняется операция факторизации и по параметру β , факторизованные функции обозначаются следующим образом:

$$G_\alpha^+ = \{G_\alpha^+\}_\beta^+ + \{G_\alpha^+\}_\beta^-,$$

$$\{G_\alpha^+\}_\beta^+ \equiv G_{\alpha\beta}^{++} \equiv \{\{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^+\}_\beta^+, \quad \{G_\alpha^+\}_\beta^- \equiv G_{\alpha\beta}^{+-} \equiv \{\{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^+\}_\beta^-.$$

Если функции имеют индексы, обозначающие, например, квадранты, являющиеся носителями функций, то для факторизации применяются следующие обозначения:

$$G_{\alpha\beta mn}^{++} \equiv \{G_{\alpha mn}^+\}_\beta^+ \equiv \{\{G_{mn}(\alpha, \beta)\}_\alpha^+\}_\beta^+, \quad G_{\alpha\beta mn}^{+-} \equiv \{G_{\alpha mn}^+\}_\beta^- \equiv \{\{G_{mn}(\alpha, \beta)\}_\alpha^+\}_\beta^-.$$

Ниже приводятся выражения для операторов, осуществляющих факторизацию в виде суммы [3]:

$$\{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha > \Gamma_1, \quad \{G(\alpha, \beta)\}_\alpha^- = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha < \Gamma_1.$$

Неравенства, следующие за интегральными выражениями, означают, что параметр α находится выше контура Γ_1 (первое выражение) или ниже контура Γ_1 (второе выражение). Факторизация по α или по β в виде произведения выполняется только для функции $K(\alpha, \beta)$ и имеет вид

$$K(\alpha, \beta) = K_{+\alpha}(\alpha, \beta)K_{-\alpha}(\alpha, \beta), \quad K(\alpha, \beta) = K_{+\beta}(\alpha, \beta)K_{-\beta}(\alpha, \beta). \quad (3)$$

Операторы, осуществляющие операцию факторизации в виде произведения, определяются формулами

$$K_{+\alpha}(\alpha, \beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi\right), \quad \alpha > \Gamma_1,$$

$$K_{-\alpha}(\alpha, \beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi\right), \quad \alpha < \Gamma_1.$$

В случаях факторизации по параметру β во всех формулах необходимо заменить параметр β на параметр α , а контур Γ_1 — на Γ_2 :

$$K_{+\beta}(\alpha, \beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi\right), \quad \beta > \Gamma_2,$$

$$K_{-\beta}(\alpha, \beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi\right), \quad \beta < \Gamma_2.$$

Условия, налагаемые на функции при применении формул факторизации в виде суммы или произведения, подробно описаны, например, в [2, 3] и в данной работе не приводятся.

3. Метод блочного элемента для интегрального уравнения. При исследовании интегрального уравнения (1) используется традиционный подход [3, 8, 11]. При этом эквивалентно погружаем интегральное уравнение в компактное топологическое пространство аналитических многообразий, т. е. пополняем это пространство новыми неизвестными функциями, чтобы покрыть всю плоскость, гомеоморфную сфере, и применяем двойное преобразование Фурье. Для этого запишем интегральное уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y) + \varphi_{12}(x, y) + \varphi_{21}(x, y) + \varphi_{22}(x, y). \quad (4)$$

Здесь неизвестная функция $\varphi_{12}(x, y)$ имеет носитель во втором квадранте, $\varphi_{21}(x, y)$ — в четвертом, $\varphi_{22}(x, y)$ — в третьем.

После применения преобразования Фурье с учетом сказанного в п. 1 продолженное интегральное уравнение (4) принимает вид

$$K(\alpha, \beta)Q(\alpha, \beta) - \Phi_{12}(\alpha, \beta) - \Phi_{21}(\alpha, \beta) - \Phi_{22}(\alpha, \beta) - F(\alpha, \beta) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, получено некоторое соотношение аналитических многообразий.

Задача состоит в том, чтобы, приравнявая к нулю однотипные компоненты этих многообразий, построить соотношения, позволяющие получить решение $Q(\alpha, \beta)$ интегрального уравнения. Инструментом для решения этой задачи являются факторизации, позволяющие выявлять однотипные компоненты. С использованием соотношений факторизаций (2), (3) получаем решение $q(x, y)$ интегрального уравнения в форме

$$q(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

где функция $Q(\alpha, \beta)$ в силу (5) имеет вид

$$Q(\alpha, \beta) = K^{-1}(\alpha, \beta)[F(\alpha, \beta) + \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta) + \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta) + \Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta)]. \quad (6)$$

Функции $\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta)$, $\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta)$ находятся из системы двух одномерных интегральных уравнений, аналогичных получаемым для штампа в виде полосы [3, 8, 9]:

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} + \{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_\alpha\}_\beta^+ &= -\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_\alpha\}_\beta^+, \\ \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} + \{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_\beta\}_\alpha^+ &= -\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_\beta\}_\alpha^+. \end{aligned} \quad (7)$$

Затем функция $\Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta)$ представляется в одной из эквивалентных форм и выражается через найденные функции:

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha 22}^{--} &= -\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_\alpha\}_\beta^- - \{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_\alpha\}_\beta^-, \\ \Phi_{\alpha\beta 22}^{--} &= -\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_\beta\}_\alpha^- - \{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_\beta\}_\alpha^-. \end{aligned}$$

Во многих смешанных граничных задачах функции, содержащиеся в представлении решений, являются мероморфными, что позволяет вычислять интегралы методом теории вычетов. Более того, в результате вычислений интегралов получаются системы линейных алгебраических уравнений, доступные для численного решения, если известны нули и полюсы мероморфных функций, аналогичные изученным в [3, 8, 9].

4. Исследование свойств решения интегрального уравнения и граничной задачи. Полагая, что символ $K(\alpha, \beta)$ интегрального уравнения для многих граничных задач в случае многослойной изотропной или анизотропной среды и для контактных задач в случае гладкого и негладкого штампов изменяется следующим образом:

$$K_{-\alpha}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-\theta_1}), \quad K_{-\beta}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-\theta_2}), \quad 0 < \theta_m < 1, \quad |\alpha| \rightarrow \infty$$

и абсолютно суммируемая в первом квадранте функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема, можно показать, что оператор системы (7) ограничен в пространстве функций, непрерывных с некоторым степенным весом на контурах Γ_m , $m = 1, 2$ [3]. Это позволяет исследовать свойства решения интегрального уравнения в первом блоке (первом квадранте) и поведение поверхности в остальных блоках (квадрантах). Покажем, что построенное решение обладает свойствами, характерными для решений контактных задач, полученных в более простых областях, например в зонах, удаленных от границ области контакта, и в зонах на границе области контакта. Приведем следующие свойства решений.

1. Запишем соотношение (6) в виде

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^{-1}(\alpha, \beta)[F(\alpha, \beta) + \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta) + \\ &\quad + \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta) + \Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta)] e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad 0 < x, y < \infty. \end{aligned}$$

Устремляя в правой части x и y к бесконечности в окрестности биссектрисы угла первого квадранта, в силу теоремы Римана — Лебега для интегралов Фурье получаем оценку

$$q(x, y) \approx \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^{-1}(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \right) [1 + o(1)].$$

Таким образом, вдали от границ решение интегрального уравнения стремится к вырожденному, которое является решением уравнения свертки в предположении, что уравнение задано во всей плоскости [3].

2. Для исследования свойств решения на границах штампа с использованием приведенных выше формул факторизации и формул представления операторов системы уравнений (7) имеем следующие оценки:

$$\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} + \{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_{\alpha}^{-}\}_{\beta}^{+} = -\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{-}\}_{\beta}^{+}, \quad \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_{\alpha}^{-} = G_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi),$$

$$\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_{\alpha}^{-}\}_{\beta}^{+} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} K_{-\alpha}(\alpha, \xi) \frac{G_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi = O(\alpha^{-\theta_1}),$$

$$K^{-1}(\alpha, \beta)\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_{\alpha}^{-}\}_{\beta}^{+} = O(\alpha^{1-\theta_1}),$$

$$q(x, y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} K^{-1}(\alpha, \beta)\{K_{-\alpha}\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}\}_{\alpha}^{-}\}_{\beta}^{+} e^{-i\alpha x} d\alpha = O(x^{-\theta_1}), \quad x \rightarrow 0, \quad y > 0,$$

$$\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} + \{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_{\beta}^{-}\}_{\alpha}^{+} = -\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}F(\alpha, \beta)\}_{\beta}^{-}\}_{\alpha}^{+}, \quad \{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_{\beta}^{-} = G_{\beta}^{-}(\xi, \beta),$$

$$\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_{\beta}^{-}\}_{\alpha}^{+} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} K_{-\beta}(\xi, \beta) \frac{G_{\beta}^{-}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi = O(\beta^{-\theta_2}), \quad \alpha > \Gamma_1,$$

$$K^{-1}(\alpha, \beta)\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_{\beta}^{-}\}_{\alpha}^{+} = O(\beta^{1-\theta_2}),$$

$$q(x, y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} K^{-1}(\alpha, \beta)\{K_{-\beta}\{K_{-\beta}^{-1}\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}\}_{\beta}^{-}\}_{\alpha}^{+} e^{-i\beta y} d\beta = O(y^{-\theta_2}), \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0.$$

Из полученных оценок следует, что на границах клиновидного штампа имеет место неограниченный рост контактных напряжений с таким же показателем особенности $\theta_1 = \theta_2 = 0,5$, что и в изотропных задачах. В анизотропных задачах и контактных задачах с трением допускаются различные значения θ_n при $x = 0$ и $y = 0$ (см. выше). Таким образом, факторизация символа интегрального уравнения позволяет получить информацию о порядке особенностей на прямолинейной границе штампа.

3. При исследовании свойств решения смешанной граничной задачи на поверхности вне штампа используется оценка поведения функций в остальных блоках. Для этого выполняются следующие построения:

$$\varphi_{12}(x, y) \sim \frac{1}{8\pi^3 i} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-\alpha}(\alpha, \xi) \frac{G_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

$$K_{-\alpha}(\alpha, \xi) = \sum_n \frac{C_n}{\alpha - \alpha_n(\xi)}, \quad \text{Im } \alpha_n \geq 0,$$

$$\varphi_{12}(x, y) = O(e^{-i\alpha_n 0 x}), \quad \text{Re}(-i\alpha_n 0) \geq 0, \quad \text{Im}(-i\alpha_n 0) \leq 0, \\ -\infty < x < 0, \quad y > 0, \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\varphi_{21}(x, y) \sim \frac{1}{8\pi^3 i} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-\beta}(\xi, \beta) \frac{G_{\beta}^{-}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

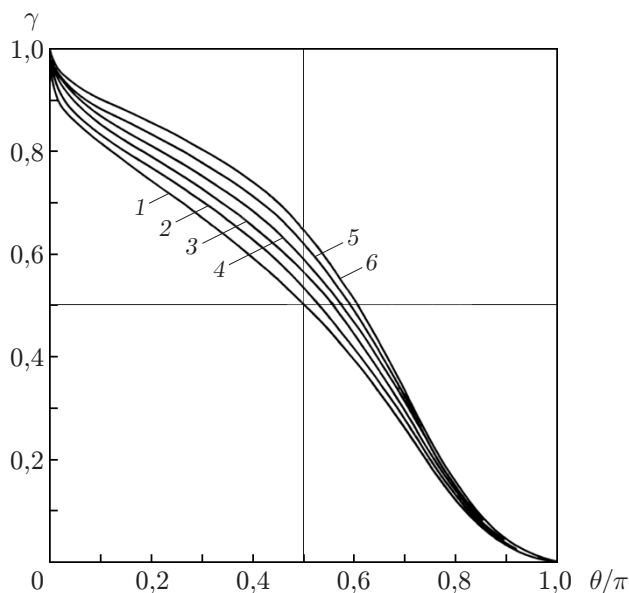
$$K_{-\beta}(\xi, \beta) = \sum_n \frac{S_n}{\beta - \beta_n(\xi)}, \quad \text{Im } \beta_n \geq 0,$$

$$\varphi_{21}(x, y) = O(e^{-i\beta_{n0}y}), \quad \operatorname{Re}(-i\beta_{n0}) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(-i\beta_{n0}) \leq 0, \\ -\infty < y < 0, \quad x > 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Из полученных оценок следует, что если рассматривается статическая граничная задача, то во втором и четвертом квадрантах при вдавливании штампа положение поверхности экспоненциально стремится к невозмущенному состоянию при удалении от границ первого квадранта в бесконечности второго и четвертого. В случае динамической граничной задачи о вибрации штампа во втором и четвертом квадрантах возникают волны, уходящие от границ штампа в бесконечность с фазовыми скоростями $-\omega\alpha_{n0}^{-1}$ и $-\omega\beta_{n0}^{-1}$ соответственно для случаев $\operatorname{Im}\alpha_{n0} = \operatorname{Im}\beta_{n0} = 0$ и нормального материала среды, т. е. для случаев совпадения направлений групповых и фазовых скоростей. Для остальных комплексных полюсов мероморфных функций выражение, не описывающее убегающие волны, экспоненциально стремится к нулю при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. В третьем квадранте при $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ имеют место оба типа описанных волн.

4. Штамп в угловой точке границы имеет особенность $(x^2 + y^2)^{-0,5\gamma}$, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, показатель γ которой для различных смешанных граничных задач вычислялся в работах [9, 12, 13] и др. На рисунке приведена зависимость показателя особенности γ от угла раствора θ/π для случая штампа с коэффициентом трения ε , контактирующего с многослойным основанием. В этом случае на прямолинейных границах штампа показатели особенностей θ_1, θ_2 различаются. Для их определения достаточно знать лишь свойства факторизованных функций. Однако для получения показателя особенности в угловой точке клиновидного штампа этих данных недостаточно. Необходимо знать символ интегрального уравнения — функцию $K(\alpha, \beta)$. При дальнейшем исследовании используются переход в окрестности угловой точки к полярным координатам, асимптотическое разложение для выделения существенных членов и преобразование Меллина. На рисунке в работе [9, С. 129] приведена зависимость от величины θ/π показателя особенности в угловой точке для угла раствора клина, равного 2θ . В рассматриваемом случае $\theta = 0,25\pi$. По этому значению абсциссы можно приближенно найти значения показателя особенности γ при различных значениях коэффициента трения. В случае отсутствия трения ($\varepsilon = 0$) $\gamma \approx 0,69$.

Подход, связанный с использованием интегральных уравнений при исследовании граничных задач, является более эффективным по сравнению с методом факторизации Винера — Хопфа, в котором необходим переход к функциональному уравнению вида (6).



Зависимость показателя особенности γ от угла раствора θ/π в угловой точке штампа ($x = \pi$) при различных значениях коэффициента трения ε :
 1 — $\varepsilon = 0$, 2 — $\varepsilon = 0,1$, 3 — $\varepsilon = 0,2$, 4 — $\varepsilon = 0,3$, 5 — $\varepsilon = 0,4$, 6 — $\varepsilon = 0,5$

Таким образом, метод блочного элемента позволяет единообразно исследовать интегральные уравнения для широкого круга смешанных граничных задач, сложных для численного анализа вследствие неограниченности области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wiener N., Hopf E.** Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen // Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. 1931. Bd 31. S. 696–706.
2. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
4. **Ткачева Л. А.** Колебания плавающей упругой пластины при периодических смещениях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 166–179.
5. **Ткачева Л. А.** Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 136–145.
6. **Гинзбург В. Л.** Волны в магнитоактивной плазме / В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе. М.: Либроком, 2013.
7. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.** Об аналогии технической задачи теплопроводности одному климатическому явлению // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 6. С. 31–37.
8. **Бабешко В. А.** Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
9. **Бабешко В. А.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. М.: Наука, 1989.
10. **Эскин Г. И.** Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
11. **Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.** Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 2. С. 168–172.
12. **Глушков Е. В., Глушкова Н. В.** Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 4. С. 82–88.
13. **Рвачев В. Л.** Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. Киев: Наук. думка, 1977.

Поступила в редакцию 14/III 2016 г.